

# 薄壁空间体系的 建筑力学

B. 3. 伏拉索夫 著

滕 智 明 译

中国工业出版社

# 薄壁空間体系的建筑力学

B.3. 伏拉索夫 著

滕智明 译

中国工业出版社

本书系统地叙述了作者运用在建筑中常见的薄壁空间结构上的理论。  
书中有棱壳与板的强度和稳定性的计算方法，并且包括将壳与板的理论的两向度连接问题化为单向度问题的一般变分法。  
本书的对象是科学工作者、设计工程师和研究生。

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ТОНКОСТЕННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СИСТЕМ

В. З. Власов

Государственное издательство строительной литературы

МОСКВА—1949

\* \* \*

薄壁空间体系的建筑力学

滕智明译

\*

中国工业出版社建筑图书编辑室编辑（北京佟麟阁路丙10号）

中国工业出版社出版（北京佟麟阁路丙10号）

（北京市书刊出版事业许可证出字第110号）

中国工业出版社第一印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

\*

开本787×1092  $\frac{1}{16}$ ·印张23  $\frac{1}{2}$ ·插页1·字数520,000

1957年11月北京第一版

1962年3月北京新一版·1962年3月北京第一次印刷

印数0001—2300·定价（11）4.80元

\*

统一书号：15165·1543（建工-214）

# 目 录

|                                                                 |     |
|-----------------------------------------------------------------|-----|
| 序 言 .....                                                       | 5   |
| 第一章 棱壳型及筒壳型薄壁空间体系的理论 .....                                      | 7   |
| 第 1 节 基本假定 计算模型 组成壳的矩形板 .....                                   | 7   |
| 第 2 节 未知函数 基本体系 壳的单元状态 .....                                    | 17  |
| 第 3 节 棱壳的八项微分方程 这些方程的矩阵及矩阵的基本性质 作为壳理论<br>的特殊情形的薄壁杆件理论 .....     | 31  |
| 第 4 节 具有自由纵向边缘的棱壳的微分方程组成举例 .....                                | 40  |
| 第 5 节 在任意已知的纵向边缘边界条件下棱壳微分方程的组成 .....                            | 62  |
| 第 6 节 用三角级数法积分微分方程 .....                                        | 74  |
| 第 7 节 在任意已知曲线边缘条件下棱壳的一般实用计算方法 梁的横向振动基<br>本函数对于积分八项微分方程的应用 ..... | 79  |
| 第二章 应用在建筑业中的新型薄壁屋盖结构的受力分析 .....                                 | 95  |
| 第 8 节 与已知横向边缘边界条件有关的壳的受力分析 .....                                | 95  |
| 第 9 节 与已知纵向边缘边界条件有关的壳的受力分析 .....                                | 114 |
| 第 10 节 应用扇面积定律计算肋形的筒壳及棱壳 .....                                  | 122 |
| 第 11 节 四边支承的筒壳 与平面尺寸(长与宽)比值有关的应力状态分析 .....                      | 130 |
| 第 12 节 由剪切变形不存在的假定得出来的棱壳的几何性质 .....                             | 141 |
| 第 13 节 与平面尺寸比值有关的三跨车间屋盖结构的空问受力分析 .....                          | 145 |
| 第三章 将壳及板的理论中的复杂的两向度连接问题化为单向度问题的一<br>般变分法 .....                  | 159 |
| 第 14 节 基本假定 .....                                               | 159 |
| 第 15 节 将壳理论中的两向度连接问题化为常微分方程系的一般变分法 .....                        | 162 |
| 第 16 节 边界效应 广义内力 纵向及横向双力矩 .....                                 | 168 |
| 第四章 横截面具有任意已知刚架形状的棱壳的计算方法 .....                                 | 173 |
| 第 17 节 具有一个截面扭曲及周线变形自由度的壳 具有单跨刚架型横截面的<br>薄壁空间结构的计算例子 .....      | 173 |
| 第 18 节 具有单跨双层刚架型横截面的薄壁结构的空问受力 .....                             | 192 |
| 第 19 节 双层的多连壳型式的薄壁顶盖和楼盖 .....                                   | 210 |
| 第 20 节 正交各向异性的机翼型多连横截面的薄壁结构 将方法推广于锥形壳 .....                     | 224 |
| 第 21 节 横截面具有可变封闭周线的薄壁杆 .....                                    | 241 |
| 第 22 节 具有刚性封闭周线的薄壁杆的扭转 .....                                    | 257 |
| 第五章 横截面具有可变周线的棱壳、薄壁杆及组合柱的稳定性 .....                              | 264 |
| 第 23 节 横截面具有可变封闭周线的正交各向异性的棱壳和薄壁杆的稳定性 .....                      | 264 |
| 第 24 节 由纵梁及正交各向异性板组合成的薄壁杆和柱的稳定性 .....                           | 267 |
| 第六章 矩形板及组合梁的平面应力状态 .....                                        | 277 |

|           |                                |     |
|-----------|--------------------------------|-----|
| 第 25 節    | 開口剖面薄壁組合梁的精確的彎曲理論              | 277 |
| 第 26 節    | 矩形板的平面應力狀態 將雙和諧方程化為常微分方程的兩個方法  | 288 |
| 第 27 節    | 梁的初等彎曲理論                       | 293 |
| 第 28 節    | 計算高腹板梁的修正的平截面假定                | 294 |
| 第 29 節    | 理論在彈性地基梁彎曲問題中的應用 溫克勒-蔡米爾門假定的修正 | 297 |
| 第七章       | 板的彎曲理論                         | 300 |
| 第 30 節    | 薄板的變形理論 將彈性力學的一般三向度問題化為二向度的問題  | 300 |
| 第 31 節    | 板彎曲時的靜力值及幾何值之間的關係              | 304 |
| 第 32 節    | 靜力條件 基本微分方程                    | 308 |
| 第 33 節    | 有界限板的彎曲 周綫條件 問題在數學上的簡明陳述       | 312 |
| 第 34 節    | 板彎曲的最簡單的情形(逆向問題)               | 317 |
| 第八章       | 具有不可動肋的矩形板和棱壳的計算理論             | 323 |
| 第 35 節    | 引言 最終形式的解和無窮級數形式的解             | 323 |
| 第 36 節    | 將矩形板的彎曲問題化為常微分方程               | 324 |
| 第 37 節    | 撓度橫向分布函數的選擇 基本函數 馬利斯利威方法和它的推廣  | 328 |
| 第 38 節    | 力矩及橫向力的計算 縱向邊緣的靜力條件            | 329 |
| 第 39 節    | 用靜力法選擇撓度的橫向分布函數 在薄壁空間體系計算上的推廣  | 331 |
| 第九章       | 具有不可動肋的矩形板及棱壳的實用計算法            | 334 |
| 第 40 節    | 問題的提出                          | 334 |
| 第 41 節    | 作為撓度綫的分布函數 基本微分方程              | 335 |
| 第 42 節    | 廣義位移及廣義力                       | 337 |
| 第 43 節    | 橫向邊緣的邊界條件                      | 338 |
| 第 44 節    | 板及板形體系的約束扭轉和筒形彎曲               | 338 |
| 第 45 節    | 具有不可動肋和不可動邊緣的板和壳的彎曲            | 343 |
| 第 46 節    | 將微分方程化為無因次坐標的方程 相對彈性特征         | 346 |
| 第 47 節    | 齊次方程的一般積分                      | 347 |
| 第 48 節    | 應用特殊積分來積分非齊次微分方程               | 350 |
| 第 49 節    | 應用初參變數法積分非齊次微分方程               | 352 |
| 附 錄       |                                | 363 |
| 俄中技術名詞對照表 |                                | 373 |

## 序 言

本专著阐述的是横截面具有任意已知外形的棱壳（Призматическая оболочка）型及筒壳（Цилиндрическая оболочка）型薄壁空间体系的一般理论和计算方法。

这个理论是以作者远在1931年所提出的新的变分法为根据的。这个变分法使我们有可能与文献中已详细探讨过的、静不定杆系建筑力学的方法很好的结合起来，把壳体的复杂的偏微分方程化为常微分方程。这种常微分方程的构造，和刚架理论中的典型方程一样，是对称的。

作者所采用的方法与文献中人所共知的里查—齐莫申科，布勃诺夫—加列尔庚的变分法不同之点在于：在作者的方法中，与两个变数有关并且能满足偏微分方程的未知函数（例如，弹性板弯曲问题中的挠度），是以两个函数乘积的形式出现的。其中一个函数是一个变数的已知函数，而另一个函数是另一个变数的未知函数。在作者根据直接应用虚位移原理所构成的变分法中，没有采用里查—齐莫申科或者布勃诺夫—加列尔庚的方法中所有的、由线性代数方程来计算的未知常数，而是引用一组未知函数，其中每一个都仅仅与一个坐标有关，并且是由线性常微分方程来计算的。与这个变分法相应的、壳的计算模型，为一薄壁空间弹性体系，它所具有的自由度在一个座标方向内为有限值，在另一座标方向内为无穷大。这种体系，作者称之为隔离连续体系（Дискретно-континуальная система）。

建立在平截面假定之上的梁的初等弯曲理论，实际上也是以变分法为基础的。这种变分法将平面问题中的双和谐方程化为常微分方程。同样地，作者所研究出来的、建立在截面形状不可变形的假定之上的、更一般的薄壁杆件理论，在概念上也接近于本专题论文所阐述的薄壁空间体系的一般理论。无论是弯曲情形下的梁，或者是更一般的复杂抗力情形下（弯曲和扭转）的薄壁杆件，它们的计算模型都是受相应物理假定所限制的隔离连续体系。

本专著中所阐述的薄壁空间体系建筑力学，在概念上就是现代初等材料力学中某些基本原理的逻辑上的发展和推广。

筒壳及棱壳可以分为三种：长壳、中等长度壳及短壳。作者将薄壁杆件划为长壳一类，对于这种薄壁杆件可以应用横截面形状不可变形的假定。中等长度的壳是一种具有变形截面的、仅在横方向能抗弯的壳。最后一种短壳，就是除了须考虑横向弯矩以外，同时还要考虑纵向弯矩及扭矩的壳。

本书所阐述的是关于中等长度的棱壳及筒壳的理论。外形为任意已知曲面的壳的理论，特别是筒形短壳的理论，已在另一本叫做“壳的一般理论及其在技术中的应用”的著作中加以阐述。

中等长度壳计算中的一些个别问题在我们以前的著作（“筒壳及褶皱体系的新实用

計算法”，国立建筑出版社1933年；“壳的建筑力学”，国立建筑出版社1936年）中曾經介紹过。

本专著表明，薄壁杆件理論是在本书及上述两书中所闡述的中等长度棱壳的更一般的理論的特殊情形。

作者利用了自己在“彈性薄壁杆件”（国立建筑出版社1940年）一书中所引用的一些新的概念和術語（扇面积定律、截面的扇性扭曲、扇性慣矩、扇性双力矩），并将它們推广到本书所討論的更为复杂的关于壳的建筑力学問題上来。这些概念和術語从作者发表第一部关于薄壁杆件理論的著作时起，就已在苏联和国外得到了公认。但是作者始終认为，在自己以前的著作以及本书中所提出的某些術語将来是可能被更完善的術語所代替的。

作者仅向A.A.格沃茲杰夫、B.H.热莫契庚、B.M.凱尔德什、П.Л.拍斯切爾納克、И.М.拉賓諾維奇、H.C.斯特烈列斯基、M.M.菲洛宁柯—波罗基契及И.Я.施搭尔曼等教授致以深刻的謝意，感謝他們在研究这个理論的过程中所給与的精神上的支援；作者对技术科学博士С.С.果卢什凱維奇教授在詳閱原稿时所給与的宝贵指示表示感謝，并向校閱原稿的技术科学副博士A.K.姆罗兴斯基、H.Г.达布多格洛、H.Я.格留別尔格及Я.Б.烈文諸同志表示感謝，最后并向中央工业建筑科学研究所的青年科学工作者B.C.华西里果夫、H.Д.列溫茨基、И.Е.米列依果夫斯基及Ф.А.彼尔恩表示感謝，感謝他們在本理論应用于个别問題上时所准备的图例材料。

莫斯科中央工业建筑科学研究所1947年

作者

# 第一章

## 棱壳型及筒壳型薄壁空间体系的理论

### 第1节 基本假定 计算模型 组成壳的矩形板

我们来研究一下由有限数目的矩形薄板所组成的棱壳,此壳具有某种任意已知折线形的横截面(图1)。假设组成壳的矩形板彼此在连接线(棱形中间面的肋)处的结合是刚性的,因为在连接(接触)线的每一点上,一板对另一与它相连接的板的任何可动性都不存在。

假定中间面上任一点 $M$ 的位置,我们用坐标 $z$ 和 $s$ 来确定。坐标 $z$ 是从某一 $z=0$ 的、假定为起始截面的横截面起,沿母线方向到 $M$ 点为止的距离,而坐标 $s$ 是从某一 $s=0$ 的母线起到横截面周线上的 $M$ 点的距离。

壳是双向受拉受弯的薄壁空间弹性体系,其应力状态为两组力所决定(图2)。其中,一组由作用在中间面上的法向力及剪力所构成(图2a)。这种力决定着壳板的所谓平面应力状态。另一组力由作用在壳的两个相互正交的法向截面上的弯矩、扭矩及横向力(或切力)所组成。这些力是由于每个板单独地弯曲而产生的(图2b)。

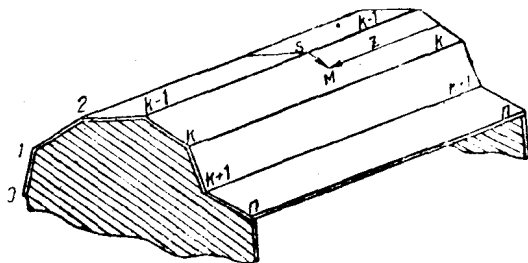


图 1

根据作用在两个相互正交的法向面积上并与中间面平行的切应力的成对定理可以知道,剪力也和壳横截面及纵截面面积上的扭矩一样,是彼此相等的。

因此,壳的任一点的应力状态,在一般情形下为八个独立的力所决定,即法向力 $T_1$ 、 $T_2$ ,剪力 $S$ ,弯矩 $G_1$ 、 $G_2$ ,扭矩 $H$ 及横向力 $N_1$ 、 $N_2$ 。这些力是各对中间面的横截面或纵截面的相应线的单位长度来说的。

对于这些力,我们采用下述的符号规则。如果面积的外法线相应地指向坐标 $z$ 或 $s$ 的增长方向,则在此面积上沿该法线方向作用的法向力 $T_1$ 及 $T_2$ 为正;假如在同一面积上,剪力 $S$ 指向坐标 $z$ 或 $s$ 的增长方向,则剪力 $S$ 也是正的(图2a)。

如果在同一面积上的横向弯矩 $G_1$ 和 $G_2$ ,使板弯曲而且弯曲面是向下凸出的,则 $G_1$ 、 $G_2$ 为正。而与 $G_1$ 、 $G_2$ 相应的横向

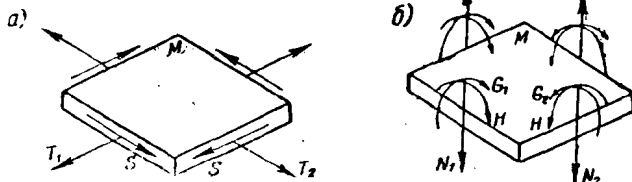


图 2

力  $N_1$  及  $N_2$ ，如方向向下，則为正(图26)。在对面面积上，如方向与此相反，則上述各力皆为正。

壳中間面的变形状态在每一点上为六个独立值所决定，即：与力  $T_1$ 、 $T_2$  及  $S$  相应的伸長变形及剪切变形；与力矩  $G_1$ 、 $G_2$  及  $H$  相应的弯曲变形及扭转变形。

中間面上通过已知点  $M$  并具有任意已知方向的綫度單元的單位伸長，决定于剪切变形及兩相互正交方向的伸長变形。

因此，这些变形是与中間面的拉力相关的。知道这些变形以后，我們就可以根据它們求得中間面上  $M$  点附近的任意几何图形的改变。

扭转变形及兩相互正交方向的弯曲变形，是与板的中間面变形后所形成的曲面的曲率相关的。由这三个独立值即可决定中間面上通过点  $M$  的任意法向截面的交綫的曲率。

許多年来，在中央工业建筑科学研究所(ЦНИИП)进行的理論及試驗研究表明，对于相当長的壳体，在上列各靜力因素中，起主要作用的是軸力<sup>①</sup>(法向力及剪力)  $T_1$ 、 $T_2$ 、 $S$  和横向弯矩  $G_2$  及与它相应的横向力  $N_2$ 。薄壁空間体系棱壳的应力状态基本上取决于这些力和弯矩。

至于說到由于各板沿母綫方向离开本身平面的弯曲而产生的縱向弯矩  $G_1$  (与横向力  $N_1$  在一起)以及扭转变形相关的扭矩，那么，这些力矩在棱壳的一般应力状态中通常都是次要因素，对由于法向力和剪力所引起的基本应力状态影响极小。

在棱壳的变形中，当母綫方向的長度相当大时，影响軸力(法向力及剪力)状态的主要因素是縱向的伸長变形以及沿横截面周綫的弯曲变形。

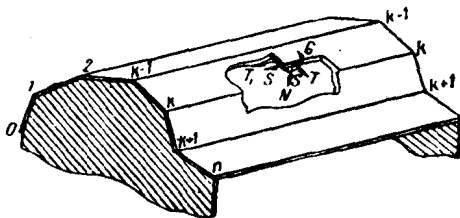


圖 3

代表坐标綫  $z = \text{常数}$  及  $s = \text{常数}$  之間的直角变化的剪切变形，以及横截面周綫上的伸長变形，亦即沿任一板的寬度方向取出的綫度單元的長度变化，通常都是很小的。在棱壳中，也和开口剖面薄壁杆件中一样，这种变形对軸力几乎毫无影响。

根据上述的研究，我們所提出的关于棱壳的一般技术的弯矩理論是以下列假定为根据的。

1. 將壳看作是薄壁空間連續体系，其中各板在横截面上只受作用在中間面上的法向力和剪力的作用。縱向弯矩及扭矩，作为对壳的基本应力和变形影响极小的因素，取等于零。因此，壳所承受的內力將只有法向力及剪力  $T_1$ 、 $T_2$ 、 $S$ ，横向弯矩  $G_2$  以及与它們相应的横向力  $N$ (图3)。

2. 在壳的变形中，各板的横向伸長变形及剪切变形等于零。

第一个假定是靜力假定。由这个假定我們可以推断出：横截面上任一点所产生的縱向法向应力以及与中間面平行的切应力是沿壳厚均匀分布的。

因此，我們可以認為，假如在板的法綫上取一綫段，其長等于板厚  $\delta$ ，則在此綫段的兩

① 軸力(Осевые силы)—法向力及剪力的總稱(英文 Extensional force 德文 Dehnungskräfte)——譯者注。

② 在  $T$  及  $G$  中我們略去了尾號 2。

端应力具有同一的数值。由于数值极小而略去纵向弯矩及扭矩，就等于同时略去了在薄壳横截面上与中间面平行的法向应力及切应力是沿壳厚非均匀分布的因素。

第二个假定是对壳的变形而言的，因此，是几何假定。按照这个假定，棱壳被看作是一个薄壁空间连续体系，其中间面的变形应如下述：第一，中间面在 $z = \text{常数}$ 周线上的綫度单元，其原有长度不变；第二，直线 $z = \text{常数}$ 及 $s = \text{常数}$ 間的直角，变形后仍为直角。棱形中间面的变形，可以由于该面的仅沿纵向的拉伸以及由于組成該面的矩形薄条的弯曲和扭轉而产生。

应该指出的是，剪切变形不存在的假定，主要是对沿母綫方向有相当长度的棱壳来说的。在我们的一篇著作<sup>①</sup>中有不受这个假定限制的壳的精确计算方法。这个方法适用于研究多連 壳的应力和变形，所謂多連 的壳，就是横截面是由一根或几根閉合綫所組成的壳(机翼型壳)。

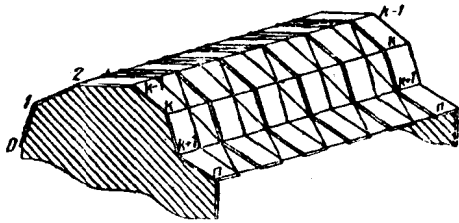


圖 4

采用了这些假定就可以确定壳的计算模型。如果把壳分成許多横向的單元条形，則其中的每一條我們都可以看作是平面折杆。这个折杆是由不能拉伸，但在壳的横截面平面中可以弯曲的構件所組成的。如果这个平面上的各个構件在周綫节点上(在棱形面的肋上)的联結是剛性联結时，它們就形成一个剛架型的杆系，

它在本身平面中能承受拉伸(压缩)及弯曲，而在垂直于这个平面的方向能承受剪切。因为根据靜力假定，在壳横截面上只可能产生作用在中间面上的法向力和剪力，所以我們應該認為在两个相鄰的單元剛架之間有联系，这种联系把縱向法向力和剪力从一剛架傳給另一剛架。

图 4 中分布在中间面上的許多小杆件就是这种联繫。

在計算模型中，壳的矩形板有如一平面鉸接杆系，它只承受作用在这个体系平面中的力，而完全不抵抗扭轉及离开本身平面的縱向弯曲。

因此，我們可以把壳体看作是一个薄壁空間連續系体。它由无数多的横向受弯單元剛架所組成，并在縱方向具有不受弯矩的構造。至于壳体的板，只在縱方向能够拉伸，它們好像形成为横向單元剛架的連續彈性介質<sup>②</sup>，以抵抗这些剛架的弯曲变形。

这里所研究的棱壳与具有剛性周綫的薄壁杆件不同，前者除了沿母綫的拉伸变形以外，还有为横截面周綫形狀的改变所引起的横向弯曲变形。

假設壳体是由矩形板組成的，并且壳的边緣——縱向的及横向的——用某种方式固定下来，不会发生位移。用 $k$ 代表壳肋及壳板的順序号。我們將認為肋及板的号数是沿着周綫坐标 $S$ 的正讀数方向增大的，并且对位于 $k-1$ 和 $k$ 肋之間的板，采用 $k$ 肋的号数。

現在我們来研究一下作为壳体單元的任意矩形板的应力和变形的問題。

根据前面的假定，我們認為这是一块窄板，其寬度应不大于壳長的 $1/s$ 。

① B. 3. 符拉索夫：多連棱形壳的計算（“应用数学及力学”第十三卷，1944）。

② 原文为Упругая среда，直譯为彈性介質，意即仅在縱方向有拉伸的壳板，相当于橫向單元剛架的彈性支承，此彈性支承主要为板橫截面上的剪力，由此剪力轉而使板中产生縱向拉（压）力——譯者注。

自板中間面上取出一边長为  $dz, ds$  的无限小的单元体  $Mach$  (图5 a), 在单元体的横边  $Mb$  及  $ac$  上將只作用有位于中間面內的法向力及剪力。

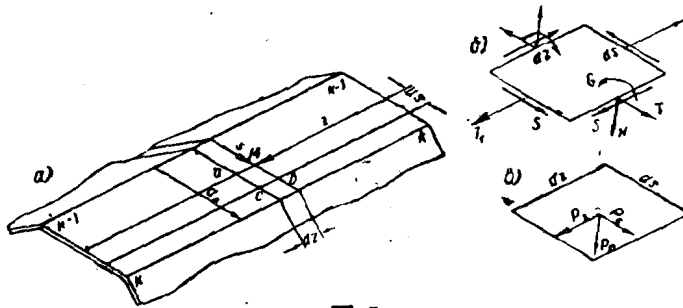


圖 5

在縱边  $Ma$  及  $bc$  上, 除了板边上的法向力及剪力外, 单元体上并受有弯矩及横向力。所有这些力都是对单元体相应各边的单位长度来说的, 如图 5 b 所示。

除了上述沿矩形周边作用的力以外, 并將有已知的外力作用在单元体上。

单位面积上表面荷载的矢量, 我們用三个分量  $P_x, P_y$  及  $P_z$  来表示。其中前两个作用在板的中間面內, 第三个与中間面垂直 (图 5 c)。

板在离开本身平面的弯曲情形下, 其单元体的平衡条件可导出下列的方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial s} + p_z &= 0; \\ \frac{\partial G}{\partial s} - N &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

方程(1.1)的第一式表明, 所有作用在单元体上的力在与板垂直的方向上的投影总和等于零。对于通过  $M$  点并与母綫平行的直綫来说, 这些力的力矩总和等于零。从这个条件就得出了第二式。因此, 方程(1.1)是表示板在横向受弯时的平衡的。

从方程(1.1)中消去横向力  $N$ , 得:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial s^2} + p_z = 0. \quad (1.2)$$

方程(1.2)的一般积分形式如下:

$$G(z, s) = G_{k-1}(z) \frac{d_k - s}{d_k} + G_k(z) \frac{s}{d_k} + G_k^0(z, s). \quad (1.3)$$

式中  $G_{k-1}(z)$  及  $G_k(z)$  各代表板的縱边  $k-1$  及  $k$  单位长度的弯矩, 它們是坐标  $z$  的任意函数。这种弯矩与板平面中任意一点  $M$  的弯矩  $G(z, s)$  一样, 如果它使宽度为  $dz=1$  的横向单元梁底面的纖維产生拉伸, 我們就認为它是正的。字母  $d_k$  代表  $k$  板的宽度,  $s$  代表沿板寬方向的各点的流动坐标; 这个坐标就是由板的  $k-1$  边到  $M$  点的距离。公式(1.3)中, 以  $G_k^0(z, s)$  来代表的最后一項, 是当假設横向单元梁在  $k-1$  及  $k$  綫上为鉸支承时, 由于梁上的横向荷载  $P_z = P_z(z, s)$  所产生的弯矩。函数  $G_k^0(z, s)$  是非齐次方程(1.2)的特別积分, 它在  $s=0$  及  $s=d_k$  时等于零。

公式(1.3)說明, 某  $k$  板的横向弯矩  $G(z, s)$  和梁弯曲理論中的弯矩完全一样。不同的

是板的弯矩被看作是一个函数,这个函数不仅与單元条形截面沿板寬的位置有关,而且也与沿板長的位置有关。

如果該板不承受法向表面荷載( $P_n=0$ ),則公式(1.3)的形式就更簡單:

$$G(z, s) = G_{k-1}(z) \frac{d_k - s}{d_k} + G_k(z) \frac{s}{d_k}. \quad (1.4)$$

由此公式可知,棱壳中,当外力都作用在壳肋上,而且沿肋長按任意規律分布时,横向弯矩  $G(z, s)$  (为坐标  $s$  的函数) 在板寬範圍內按直綫規律变化。弯矩  $G(z, s)$  的图形在周綫的各直綫段上將为一梯形,同时,梯形兩端的縱标就是横向多边形結点的弯矩,結点弯矩与坐标  $z$  有关,而坐标  $z$  决定着横向單元条形  $dz=1$  沿壳長的位置。

設公式(1.3)中为坐标  $z$  的函数的弯矩  $G_{k-1}(z)$  及  $G_k(z)$  为已知,我們就可以求出板中任一点的横向力  $N(z, s)$ 。它可根据(1.1)的第二方程取弯矩  $G(z, s)$  对坐标  $s$  的偏微分来求出。

$$N(z, s) = \frac{1}{d_k} [G_k(z) - G_{k-1}(z)] + N_k^0(z, s). \quad (1.5)$$

式中  $N_k^0(z, s)$  为作用在横向單元單跨梁  $dz=1$  上的外部荷載  $P_n(z, s)$  所产生的横向力。該梁与起始截面  $z=0$  相距  $z=\text{常数}$  的距离,而在  $s=0$  及  $s=d_k$  兩端为铰支座。

根据弯矩  $G_{k-1}(z)$  及  $G_k(z)$  我們也可以求得板的横向弯曲变形。單元梁  $dz=1$  由支座弯矩  $G_{k-1}(z)$ 、 $G_k(z)$  及梁上的横向荷載  $p_n(z, s)$  所产生的支座截面旋轉角的公式为:

$$\left. \begin{aligned} \theta_{k-1}(z) &= \frac{d_k}{6EJ_k} [2G_{k-1}(z) + G_k(z)] + \theta_{k-1}^0(z); \\ \theta_k(z) &= \frac{d_k}{6EJ_k} [G_{k-1}(z) + 2G_k(z)] + \theta_k^0(z). \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

式中  $J_k$  为梁的慣性矩,該梁的截面寬  $dz=1$ ,高度  $\delta_k$  等于  $k$  板板厚:

$$J_k = \frac{1 \times \delta_k^3}{12}; \quad (1.7)$$

$\theta_{k-1}^0(z)$ 、 $\theta_k^0(z)$  为單跨簡支單元梁由位于其上的横向外部荷載  $p_n(z, s)$  所产生的支座截面旋轉角。此角可由已知的材料力学方法求得。

如果截面是沿相应正弯矩  $G_{k-1}(z)$ 、 $G_k(z)$  方向旋轉的(如图6中所示),則由公式(1.6)算出的單元梁支座截面的旋轉角为正。

現在我們来研究一下仅仅在縱方向有伸長变形的矩形窄板的平面应力状态問題。

板在位于其平面以內的力的作用下,其变形状态在一般情形下 取决于中間面各点的位移。

設  $u=u(z, s)$  及  $v=v(z, s)$  各代表任一点  $M$  在坐标  $z$  及  $s$  方向的位移(图7)。

这种位移和法向位移  $w=w(z, s)$  不同,以后我們將称它为縱向及横向的切向位移。

对于板的变形分量,我們可有公式:

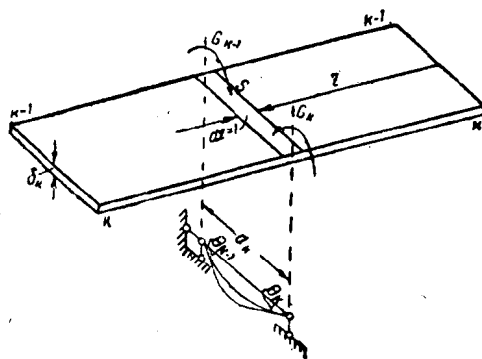


图 6

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial z}; \\ \epsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial s}; \\ r &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial s}. \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

在考虑了以  $ds$  及  $dz$  为边的板单元体  $Macb$  (图 8) 的变形后, 是不难得出这些公式的(图 8)。

公式(1.8)的第一式用于计算板纵向单元  $Ma=dz$  的相对伸长, 该单元的长度在变形后数量上增大了  $\frac{\partial u}{\partial z} dz$ 。第二式是对另一沿板宽方向的线性单元  $Mb=ds$  的伸长变形来说的。最后一个式子用于计算坐标线  $z = \text{常数}$  及  $s = \text{常数}$  之间的夹角的相对改变。此角在变形前为一直角。变形后, 当剪切  $r$  为正时, 变为锐角。 $r$  值在位移很小的情形下, 取等于角  $r_1$  及  $r_2$  的正切和, 角  $r_1$  及  $r_2$  为直角二边  $Ma$  及  $Mb$  变形后在板平面中所旋转的角。

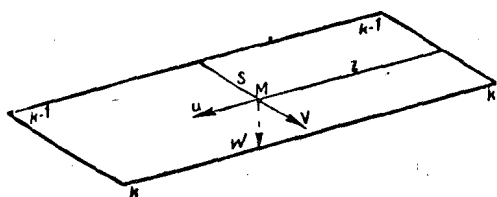


图 7

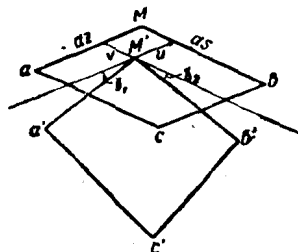


图 8

根据我们所采用的假定, 当壳变形时, 中间面沿横截面周线  $z = \text{常数}$  并不产生拉伸, 而且坐标线  $z = \text{常数}$  与  $s = \text{常数}$  间的直角也没有改变, 所以对于壳的构件——板, 我们应该取:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial s} &= 0; \\ \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

因此, 方程(1.9)表明着基本的几何假定。由此方程我们可以求得  $k$  板位移  $u$  及  $v$  的下列公式:

$$\left. \begin{aligned} v(z, s) &= v_k(z); \\ u(z, s) &= -v'_k(z)s + u_k(z). \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

式中  $u_k(z)$  及  $v_k(z)$  为仅与坐标  $z$  有关的任意函数,  $u_k$  属于  $k$  肋, 而  $v_k$  属于  $k$  板;  $v'_k(z)$  为函数  $v_k(z)$  对坐标  $z$  的导微数。

尾号  $k$  表明该位移属于具有尾号  $k$  的板。

(1.10)的第一式说明, 板上任一点  $M$  的横向切向位移与此点沿板宽上的位置无关。

所有在直綫  $z = \text{常数}$  上各点  $M$  的横向位移皆为同一数值, 且此位移仅由一  $v_k(z)$  值所决定。 $v_k(z)$  代表板在自身平面內弯曲时任意一縱向纖維的撓度。

如果橫截面向  $s$  坐标的增長一側移动 (如图 9 中所示), 則我們認為此撓度是正的。

由 (1.10) 的第二式可知, 沿板寬上的 (坐标  $s$  的函数) 縱向位移  $u(z, s)$  为直綫的規律。任意点  $M$  的縱向位移  $u(z, s)$  为两个数值所組成, 其中包括: (1) 位移  $u_k(z)$  —— 通过已知点  $M$  的整个  $z = \text{常数}$  的截面沿  $z$  軸方向 (沿板長) 的平行移动, 及 (2) 位移  $u'_{k-1}(z)s$  —— 由于整个截面在板中間面上的旋轉角而产生的位移, 这种旋轉角 (因数值很小) 等于板在本身平面內的撓度曲綫的切綫与  $z$  軸傾斜角的正切, 而符号則相反。

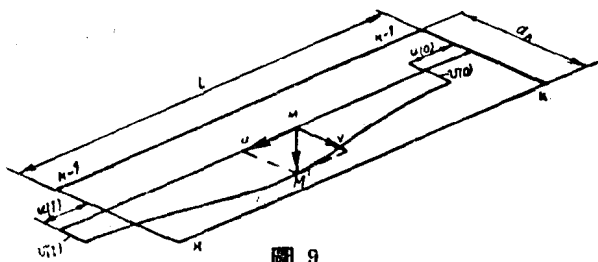


圖 9

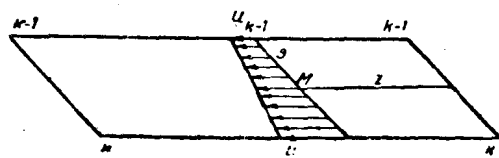


圖 10

而符号則相反。

如果采用板橫截面端点的縱向位移  $u_{k-1}(z)$ ,  $u_k(z)$  作为仅与坐标  $z$  有关的基本函数, 則我們將賦予縱向位移的公式以另外一种形式。

考慮到位移  $u(z, s)$  沿板寬成直綫分布的規律, 可得 (图 10):

$$u(z, s) = u_{k-1}(z) \frac{d_k - s}{d_k} + u_k(z) \frac{s}{d_k}. \quad (1.11)$$

和前面一样, 式中  $d_k$  代表  $k$  板的寬度;  $s$  代表縱向邊緣  $k-1$  至  $M$  点的距离 (图 10)。

根据位移  $u(z, s)$  我們可以得出板沿縱方向的相对伸長。將等式 (1.11) 对  $z$  微分一次, 并將  $u'_{k-1}(z)$ ,  $u'_k(z)$  用板中間面在截面  $z = \text{常数}$  上兩端点  $s=0$ ,  $s=d_k$  的相对縱向伸長  $\epsilon_{k-1}(z)$ ,  $\epsilon_k(z)$  来表示, 得出:

$$\epsilon(z, s) = \epsilon_{k-1}(z) \frac{d_k - s}{d_k} + \epsilon_k(z) \frac{s}{d_k}. \quad (1.12)$$

按照虎克定律由公式 (1.12) 可得出一个簡明的等式:

$$\sigma(z, s) = \sigma_{k-1}(z) \frac{d_k - s}{d_k} + \sigma_k(z) \frac{s}{d_k}, \quad (1.13)$$

式中  $\sigma$  代表縱向应力。

綜合上面的分析可知, 亮的每个矩形板, 在平面应力状态下, 当其横向伸長变形及剪切变形不存在时, 就切綫位移  $u$  及  $v$ , 縱向伸長变形  $\epsilon$  以及縱向法向应力  $\sigma(z, s)$  來說, 可当作一矩形截面梁, 按梁的初等弯曲理論来考虑。板的橫截面在变形前为一平面, 变形后仍为一平面, 且与撓度曲綫  $v(z)$  相垂直。

縱向法向应力  $\sigma(z, s)$  在每个板寬的範圍內沿  $z = \text{常数}$  截面按直綫規律分布。 $k$  板的这种应力只取决于这坐标  $z$  的两个函数, 以后我們取板的縱向邊緣的伸長变形  $\epsilon_{k-1}(z)$

及 $\epsilon_k(z)$ 作为这种函数。根据虎克定律,它与板横截面兩端的法向应力 $\sigma_{k-1}(z)$ 及 $\sigma_k(z)$ 成比例。

設在方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= \epsilon_{k-1}(z) \frac{d_k - s}{d_k} + \epsilon_k(z) \frac{s}{d_k}, \\ \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

中,函数 $\epsilon_{k-1}(z)$ 及 $\epsilon_k(z)$ 为已知,將此方程积分,即得:

$$\left. \begin{aligned} u(z, s) &= \frac{d_k - s}{d_k} \int \epsilon_{k-1}(z) dz + \frac{s}{d_k} \int \epsilon_k(z) dz + \\ &+ \frac{d_k - s}{d_k} u_{k-1}(0) + \frac{s}{d_k} u_k(0); \\ v(z) &= -\frac{1}{d_k} \iint [\epsilon_k(z) - \epsilon_{k-1}(z)] dz^2 - \frac{z}{d_k} [u_k(0) - u_{k-1}(0)] + v_k(0). \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

式中 $u_{k-1}(0)$ 及 $u_k(0)$ 为起始截面 $z=0$ 兩端点 $k-1$ 、 $k$ 的縱向位移, $v_k(0)$ 为板在同一截面中的撓度(参看图9)。

应用公式(1.15),加以將板作为一剛体时板在本身平面內的位移的修正,然后根据已知的縱向边缘变形 $\epsilon_{k-1}(z)$ 、 $\epsilon_k(z)$ ,即可求得板中任一点 $M$ 的縱向位移 $u(z, s)$ 及板中任意截面的撓度 $v(z)$ 。

現在設板的縱向边缘伸长变形 $\epsilon_{k-1}(z)$ 、 $\epsilon_k(z)$ 为已知,我們轉而来求板的內力和外力。对于板横截面兩端的法向应力 $\sigma_{k-1}(z)$ 、 $\sigma_k(z)$ ,有公式:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{k-1}(z) &= E \epsilon_{k-1}(z), \\ \sigma_k(z) &= E \epsilon_k(z). \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

式中 $E$ 为板縱向受拉(压)的彈性模量。

任一点 $M$ 处的应力 $\sigma(z, s)$ 可由(1.16)的比例关系及公式(1.13)求出。

設由板中取出一条形單元 $dz$ ,并在条形的截面 $z = \text{常数}$ 及 $z + dz = \text{常数}$ 上各加以与板的变形状态相应的縱向法向应力(图11)。

因为这些力是 $z$ 的函数,故当它們由 $z = \text{常数}$ 的截面轉到 $z + dz = \text{常数}$ 的截面上时,將有所增加,所以为了保持条形單元的平衡,沿条形單元的 $s=0$ 、 $s=d_k$ 边缘尚需加以板平面內沿縱向边缘作用的外力。以 $S_{k-1}(z)$ 及 $S_k(z)$ 代表这种外力的集度,并假定其方向在沿 $z$ 軸的正方向时为正(如图2a所示),我們就得出它們的公式为:

$$\left. \begin{aligned} S_{k-1}(z) &= \frac{F_k}{6} [2\sigma'_{k-1}(z) + \sigma'_k(z)]; \\ S_k(z) &= -\frac{F_k}{6} [\sigma'_{k-1}(z) + 2\sigma'_k(z)]. \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

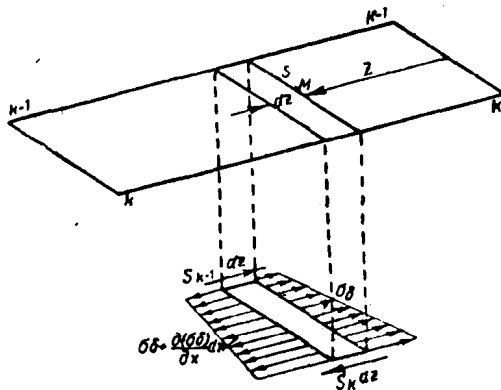


圖 11

式中,  $F_k$  代表板的横截面面积:

$$F_k = d_k \delta_k. \quad (1.18)$$

标以一撇的代表应力的导微数。此应力, 根据公式(1.16)与板的、用  $z$  的函数来表示的已知纵向边缘伸长变形成比例。

这样, 应用公式(1.17)就可以求出外剪力  $S_{k-1}(z)$  及  $S_k(z)$ , 这种剪力应作用在板的纵向边缘上, 以产生已知的伸长变形  $\epsilon_{k-1}(z)$  及  $\epsilon_k(z)$ , 或与它相当的、板边缘纤维的应力  $\sigma_{k-1}(z)$  及  $\sigma_k(z)$ 。

这种力, 即是当板的边缘纤维按任意已知规律随坐标  $z$  的变化而伸长时, 与板变形状态相应的荷载。

任一点  $M$  处剪力  $S(z, s)$  的公式, 可根据沿板宽由坐标  $s$  所划出的条形单元的部分的平衡条件得出, 此公式即为(图12):

$$S(z, s) = \frac{F_k}{6} \left[ \sigma'_{k-1}(z) \left( 2 - \frac{6s}{d_k} + \frac{3s^2}{d_k^2} \right) + \sigma'_k(z) \left( 1 - \frac{3s^2}{d_k^2} \right) \right]. \quad (1.19)$$

由此公式所得出的剪力  $S(z, s)$ , 其正负号规定如下: 假如  $S$  作用于外向法线指向坐标  $s$  增长一侧的横截面面积上, 且  $S$  是沿  $z$  轴方向作用的, 则  $S$  为正。

公式(1.19)表明剪力  $S(z, s)$  在板横截面上按二次抛物线规律分布, 在截面的两端与相应的纵向外力  $S_{k-1}(z)$ 、 $S_k(z)$  相等。

纵向外力  $S_{k-1}(z)$  及  $S_k(z)$  是由公式(1.17)所得出的。

现在我们来计算作用在板横截面上、并且位于板平面内的横截力  $Q_k(z)$ 。我们认为, 如果力  $Q_k(z)$  作用在外向法线指向  $z$  轴方向的截面面积  $z = \text{常数}$  上、而且  $Q$  力方向是指向坐标  $s$  增长的一侧时, 则  $Q$  为正。故有:

$$Q_k(z) = \int_0^{d_k} S(z, s) ds. \quad (1.20)$$

将(1.19)代入式中, 得出:

$$Q_k(z) \equiv 0. \quad (1.21)$$

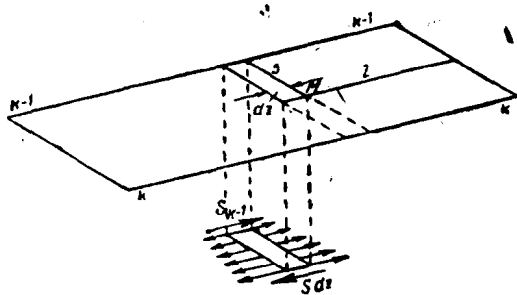


图 12

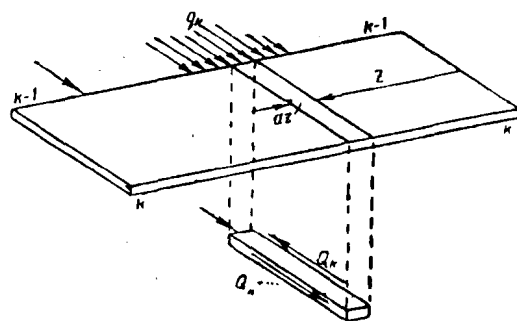


图 13

由此等式可知, 在由公式(1.19)所决定的剪力  $S(z, s)$  的情况下, 作用在板平面内的外部线性横向荷载  $q_k(z)$ , 无论独立变数  $z$  为何值, 将恒等于零。因为此荷载与横向力具有下列静力方程的关系(图13):

$$q_k(z) \equiv -Q'_k(z). \quad (1.22)$$

在我們所考虑的板的平面应力状态的情况下, 剪力  $S(z, s)$ , 在整个  $z = \text{常数}$  的截面上, 在静力方面归结为等于零的横向力。如果在板上作用有沿板長按已知规律分布的綫性横向荷载  $q_k(z)$ , 同时在板的縱向边缘上存在有用  $z$  函数来表示的已知伸長变形  $\epsilon_{k-1}(z)$ 、 $\epsilon_k(z)$ , 則在由公式(1.19)所求得的剪力上, 尚应加以由于横向荷载  $q_k(z)$  所产生的力。我們將得出更一般的公式, 其形式如下:

$$S(z, s) = \frac{E_k}{6} \left[ \sigma'_{k-1}(z) \left( 2 - \frac{6s}{d_k} + \frac{3s^2}{d_k^2} \right) + \sigma'_k(z) \left( 1 - \frac{3s^2}{d_k^2} \right) \right] + \frac{1}{d_k} Q_k(z). \quad (1.23)$$

式中  $Q_k(z)$  为截面  $z = \text{常数}$  上的横向力, 此力与已知外力横向荷载  $q_k(z)$  具有微分方程(1.22)的关系(图13)。

若使公式(1.23)中的  $\sigma_{k-1}(z)$ 、 $\sigma_k(z)$  等于零, 即表明板的縱向边缘具有限制縱向位移  $u_{k-1}(z)$ 、 $u_k(z)$  的連繫, 那么板的条形單元  $dz=1$  將处于純剪切的狀態中。各法向应力  $\sigma$  都等于零, 而剪力  $S$  根据公式

$$S = \frac{Q_k(z)}{d_k} \quad (1.24)$$

沿板寬保持不变。此力乘以板寬  $d_k$  即得出与已知横向荷载  $q_k(z)$  平衡的横向力  $Q_k$ 。

在梁的初等弯曲理論中, 当求横向力时, 一般都应用所謂什維德烈尔—如拉夫斯基的定理, 根据这个定理横向力等于弯矩的导微数。这个定理, 正如我們將要証明的, 并不是經常都适用的。

如果梁的縱向边缘伸長变形等于零, 則各点的法向应力將等于零, 因此, 弯矩也將等于零。然而, 横向力就不一定等于零。如果从(1.19)公式来看, 則由此公式算出来的剪力所产生的横向力  $Q(z)$  恒等于零。但是在  $\sigma_{k-1}(z)$ 、 $\sigma_k(z)$  为任意函数的情形下, 根据(1.13)式所求得的截面  $z = \text{常数}$  上的法向应力  $\sigma(z, s)$ , 除了縱向法向力以外, 还給出了弯矩, 并且这个弯矩的导微数不等于零。

我們在这里所引用的、在某种意义上說是完全相反的兩個例子說明, 在梁受弯曲的情形下, 横向力并不是經常都能作为弯矩的导微数来求得的。其所以与这个通用的定理相違背, 是由于在我們所考虑的問題中, 板不只受到横向荷载的作用, 而且也受到縱向边缘处外剪力作用。

現在簡短的談一下关于剪切变形的假定。我們假定此变形等于零。但是剪力在我們的理論中和在梁的普通弯曲理論中一样, 并不等于零, 并且这种剪力要由平衡方程来求得。

关于剪切变形的虎克定律的形式如下:

$$r = \frac{S}{G d_k}. \quad (1.25)$$

式中  $G$  为剪切彈性模量。

將公式(1.23)的剪力  $S$  代入式中, 即可得出板中任一点的剪切变形  $r$ 。

前面我們已經証明了, 如果板只受到位置在縱向边缘并与边缘伸長变形相应的力  $S_{k-1}(z)$ 、 $S_k(z)$  作用时, 則截面  $z = \text{常数}$  上的横向力  $Q_k(z)$  等于零。以此为根据我們可以十分精確的認為, 对于組成壳的相当窄的板來說, 只有由公式(1.23)的第二項所求得的剪