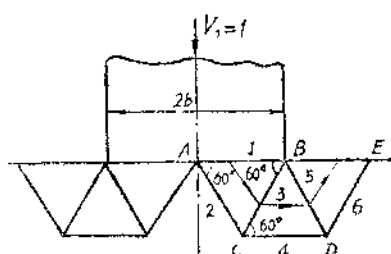


塑性理论的应用

(金属压力加工工序的力学分析)

陈 森 灿 编



清华大学机械工程系

1982.1.

前 言

塑性理论是塑性成形原理的重要部分，也是压力加工专业的主要理论基础。运用塑性理论进行金属压力加工工序的力学分析，既能理论联系实践，而且对生产实践也有着十分重要的意义。

全书内容为：基本理论的概述、塑性平面应变问题和滑移线场理论及其运用、理想刚塑性体的极值定理及其应用、塑性平面应力问题及其运用、在内压力作用下金属管成形、镦粗工序分析、塑性流动规律与自由形变理论。

本书的第二、三章是在徐秉业、陈森灿编著的“塑性理论简明教程”第六、七章基础上扩充形成的。

本书着重介绍发展比较成熟的滑移线场理论与上限法及其应用。

本书是清华大学机械系压力加工专业本科的教材。它可与《张量、应力与应变状态分析》（陈森灿编）及《塑性理论简明教程》（徐秉业、陈森灿编著）配套使用。

本书可供有关专业的大学生或研究生作为教材，也可作为有关教师及工程技术人员的参考书。

作者 1982.1 于清华园

目 录

0344.1/8

第一章 基本理论的概述	1
§1.1 应力状态	1
§1.2 应变状态	7
§1.3 屈服条件 (塑性条件)	10
§1.4 形变理论	13
§1.5 增量理论	17
第二章 塑性平面应变问题和滑移线场理论及其应用	24
§2.1 基本假设和基本方程	24
§2.2 滑移线的一般概念	25
§2.3 Hencky 应力方程	27
§2.4 滑移线的性质	35
§2.5 塑性区的边界条件	39
§2.6 常见的滑移线场	44
§2.7 滑移线场的近似作法	46
§2.8 用滑移线场理论求解塑性极限载荷的例题	49
§2.9 速度场问题	57
§2.10 关于间断解 (不连续解)	61
§2.11 平冲头压入半无限高坯料	66
§2.12 通过矩形模、缩减比 $r = \frac{1}{2}$ 的挤压问题	76
§2.13 楔形模正挤板料	79
§2.14 镦粗的工步分析	88
习题与答案	106
第三章 理想刚塑性体的极值定理及其应用	119
§3.1 基本概念	119
§3.2 虚功原理	120
§3.3 有间断场时的虚功原理	121
§3.4 下限定理	123
§3.5 上限定理	125
§3.6 理想刚塑性体解的唯一性定理	126
§3.7 上限定理在平面应变问题中的应用	127
§3.8 例题	129
§3.9 应变能	139



0659805

a

§3.10 圆盘的锻造	141
§3.11 通过锥形模的挤压和拉丝	149
习题与答案	160
第四章 理想刚塑性平面应力问题及其应用	163
§4.1 平面应力状态方程式	163
§4.2 在 Mises 屈服条件下应力基本方程式	166
§4.3 在 Tresca 屈服条件下应力基本方程式	174
§4.4 在 Mises 屈服条件下速度基本方程式	175
§4.5 塑性力学平面问题的小结	176
§4.6 轴对称平面应变问题和平面应力问题	178
§4.7 压延(拉深、拉延)工序的力学分析	185
第五章 在内压力作用下金属管成形	194
§5.1 圆柱坐标	194
§5.2 轴对称条件下平衡微分方程式	202
§5.3 轴对称条件下平面塑性应变	205
§5.4 广义平面应变条件下完全塑性管	211
§5.5 钢瓶气胀成形	214
§5.6 护环液压胀形强化新工艺	221
第六章 锻粗工序分析	239
§6.1 概述	239
§6.2 用实验方法测定锻粗时接触面上的应力	240
§6.3 圆柱形锻件的锻粗变形	244
§6.4 圆柱体锻粗变形分析	248
§6.5 锻粗力的计算	253
§6.6 在平面变形条件下在平行板间锻粗金属	257
第七章 塑性流动规律与自由形变理论	261
§7.1 锻造变形时金属的塑性流动方向	261
§7.2 自由形变理论	264
参考文献与书目	272

第一章 基本理论的概述

§ 1.1 应力状态

一、一般概念

受力物体处于应力状态下, 作用于物体的外力可分为二类, 即表面应力和体积力(质量力)。表面力作用于该物体的表面、可能是集中载荷也可能是分布载荷, 简称为面力。分布在物体体积内的力, 如重力、磁力或运动物体的惯性力等, 称为体积力(简称体力), 这种力分布在物体的质量上, 与物体的质量成正比。

在考虑应力应变状态时, 将物体视为各向同性的均匀连续体, 连续体(连续介质)的概念是一种数学模型, 假设介质是连续分布在某个区域上。

在外力作用下, 物体内部产生内力, 在单位面积上内力称为应力。受力物体内、任一质点皆处于其余质点的作用下, 故在通过此点的任意平面上, 皆作用有一定大小、一定方向的应力。应力是用来表示内力的强度, 该内力作用于被假想平面截开的物体质点之间。通过物体内一点的各个截面上的应力状况, 通常被简称为物体内一点的应力状态。建立起通过一点的无数不同方向的截面上具有不同应力的表达式, 和研究它们之间的连系, 这就是我们所要研究的一点的应力状态的具体内容。

一点应力状态的研究, 对于解决物体处于弹性阶段或塑性阶段的强度问题或屈服条件问题都是很重要的。特别是在复杂应力状态下强度准则和屈服条件的建立必须依靠有关应力状态的一些基本概念作为基础。

二、平衡方程

平衡方程可表示成

$$\frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + X_i = \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + X_i = 0,$$

其展开式为:

$$\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3} + X_1 = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_3} + X_2 = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3} + X_3 = 0$$

也可表示为

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

式中 X, Y, Z 为单位体积的体积力沿坐标轴的分量。若忽略体积力，则 $X, Y, Z = 0$ ，平衡方程就为

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \tau_{ij,j} = 0$$

三、主应力与应力不变量

$$|\tau_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = -\sigma^3 + I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma + I_3 = 0 \quad (1.1)$$

式中

$$I_1 = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \begin{vmatrix} \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{32} & \tau_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{13} \\ \tau_{31} & \tau_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{vmatrix} \\ &= \tau_{11}\tau_{22} + \tau_{22}\tau_{33} + \tau_{33}\tau_{11} - \tau_{12}^2 - \tau_{23}^2 - \tau_{31}^2 \\ &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{vmatrix} \\ &= \tau_{11}\tau_{22}\tau_{33} + 2\tau_{12}\tau_{23}\tau_{31} - \tau_{11}\tau_{23}^2 - \tau_{22}\tau_{13}^2 - \tau_{33}\tau_{12}^2 \\ &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 \end{aligned}$$

I_1 为应力一次不变量， I_2 为应力二次不变量， I_3 为应力三次不变量。

另一方面，若 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 是方程 (1.1) 的根，它可以写作

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0$$

可见在根与系数之间必须满足如下关系：

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

因为主应力刻画了一点应力的物理状态，它们是不依赖于任何参考坐标系的。因此，方程 (1.1) 和系数 I_1 、 I_2 、 I_3 是对于坐标变换的不变量， I_1 、 I_2 、 I_3 是应力张量的不变量。

四、球形应力张量和应力偏量

1. 在一般直角坐标系下应力张量的分解

由张量的定义，可得出：二个张量之和仍旧是一个张量，在同一坐标系中，二张量相应分量之和就是新张量的分量。

因此，也可以把一个张量分解为二个张量之和，在连续介质力学中常把应力张量分解为二个分张量。下面是在坐标系不变的条件下，即在同一个直角坐标系条件下将应力张量分解为球形张量与应力偏量（应力偏斜张量）。

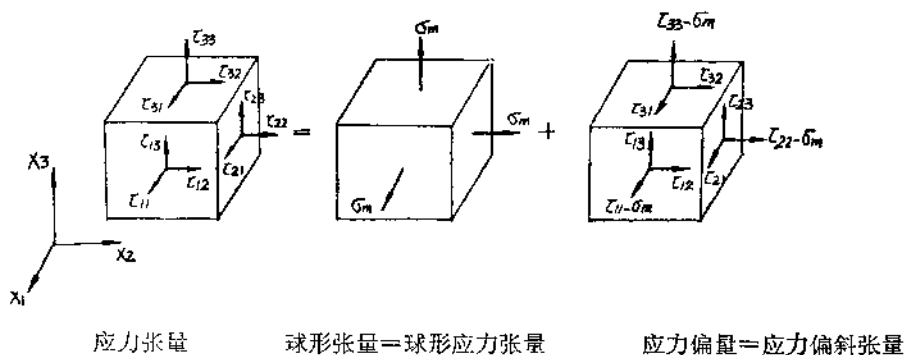


图 1.1

$$(\tau_{ij}) = (\sigma_m \delta_{ij}) + (S_{ij})$$

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} - \sigma_m & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} - \sigma_m & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} - \sigma_m \end{pmatrix}$$

应力张量矩阵

$$= \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix}$$

球形张量矩阵

应力偏量矩阵

式中 $S_{11} = S_{xx} = S_x$, $S_{22} = S_{yy} = S_y$, $S_{33} = S_{zz} = S_z$

$$(S_{ij}) = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_x & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_y & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_z \end{pmatrix}$$

$$(\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{称为单位张量}$$

应力张量矩阵：是三行三列的对称方阵， $\tau_{ij} = \tau_{ji}$

球形张量矩阵：是三行三列的对角线方阵，球形应力张量表示主应力为 σ_m 的球形应力状态

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{1}{3} (\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}) = \frac{1}{3} \tau_{ii} = \frac{1}{3} I_1 \\ &= \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \end{aligned}$$

σ_m 称为平均应力（亦称静水压力）， σ_m 引起物体体积变化。

应力偏量矩阵：是三行三列的对称方阵 $S_{ij} = S_{ji}$ ，对于绝大多数工程材料、体积变化只有弹性部份、没有塑性部分（即弹性变形能改变体积，而塑性变形不引起体积变化）。引起塑性变形的只有应力偏量（ S_{ij} ），它是表征一点的剪切变形的应力分量。

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij} = \sigma_m \delta_{ij} + S_{ij}$$

$\sigma_m \delta_{ij}$ 称为应力球张量，它相当于各向等拉（或等压）的应力状态

容易看出，应力偏量 S_{ij} 的主方向与应力张量 τ_{ij} （ σ_{ij} ）的主方向是一致的。上式的展开式为：

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_m + S_x, & \sigma_y &= \sigma_m + S_y, & \sigma_z &= \sigma_m + S_z \\ \tau_{xy} &= S_{xy}, & \tau_{yz} &= S_{yz}, & \tau_{zx} &= S_{zx} \end{aligned}$$

2. 当坐标轴与主方向重合时应力张量的分解

$$\sigma_i = \sigma_m + S_i \quad i = 1, 2, 3, \quad i \text{ 是自由指标}$$

$$S_i = \sigma_i - \sigma_m$$

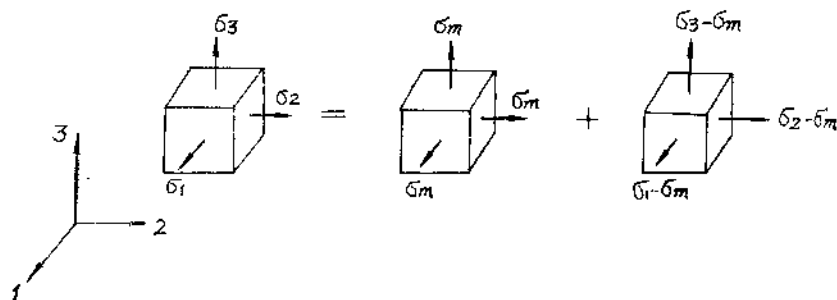


图 1.2

3. 应力偏量不变量

$$\text{应力偏量} \quad S_{ij} = \tau_{ij} - \sigma_m \delta_{ij}$$

S_{ij} 称为应力偏量张量, δ_{ij} 是 Kronecker delta

σ_m 是平均应力

S_{ij} 确定了应力状态偏离平均应力的偏量。

应力偏量张量的第一不变量总是为零:

$$\begin{aligned} I_1' &= S_{11} + S_{22} + S_{33} = S_1 + S_2 + S_3 \\ &= \sigma_1 - \sigma_m + \sigma_2 - \sigma_m + \sigma_3 - \sigma_m = 0 \end{aligned}$$

为确定主应力偏量 S , 可仿求主应力的步骤进行。行列式方程

$$|S_{ij} - S \delta_{ij}| = 0$$

可展开如下:

$$S^3 - I_1' S^2 + I_2' S - I_3' = 0 \quad (1.2)$$

现 $I_1' = 0$, 令 $J_2 = -I_2'$, $J_3 = I_3'$

则 (1.2) 就变成

$$S^3 - J_2 S - J_3 = 0$$

容易证明下列各方程, 把 J_2 , J_3 与应力张量不变量 I_1 , I_2 , I_3 相联系起来:

$$\begin{aligned} J_2 &= -I_2' = -S_1 S_2 - S_2 S_3 - S_3 S_1 \\ &= -(\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_2 - \sigma_m) - (\sigma_2 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m) - (\sigma_3 - \sigma_m)(\sigma_1 - \sigma_m) \\ &= -(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) + 2\sigma_m(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - 3\sigma_m^2 \\ &= -I_2 + 6\sigma_m^2 - 3\sigma_m^2 = 3\sigma_m^2 - I_2 = \frac{I_1^2}{3} - I_2 \\ J_3 &= I_3' = S_1 S_2 S_3 = (\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_2 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m) \\ &= [\sigma_1 \sigma_2 - (\sigma_1 + \sigma_2)\sigma_m + \sigma_m^2](\sigma_3 - \sigma_m) \\ &= I_3 - \sigma_m(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) + \sigma_m^2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - \sigma_m^3 \\ &= I_3 - I_2 \sigma_m + I_1 \sigma_m^2 - \sigma_m^3 \\ &= I_3 - I_2 \sigma_m + 2\sigma_m^3 = I_3 - \frac{I_1 I_2}{3} + \frac{2}{27} I_1^3 \\ &= I_3 + J_2 \sigma_m - \sigma_m^3 = I_3 + \frac{I_1 J_2}{3} - \frac{1}{27} I_1^3 \\ &= \frac{1}{27} \{ (2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)(2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1)(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2' &= S_1 S_2 + S_2 S_3 + S_3 S_1 \\
&= (\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_2 - \sigma_m) + (\sigma_2 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m) + (\sigma_3 - \sigma_m)(\sigma_1 - \sigma_m) \\
&= -\frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \leq 0
\end{aligned}$$

$$I_2' = S_{11}S_{22} + S_{22}S_{33} + S_{33}S_{11} - S_{12}^2 - S_{23}^2 - S_{31}^2$$

而

$$\begin{aligned}
&(S_{11} + S_{22} + S_{33})^2 \\
&= S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2 + 2S_{11}S_{22} + 2S_{22}S_{33} + 2S_{33}S_{11} = 0 \\
I_2' &= -\frac{1}{2}(S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2) - S_{12}^2 - S_{23}^2 - S_{31}^2 \\
&= -\frac{1}{2}S_{ij}S_{ij} \\
&= -\frac{1}{2}[(\tau_{11} - \sigma_m)^2 + (\tau_{22} - \sigma_m)^2 + (\tau_{33} - \sigma_m)^2] - S_{12}^2 - S_{23}^2 - S_{31}^2 \\
&= -\frac{1}{6}[(\tau_{11} - \tau_{22})^2 + (\tau_{22} - \tau_{33})^2 + (\tau_{33} - \tau_{11})^2] - S_{12}^2 - S_{23}^2 - S_{31}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore J_2 &= \frac{1}{2}S_{ij}S_{ij} \\
&= \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \\
&= \frac{1}{6}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore J_2 &= \frac{1}{2}S_{ij}S_{ij} \\
&= \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \\
&= \frac{1}{6}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
&(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \\
&= (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)
\end{aligned}$$

4. 球形应力张量不变量

$$I_1'' = \sigma_m + \sigma_m + \sigma_m = 3\sigma_m = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = I_1$$

$$I_2'' = 3\sigma_m\sigma_m = 3\sigma_m^2 = \frac{I_1^2}{3}$$

$$I_3'' = \sigma_m^3 = \frac{I_1^3}{27}$$

五、八面体应力

当研究塑性应力状态时，应用应力张量不变量可以减少表示应力状态所需的参量，引进八面体应力可以达到同样的目的，同时八面体应剪应力与塑性条件也有关系。八面体应力和应力张量不变量也有着密切的关系。

由八个平面单元构成的八面体单元体，平面单元的法向矢量 ν 与三个主轴方向成等角。

八面体面上的法向应力 σ_8 与剪应力 τ_8 为

$$\sigma_8 = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_m = \frac{1}{3} I_1$$

$$\tau_8 = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} J_2$$

八面体面又称等倾面，是当以主轴作坐标系时，在点的邻区取和三个主轴成相等角度的斜面。在八面体上垂直应力相当于静水压力状态，而静水压力却不能使材料由弹性状态进入塑性状态，而八面体面上剪应力 τ_8 却与塑性条件有直接关系。

§ 1.2 应变状态

一、一点的应变状态

连续介质中一点的应变状态可由下列应变张量来表示

$$(e_{ij}) = \begin{pmatrix} e_x & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_y & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & e_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & e_z \end{pmatrix}$$

式中 e_x 、 e_y 、 e_z 分别为 x 、 y 、 z 方向的线应变； $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$ ， $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$ ， $\gamma_{zx} = \gamma_{xz}$ 分别为对应于 $x-y$ 、 $y-z$ 、 $z-x$ 轴的剪应变（或称角应变），显然 (e_{ij}) 是对称张量。

如果介质的变形是微小的，则应变分量与位移分量之间有下列关系：

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

式中 u 、 v 、 w 分别为 x 、 y 、 z 方向的位移分量，如果采用张量符号，上式可写成

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

二、主应变与应变不变量：

ε_{ij} 是二阶对称张量，其应变不变量为

$$I_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$I_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1$$

$$= \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)$$

$$I_3 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix}$$

与应力不变量相似， I_1 、 I_2 、 I_3 的大小与坐标系的选择无关，它们分别称为第一、第二、第三应变不变量。

与应力张量相似，应变张量也可分解为两部分，即

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

应变张量

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{pmatrix}}_{\text{应变球张量}} + \underbrace{\begin{pmatrix} e_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & e_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & e_z \end{pmatrix}}_{\text{应变偏张量}}$$

即

$$e_{ij} = e_{ij} + e_m \delta_{ij}$$

$$\varepsilon_m = \frac{1}{3} \varepsilon_{vv} = \frac{1}{3} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \text{ 是平均正应变}$$

e_{ij} 为应变偏量

应变球张量 ($e_m \delta_{ij}$) 相当于各向均匀拉伸 (或均匀压缩) 的应变状态。

应变偏张量的主分量可由下列三次方程求得:

$$e^3 - I'_1 e^2 + I'_2 e - I'_3 = 0$$

式中

$$I'_1 = e_1 + e_2 + e_3 = e_x + e_y + e_z = 0$$

$$I'_2 = e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1$$

$$= e_x e_y + e_y e_z + e_z e_x - \frac{1}{4} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)$$

$$= -\frac{1}{6} [(e_1 - e_2)^2 + (e_2 - e_3)^2 + (e_3 - e_1)^2]$$

$$= -\frac{1}{6} [(e_x - e_y)^2 + (e_y - e_z)^2 + (e_z - e_x)^2]$$

$$+ \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)]$$

$$I'_3 = e_1 e_2 e_3 = \begin{vmatrix} e_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & e_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & e_z \end{vmatrix}$$

亦可写成:

$$J_1 = I'_1 = 0$$

$$J_2 = -I_2' = \frac{1}{6}[(e_1 - e_2)^2 + (e_2 - e_3)^2 + (e_3 - e_1)^2] \geq 0$$

$$J_3 = I_3'$$

J_1 、 J_2 、 J_3 分别称为应变偏量不变量

剪应变的极值称为主剪应变，其值为

$$\gamma_3 = e_1 - e_2, \quad \gamma_1 = e_2 - e_3, \quad \gamma_2 = e_3 - e_1$$

八面体面素（其法线与三个应变主方向具有相等的夹角）的剪应变称为八面体剪应变 γ_8 ，其几何意义是：八面体剪应力 τ_8 的指向与八面体面素的法线方向所交直角的改变量。其值为

$$\begin{aligned} \gamma_8 &= \frac{2}{3} \sqrt{(\bar{e}_x - \bar{e}_y)^2 + (\bar{e}_y - \bar{e}_z)^2 + (\bar{e}_z - \bar{e}_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)} \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{(e_x - e_y)^2 + (e_y - e_z)^2 + (e_z - e_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)} \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{(e_1 - e_2)^2 + (e_2 - e_3)^2 + (e_3 - e_1)^2} \end{aligned}$$

$$\gamma_8 \text{ 与 } J_2 \text{ 之间有下列简单关系: } \quad \frac{\gamma_8}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}} J_2$$

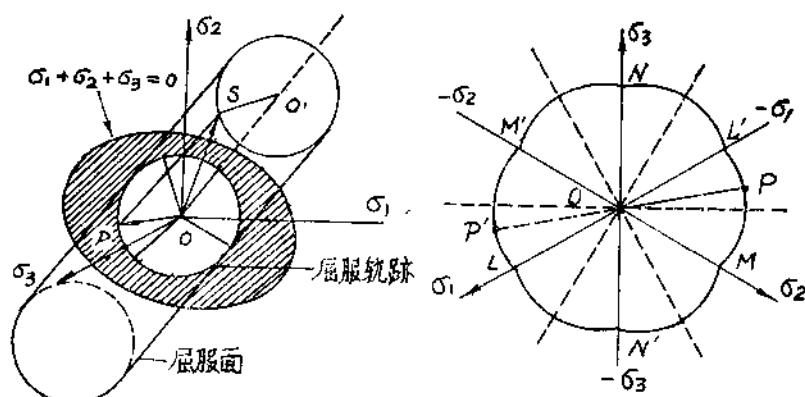
§ 1.3 屈服条件

在物体内一定点出现塑性变形时，其所受应力必须满足的条件，称为屈服条件（或塑性条件）。

关于材料进入塑性状态的原因有不同的假设，第一个假设曾由 Galileo 在 17 世纪时提出，他认为材料进入塑性是由最大主应力引起的，即当最大主应力达到 σ_s 时，材料即进入塑性状态。这个假定已被实验所推翻，因为在各向相等压缩时，压应力可以远远超过屈服极限 σ_s ，而材料并未进入塑性状态，也未破坏。第二个假设曾由 St-Venant 提出过，他认为最大的主应变能使材料进入塑性状态，这个假设同前面一样也被实验否定。此外还有 Beltrami 的假定，他认为：当最大弹性能达到一定值时，材料即开始屈服，这个假设也与实验结果相抵触，因而我们今后也不能用它。

1864 年，Tresca 作了一系列的挤压实验来研究屈服条件，发现从金属变形上来看，可以看到有很细的痕迹，而这些痕纹的方向很接近于最大剪应力的方向，因此塑性变形可以是由剪切应力所引起的晶体纲格的滑移而引起的。这些痕纹称为滑移线。Tresca 认为当最大剪切应力 $\tau_{\max}$ 获得某一极限值时，材料即进入塑性状态，这个条件可写为下式：

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (1.3)$$



(a) 屈服面和屈服轨迹

(b) 各向同性材料屈服轨迹的一般形状

图 1.3

在空间应力状态时应写为:

$$\left. \begin{aligned} |\sigma_2 - \sigma_3| &\leq 2k \\ |\sigma_3 - \sigma_1| &\leq 2k \\ |\sigma_1 - \sigma_2| &\leq 2k \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

(1.4) 式并不要求 (1.3) 式中的不等式必须成立。在 (1.4) 式中如果三式皆为不等式, 则材料即处于弹性状态。如果有一个式子为等号时, 则材料即进入塑性状态。由于 $2k > 0$, 所以三个式子不能同时为等号。在 (1.4) 式中, 我们注意到这个条件与静水压力无关, 因为如果把静水压力状态代入 (1.4) 式时便可以相应地消去。其次这个条件的表达式是 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 的对称函数, 因为它们之间可以互相调换。此外, 我们在 (1.3) 式及 (1.4) 式中看到中间应力并不影响屈服。

最大剪应力屈服条件的几何表示是一个垂直于 $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ 平面的正六角柱体面 (图 1.4), 而屈服面在 $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ 平面上的轨迹是一个正六边形 (图 1.4b)。屈服面在 $\sigma_3 = 0$ 平面上的轨迹则是一个六角形 (图 1.5)。因为当 $\sigma_3 = 0$ 时, (1.4)

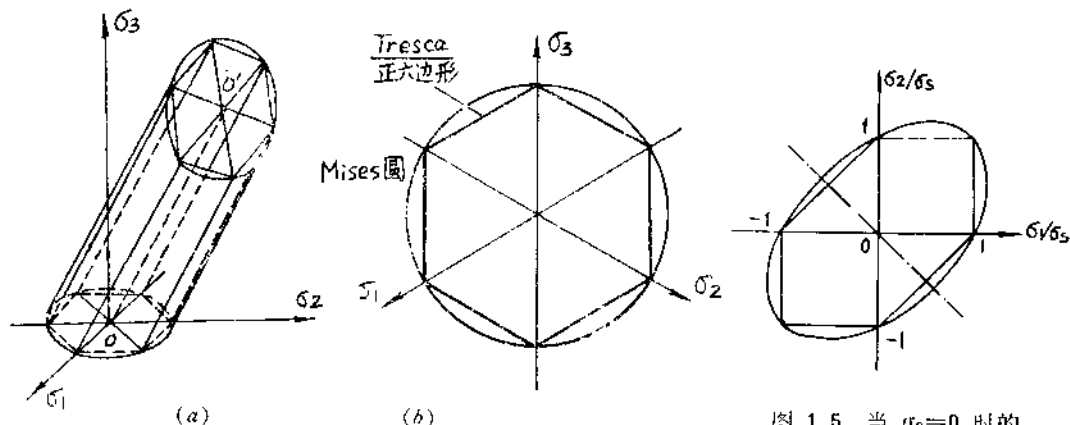


图 1.4 在正应力空间中的 Mises 和 Tresca 屈服条件

图 1.5 当 $\sigma_3 = 0$ 时的 Mises 和 Tresca 屈服条件

$$\text{式将为} \quad |\sigma_2| \leq 2k, \quad |\sigma_1| \leq 2k, \quad |\sigma_1 - \sigma_2| \leq 2k$$

最大剪应力假设由于与实验结果较符合，因而一般是被接受的。但是在使用这个条件时，主应力的次序应该知道，因为这时才能求出最大剪切应力 $\tau_{\max}$ 来。但是一般说来主应力的次序是未知的，而且其次序可能由于加载而改变，而使用一般的公式又是很困难的。然而在某些简单问题中，如轴对称问题时，主应力的次序是事先知道的，这时使用 Tresca 条件是很方便的，因为它在数学上是个非常简单的表达式。

1913 年，Mises 曾指出，在 $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ 的平面上 Tresca 六边形的六个顶点是由实验得到的，但是连接这六个点的直线却是假设的。这种假设是否合理尚需证明。他认为，如果用·一个圆来连接这六个点可能更合理，而且又可以避免由于曲线不光滑而产生数学上的困难。他认为 Tresca 条件是个准确的条件而他的条件却是个近似的条件。Mises 条件是一个垂直于 $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ 平面的圆柱体，在 $\sigma_3 = 0$ 平面上则是一个椭圆。

Mises 条件可用下列方程式表示：

$$\left. \begin{aligned} &(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 6B^2 \\ \text{或 } &(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = 6B^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

如果 $(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 < 6B^2$ ，则材料仍处于弹性状态，如果满足 (1.5) 式时，则材料即进入塑性状态。由此式看出静水压力状态并不影响材料屈服，而且满足互换原则，因此与实验相符。虽然 Mises 在提出这个条件时，并未认为它是准确的，但实验证明，对于韧性金属材料这个条件则更接近实际。因而 Hencky 于 1924 年对这个条件又进行了解释。他认为 Mises 方程相当于弹性形变能量等于常数的情况。由于静水压力不能使材料进入塑性状态，所以当变形能达到某一极限值时，材料即将进入塑性状态。现用 W 、 W_s 、 W_v 分别代表弹性总能量，弹性形变能量及弹性体积变形能量。在弹性区域内 W 、 W_s 、 W_v 将为

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) \\ &= \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)] \\ W_v &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \\ &= \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \end{aligned}$$

弹性形变能量等于总能量减去体积变形能量，即

$$W_s = W - W_v = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)]$$

$$- \frac{1-2\nu}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2]$$

$$= \frac{1}{12G} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

Hencky 认为, 当 W_s 达到一定值时, 材料即开始屈服, 这与 Mises 条件是相同的。Nadai 于 1937 年对 Mises 方程作了另一个解释, 他认为当正八面体上剪切应力的

即
$$\tau_s = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

为某一常数时, 材料即开始进入塑性状态。这个方程式也与 Mises 方程相同。此后 A. A. Ильюшин 认为当应力强度 σ_i 等于单向拉伸的屈服极限 σ_s 时, 即

$$\sigma_i = \sigma_s$$

材料便进入塑性状态。Ильюшин 把复杂的应力状态的应力强度与单向拉伸的屈服极限 σ_s 联系起来, 对于建立小弹塑性变形理论, 具有重要意义。

§ 1.4 形变理论

形变理论是塑性力学中物理关系比较简单的一种。这个理论和弹性力学分析问题的方法是一致的, 即要以变形的全量作为基础, 因此确定物理方程时, 就需要保持弹性力学物理方程中的一些特点。为了建立塑性力学中全量理论的物理方程, 需要采用如下几个假定:

- 1) 应力主方向与应变主方向是重合的, 即应力 Mohr 圆与应变 Mohr 圆相似, 应力 Lode 参数 μ_σ 和应变 Lode 参数 μ_ϵ 相等, 而且在整个加载过程中主方向保持不变。
- 2) 平均应力与平均应变成比例。
- 3) 应力偏量分量与应变偏量分量成比例。
- 4) 应力强度是应变强度的函数, 而这个函数对每个具体材料都应通过实验来确定。即

$$\sigma_i = E' \epsilon_i$$

这里的 E' 不仅与材料有关, 而且也 and 塑性变形程度有关。

很容易将上述几点假设与广义 Hooke 定律做一个比较, 这里只有第四点与弹性力学不同, 而 Hooke 定律是这里的一种特殊情况。因此我们可以把形变理论作为比弹性理论更为一般的理论。

应力主方向与应变主方向重合, 可以通过最大剪应力与最大剪应变的方向一致得到证明。Lode 试验证明 $\mu_\sigma = \mu_\epsilon$, 即 $\omega_\sigma = \omega_\epsilon$, 但有一定误差, 因此这条假定具有近似性质。Bridgman 研究了金属各向受相等压力时体积变化的情况。他的试验结果与第二条假设是符合的。