泛函分析
在数学物理中的应用

С. Л. 索伯列夫

科学出版社

汎函分析在數學物理中的應用

С. Л. 索伯列夫 著

王柔懷 童勤謨 陳詩華等譯

科 學 出 版 社

1 9 5 9

С. Л. СОБОЛЕВ
НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ
1950

內容簡介

這本書是索伯列夫 (С. Л. Соболев) 院士的名著。他第一個用廣義函數與廣義導數的概念，並利用泛函分析的方法，解決了許多數理方程中的問題。書中對每一個概念都有所交待，所以，讀者只要具備實變函數、重積分、偏微分方程及變分法方面的基礎知識，即可讀懂本書而無困難。

汎函分析在數學物理中的應用

С. Л. 索伯列夫 著
王柔懷 童勤謨 陳詩華等譯

*

科學出版社出版（北京朝陽門大街117號）
北京市書刊出版業營業許可證出字第061號
商務印書館上海印刷廠印刷 新華書店總經售

*

1959年1月第一版　書號：1686 字數：200,000
1959年4月第一次印刷　開本：850×1168 1/32
(滬) 0001--6,050　印張：7 5/8

定價：(10) 1.40元

作者的話

本書是作者在列寧格勒榮膺列寧勳章的國立日丹諾夫大學教過的講義經過修改而成的． 講義是由 X. Л. 斯摩里茨基（Смолицкий）與 И. А. 雅可夫列夫(Яковлев)所記錄的，且經過他們的整理和修改；他們並對講義的內容作了一系列有價值的更動和補充．此外，在出版這部講義的過程中，作者自已也作了一系列的補充．

這樣就產生了這部用統一的觀點來講述偏微分方程理論中一系列問題的著作．書中討論了變分方法對拉氏方程與多重調和方程的應用以及關於綫性和準綫性雙曲型方程的柯西問題．在闡述數學物理問題之前，我們詳細地討論了泛函分析的一些新結果和新方法，這些新結果和新方法將是以後的基礎． 第一章專門討論這些內容．以上所述的這些材料和問題的特殊提法以及研究它們的方法在一般的數學物理教程特別是我的"數學物理方程"教程中是沒有的．本書是為研究生與科學工作者而寫的．

作者謹向 X. Л. 斯摩里茨基與 И. А. 雅可夫列夫致以熱忱的感謝，沒有他們的幫助，也許這部書就不可能在這樣短促的時間內寫出來．

С. Л. 索伯列夫

目　　錄

第一章　汎函分析中的特殊問題

第二章 數學物理中的變分方法

第三章　雙曲型偏微分方程理論

第一章　汎函分析中的特殊問題

§1. 引　　論

在闡述本書所講的所有問題時，常常要引用在勒貝格意義下的可積函數的某些簡單性質以及汎函分析中的某些簡單概念與定理，這些概念與定理已經是大家所熟知的．因此，我們不詳述它們的證明，而僅僅列出定理的必要的陳述與定義．

欲了解下面的一切敍述，只須熟悉實變函數多重積分的理論，例如，相當於"數學物理方程"[1] 第六講或者斯米爾諾夫 (В. И. Смирнов) 的"高等數學教程"(第五卷中所講即可)．

現在我們講多重積分與可和函數的某些性質．

1. 可和函數　對於任何一個在有界區域 Ω 內的 n 變量函數 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，都可以找出這樣的閉集 F，使得函數在 F 上是連續的．

所謂正值函數 f 的內積分，即爲上確界

$$(\text{вн})\int_\Omega f dx_1 \cdots dx_n = \sup_{F\subset\Omega} \int_F f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n. \quad (1.1)$$

如果正值函數 f 的內積分存在，而且有如次的性質：

$$(\text{вн})\int_\Omega (f+1) dx_1 \cdots dx_n = $$
$$= (\text{вн})\int_\Omega f dx_1 \cdots dx_n + (\text{вн})\int_\Omega 1 \cdot dx_1 \cdots dx_n, \quad (1.2)$$

則稱函數 f 爲可和的，積分 $(\text{вн})\int_\Omega f dx_1 \cdots dx_n$ 簡寫爲

$$\int_\Omega f dx_1 \cdots dx_n, \quad (1.3)$$

並且叫做在勒貝格意義下的積分．

設 f 爲兼有正負值的函數．如果

1) С. Л. Соболев, Уравнения математической физики, М.—Л., 1947.

$$f^+ = \frac{1}{2}\{f + |f|\},\ f^- = \frac{1}{2}\{|f| - f\} \tag{1.4}$$

都是可和函數，則稱 f 爲可和的，此時函數 f 的積分由如次的公式定義：

$$\int_\Omega f dx_1\cdots dx_n = \int_\Omega f^+ dx_1\cdots dx_n - \int_\Omega f^- dx_1\cdots dx_n. \tag{1.5}$$

集合 E 的勒貝格測度，便是積分

$$mE = \int_\Omega \varphi_E dx_1\cdots dx_n, \tag{1.6}$$

其中 φ_E 在 E 的點處等於 1，而在餘集 $(\Omega - E)$ 的點處等於 0。

函數 f 在區域 Ω 內叫做可測的，如果 f 在閉集 $F \subset \Omega$ 上連續且 F 的測度可以任意接近於 Ω 的測度。

任何可和函數都是可測的。

勒貝格積分也有平常積分所有的基本性質。以後我們將 $dx_1\cdots dx_n$ 簡寫爲 dv：

$$\left.\begin{aligned} &\int_\Omega (f_1 + f_2) dv = \int_\Omega f_1 dv + \int_\Omega f_2 dv, \\ &\int_\Omega af dv = a\int_\Omega f dv\ (a = \text{常數}). \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

倘若 $f_1 + f_2 + \cdots + f_k + \cdots = f_0$ 一致收斂，那麼

$$\int_\Omega (f_1 + f_2 + \cdots + f_k + \cdots) dv =$$

$$= \int_\Omega f_1 dv + \int_\Omega f_2 dv + \cdots + \int_\Omega f_k dv + \cdots. \tag{1.8}$$

此外，公式(1.8)在如次的條件下也成立：假設對於任何 N 而言，都有 $|f_1 + f_2 + \cdots + f_N| \leqslant \Psi$，而 Ψ 是可和函數。

如果 $f \geqslant 0$ 且 $\int_\Omega f dv = 0$，那麼 $f \neq 0$ 的點的集合便有測度 0 $(m\{f \neq 0\} = 0)$。

如果 $\int_\Omega |f_1 - f_2| d\Omega = 0$，則二函數 f_1, f_2 是對等的。

倘若 $\int_\Omega f\psi dv = 0$，其中 ψ 是在 Ω 內連續且有連續導數的任何函數，那麼 f 便對等於零。

設 $k < f < K$, 則

$$k \cdot m\Omega < \int_\Omega f dv < K \cdot m\Omega. \qquad (1.9)$$

勒貝格積分是絕對連續的, 換句話說, 任給一數 $\varepsilon > 0$, 對於在 Ω 內可和的任何函數 f, 總可以找到這樣的 $\delta(\varepsilon) > 0$, 使得對於任何集 $E \subset \Omega$ 上的積分都滿足條件 $\int_E |f| dv < \varepsilon$, 只要 $mE < \delta(\varepsilon)$.

茲證兩個重要的基本的不等式.

2. 荷爾德(Hölder)和閔可夫斯基(Minkowski)不等式 設 $p > 1$, 則當 $p' = \frac{p}{p-1}$ 時, 即有

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \; p' - 1 = \frac{1}{p-1}. \qquad (1.10)$$

考慮曲綫 $y = x^{p-1}$ (圖 1). 在此曲綫上,

$$x = y^{\frac{1}{p-1}} = y^{p'-1}.$$

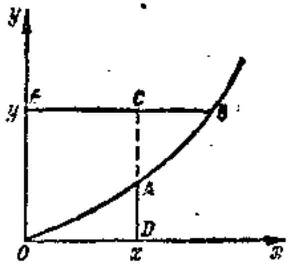

圖 1

設 x, y 為任意兩個正數. 如圖引直綫 AD (x = 常數) 與 EC (y = 常數), 使它與曲綫相交. 此時我們可以看到, 不論 x, y 如何選擇, 圖形 OEB 與 OAD 的面積之和總大於矩形 $OECD$ 的面積. 換言之,

$$\int_0^x x^{p-1} dx + \int_0^y y^{p'-1} dy \geqslant xy, \qquad (1.11)$$

也就是

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'} \geqslant xy. \qquad (1.12)$$

此時等號僅在 $y = x^{p-1} = x^{\frac{1}{p'-1}}$ 或 $x^p = y^{p'}$ 時成立.

設 $\vec{Q}$ 為 n 維空間中的區域 Ω 的點, 而 $P(\vec{Q}) > 0$ 是 Ω 內的某個有界函數; 又設 $x(\vec{Q})$ 與 $y(\vec{Q})$ 為 Ω 內的兩個正值函數, 並且滿足下列條件:

$$\int_\Omega |x(\vec{Q})|^p P(\vec{Q}) dv = 1, \; \int_\Omega |y(\vec{Q})|^{p'} P(\vec{Q}) dv = 1. \qquad (1.13)$$

此時將(1.12)乘以 $P(\vec{Q})$，再沿 Ω 上求積分，並利用(1.10)，則得

$$\int_\Omega x(\vec{Q})y(\vec{Q})P(\vec{Q})dv \leqslant 1. \tag{1.14}$$

現在假設 $X(\vec{Q})$，$Y(\vec{Q})$ 是 Ω 中兩個任意函數，它們分別是 p 次方與 p' 次方可和的，那麼對於下列函數

$$x(\vec{Q}) = \frac{|X(\vec{Q})|}{\left[\int_\Omega |X|^p P dv\right]^{\frac{1}{p}}} \text{ 與 } y(\vec{Q}) = \frac{|Y(\vec{Q})|}{\left[\int_\Omega |Y|^{p'} P dv\right]^{\frac{1}{p'}}},$$

等式(1.13)成立，從而不等式(1.14)也成立；此式化簡以後可以寫成

$$\int_\Omega |X(\vec{Q})|\cdot|Y(\vec{Q})|\cdot P(\vec{Q})dv \leqslant \left[\int_\Omega |X|^p P dv\right]^{\frac{1}{p}} \times$$
$$\times\left[\int_\Omega |Y|^{p'} P dv\right]^{\frac{1}{p'}},$$

由此即得荷爾德不等式如下：

$$\left|\int_\Omega X(\vec{Q})Y(\vec{Q})P(\vec{Q})dv\right| \leqslant \left[\int_\Omega |X|^p P dv\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_\Omega |Y|^{p'} P dv\right]^{\frac{1}{p'}}. \tag{1.15}$$

(1.14)中等號成立的條件顯然是：對於幾乎一切值 $\vec{Q}$，等式 $x^p = y^{p'}$ 都成立．因此，欲使(1.15)中的等號成立，只有當

$$\frac{|X|^p}{\int_\Omega |X|^p P dv} = \frac{|Y|^{p'}}{\int_\Omega |Y|^{p'} P dv}, \quad \operatorname{sign} XY = \text{常數}$$

幾乎處處成立時才行，也就是說，當函數 $|X|^p$ 與 $|Y|^{p'}$ 幾乎處處只差一個常數因子，而 X, Y 幾乎處處同號或異號時才行．

由(1.15)可以推出關於若干個函數的一般荷爾德不等式．

設 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k=1$，$\lambda_j>0$，並設函數 φ_j $(j=1,2,\cdots,k)$ 的絕對值的 $\frac{1}{\lambda_j}$ 次冪可積，也就是說，

$$\int_\Omega |\varphi_j|^{\frac{1}{\lambda_j}} P dv < \infty.$$

此時乘積 $\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_k$ 便是可和的，而且不等式

$$\left|\int_\Omega \varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_k P dv\right| \leqslant \left[\int_\Omega |\varphi_1|^{\frac{1}{\lambda_1}} P dv\right]^{\lambda_1} \times$$
$$\times \left[\int_\Omega |\varphi_2|^{\frac{1}{\lambda_2}} P dv\right]^{\lambda_2} \cdots \left[\int_\Omega |\varphi_k|^{\frac{1}{\lambda_k}} P dv\right]^{\lambda_k} \qquad \textbf{(1.16)}$$

成立，其中等號只有在如次的條件下成立：各個 $|\varphi_j|^{\frac{1}{\lambda_j}}$ 彼此只差常數因子（也就是說，$|\varphi_j|^{\frac{1}{\lambda_j}} = c_j\psi$）和 $\operatorname{sign}[\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_k] =$ 常數這兩個條件都幾乎處處成立，至多在測度爲零的點集上例外。

現在我們用由 k 推到 $k+1$ 的方法來證明這個不等式。

設 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_k, \varphi_{k+1}$ 均爲正，並設已經證明不等式(1.16)對於 k 個函數是成立的，則當 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k+\lambda_{k+1}=1$ 時，令

$$p = \frac{1}{\lambda_{k+1}},\ p' = \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k},$$

即有

$$\left|\int_\Omega \varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_k\varphi_{k+1} P dv\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left[\int_\Omega [\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_k]^{\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k}} P dv\right]^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k} \times$$
$$\times \left[\int_\Omega [\varphi_{k+1}]^{\frac{1}{\lambda_{k+1}}} P dv\right]^{\lambda_{k+1}}. \qquad \textbf{(1.17)}$$

但由歸納法的假設可知，不等式(1.16)對於 k 個函數成立，所以

$$\int_\Omega \varphi_1^{\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k}} \varphi_2^{\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k}} \cdots \varphi_k^{\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k}} P dv \leqslant$$
$$\leqslant \left[\int_\Omega \left(\varphi_1^{\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k}}\right)^{\frac{\lambda_1+\cdots+\lambda_k}{\lambda_1}} P dv\right]^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\cdots+\lambda_k}} \cdots \times$$
$$\times \cdots \left[\int_\Omega \left(\varphi_k^{\frac{1}{\lambda_1+\cdots+\lambda_k}}\right)^{\frac{\lambda_1+\cdots+\lambda_k}{\lambda_k}} P dv\right]^{\frac{\lambda_k}{\lambda_1+\cdots+\lambda_k}}. \qquad \textbf{(1.18)}$$

將此式代入(1.17)，便得到關於 $k+1$ 個函數的不等式(1.16)。這個不等式當 $k=2$ 時是成立的，這在(1.15)中已經證明。所以荷爾德不等式對於任何 k 都成立。

順次利用以前所得的結果，便可以驗證，當所有函數

$$|\varphi_1|^{\frac{1}{\lambda_1}},\ |\varphi_2|^{\frac{1}{\lambda_2}},\ \cdots,\ |\varphi_k|^{\frac{1}{\lambda_k}}$$

都只差一個常數因子時（至多在測度為零的點集上例外），等號才能成立。

如果 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_k$ 當中的每個函數都只取有限個值，那麼積分便可用和來代替，而得

$$\sum_{i=1}^{N} a_1^{(i)} a_2^{(i)} \cdots a_k^{(i)} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{N} (a_1^{(i)})^{\frac{1}{\lambda_1}}\right]^{\lambda_1} \times$$

$$\times \left[\sum_{i=1}^{N} (a_2^{(i)})^{\frac{1}{\lambda_2}}\right]^{\lambda_2} \cdots \left[\sum_{i=1}^{N} (a_k^{(i)})^{\frac{1}{\lambda_k}}\right]^{\lambda_k}. \tag{1.19}$$

這個不等式也叫做荷爾德不等式．當 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{1}{2}$ 時，由 (1.19) 可以得到一個有用的不等式如下：

$$\left[\sum_{i=1}^{N} a^{(i)}\right] = \left[\sum_{i=1}^{N} 1 \cdot a^{(i)}\right] \leqslant \left(\sum_{i=1}^{N} 1\right)^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=1}^{N} (a^{(i)})^2\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{N} \left[\sum_{i=1}^{N} (a^{(i)})^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{1.20}$$

假設在 Ω 內 $x(\vec{Q}) \geqslant 0$, $y(\vec{Q}) \geqslant 0$．我們考慮

$$\int_\Omega (x+y)^p P dv = \int_\Omega x(x+y)^{p-1} P dv + \int_\Omega y(x+y)^{p-1} P dv.$$

將荷爾德不等式應用於右邊每一項，則得

$$\int_\Omega (x+y)^p P dv \leqslant \left[\int_\Omega x^p P dv\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_\Omega (x+y)^{(p-1)p'} P dv\right]^{\frac{1}{p'}} +$$

$$+ \left[\int_\Omega y^p P dv\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_\Omega (x+y)^{(p-1)p'} P dv\right]^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= \left[\int_\Omega (x+y)^p P dv\right]^{\frac{p-1}{p}} \left\{\left[\int_\Omega x^p P dv\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_\Omega y^p P dv\right]^{\frac{1}{p}}\right\}.$$

約去右邊的第一個因子，則得閔可夫斯基不等式如下：

$$\left[\int_\Omega (x+y)^p P dv\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left[\int_\Omega x^p P dv\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_\Omega y^p P dv\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{1.21}$$

不等式 (1.21) 顯然也可以推廣到若干個在 Ω 內兼有正負值的函數之和．此時所得的閔可夫斯基不等式為

$$\left[\int_{\Omega}|x_1+\cdots+x_k|^p P dv\right]^{\frac{1}{p}} \le \left[\int_{\Omega}|x_1|^p P dv\right]^{\frac{1}{p}} + \cdots +$$
$$+\left[\int_{\Omega}|x_k|^p P dv\right]^{\frac{1}{p}}. \qquad (1.22)$$

式中的等號，只有當函數 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 成比例時才能成立。

如果函數 x 和 y 都只取有限個值，則積分便可用和來代替，而我們就得到了數字級數的閔可夫斯基不等式。由(1.21)可得

$$\left[\sum a_i|x_i+y_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \le \left[\sum a_i|x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum a_i|y_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}; \quad (1.23)$$

或者有若干個數字級數時，便得

$$\left[\sum_i a_i\left|\sum_j x_{ij}\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} \le \sum_j\left[\sum_i a_i|x_{ij}|^p\right]^{\frac{1}{p}}. \qquad (1.24)$$

3. 荷爾德和閔可夫斯基逆不等式 設 $0<p<1$，則 $p'=\frac{p}{p-1}<0$。考慮曲綫 $y=x^{p-1}$(圖 2)，在此曲綫上顯然有

$$x=y^{p'-1}.$$

假設 C 是以 x, y 爲坐標的點，而且在曲綫 $y=x^{p-1}$ 的上方，則圖形 $OABDE$ 的面積 q 小於矩形 $OACE$ 的面積。設 K 爲 y 軸

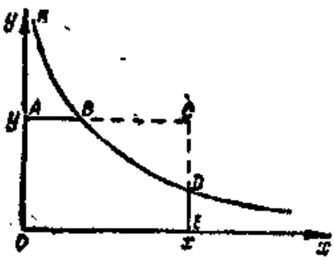

圖 2

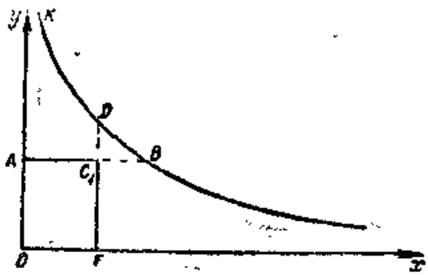

圖 3

上的無窮遠點，則面積 q 可以寫成面積 $OAKBDE=\int_0^x y dx$ 與面積 $AKB=\int_y^\infty x dy$ 之差。換言之，

$$\int_0^x x^{p-1}dx-\int_y^\infty y^{p'-1}dy \le xy, \text{ 也就是 } \frac{x^p}{p}+\frac{y^{p'}}{p'} \le xy.$$

現在取曲綫 $y=x^{p-1}$ 的下方一點 C_1(圖 3)。作面積 $KAOEC_1D=$

$= \int_0^x x^{p-1}dx$ 與面積 $KAC_1BD = \int_y^\infty y^{p'-1}dy$ 之差，這個差等於面積 OAC_1E 與面積 C_1DB 之差，所以小於 OAC_1E 的面積，也就是

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'} \leqslant xy. \tag{1.25}$$

當 $y = x^{p-1}$ 時，也就是 $x^p = y^{p'}$ 時，不等式 (1.25) 便成為等式。

如導出 (1.15) 一樣，由 (1.25) 可得正值函數 X, Y 的荷爾德逆不等式如下：

$$\int_\Omega XYPdv \geqslant \left[\int_\Omega X^pPdv\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_\Omega Y^{p'}Pdv\right]^{\frac{1}{p'}}. \tag{1.26}$$

又由荷爾德逆不等式(1.26)可得閔可夫斯基逆不等式：

$$\left[\int_\Omega (x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^pPdv\right]^{\frac{1}{p}} \geqslant \left[\int_\Omega x_1^pPdv\right]^{\frac{1}{p}} + \\ + \cdots + \left[\int_\Omega x_k^pPdv\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{1.27}$$

此式當 $0 < p < 1$ 時，對於取正值的函數 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 成立。

和以前一樣，等號只有當右邊的所有函數成比例時才能成立。

證明和前面的完全類似。

註　設 $x(\vec{Q})$ 是定義於 Ω 內的函數．令

$y = x$　　在點集 $E \subset \Omega$ 上，

$y = 0$　　在點集 $\Omega - E$ 上，

$z = x - y$　在 Ω 內；

再將閔可夫斯基不等式應用於 y, z，即得(當 $p \geqslant 1$ 時)

$$\left[\int_\Omega |x|^pdv\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left[\int_E |x|^pdv\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_{\Omega-E} |x|^pdv\right]^{\frac{1}{p}}.$$

當 $p < 1$ 時，不等式轉化為逆不等式(如果 $x > 0$)。

§ 2. L_p 空間的基本性質

1. 範數．定義　在平常的 n 維歐幾里得空間中，收斂性與取極限的概念，都是用兩點之間的距離 $\rho = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}$ 來定義的。

設矢量 $\vec{x}$ 的坐標爲 ξ_i，則表示這個矢量 $\vec{x}$ 的長度的函數 $\rho = \sqrt{\sum \xi_i^2}$ 就是所謂矢量的範數的特殊情形。因此，兩點的距離便可表爲這兩點的坐標矢量之差的範數。利用矢量的歐幾里得長度來引入矢量的範數，並不是唯一的方法。我們說，非負實值函數 $\rho(\vec{x})$ 可作爲範數，如果它滿足下列三個條件：

A. ρ 是 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 的正值一次齊次函數，也就是說，

$$\rho(k\xi_1, k\xi_2, \cdots, k\xi_n) = |k|\,\rho(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n). \tag{2.1}$$

Б. $\rho(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 是它的變量的凸函數。換言之，如果定義 $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}$ 是以 $\lambda\xi_i + \mu\eta_i$ 爲分量的矢量，其中 ξ_i、η_i 分別是矢量 $\vec{x}$, $\vec{y}$ 的分量，則由等式 $\rho(\vec{x}) = a$, $\rho(\vec{y}) = a$ 可以推出

$$\rho(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) \leqslant a, \tag{2.2}$$

如果 $\lambda + \mu = 1,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

凸性的幾何意義如下：如果兩點 $\vec{x}, \vec{y}$ 在同一個曲面 $\rho(=$ 常數$)$ 上，則此兩點的聯綫上任一點必定在曲面本身上或者在它的內部。

B. 由等式 $\rho(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = 0$ 可以推出

$$\xi_1 = 0,\ \xi_2 = 0,\ \cdots,\ \xi_n = 0.$$

三角形不等式 凸性常常可以用其他方式來陳述。

設 $\vec{\xi}, \vec{\eta}$ 爲兩個任意的矢量。我們考慮 $\rho(\vec{\xi} + \vec{\eta})$ 並估計它的值，此時有

$$\vec{\xi} + \vec{\eta} = \left[\frac{\rho(\vec{\xi})}{\rho(\vec{\xi}) + \rho(\vec{\eta})}\,\frac{\vec{\xi}}{\rho(\vec{\xi})} + \frac{\rho(\vec{\eta})}{\rho(\vec{\xi}) + \rho(\vec{\eta})}\,\frac{\vec{\eta}}{\rho(\vec{\eta})}\right][\rho(\vec{\xi}) + \rho(\vec{\eta})].$$

倘若令

$$\frac{\vec{\xi}}{\rho(\vec{\xi})} = \vec{x},\quad \frac{\vec{\eta}}{\rho(\vec{\eta})} = \vec{y},$$

那麼顯然有

$$\rho(\vec{x}) = 1,\ \rho(\vec{y}) = 1.$$

此外，又令

$$\lambda = \frac{\rho(\vec{\xi})}{\rho(\vec{\xi}) + \rho(\vec{\eta})},\ \mu = \frac{\rho(\vec{\eta})}{\rho(\vec{\xi}) + \rho(\vec{\eta})},$$

並利用範數的齊次性，則得

$$\rho(\vec{\xi} + \vec{\eta}) = [\rho(\vec{\xi}) + \rho(\vec{\eta})]\rho(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}).$$

但由性質 Б 可知，末一個因子不大於 1，故有

$$\rho(\vec{\xi} + \vec{\eta}) \leqslant \rho(\vec{\xi}) + \rho(\vec{\eta}). \tag{2.3}$$

這個不等式稱爲三角形不等式，這樣就由不等式 Б 引出了關於一次齊次函數的三角形不等式.

反之，易於看出，一次齊次函數 ρ 的凸性可由三角形不等式推出.

事實上，如果 $\rho(\vec{x}) = a,\ \rho(\vec{y}) = a$，那麼

$$\rho(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) \leqslant \rho(\lambda\vec{x}) + \rho(\mu\vec{y}) = (\lambda + \mu)a = a,$$

這就是所要證明的.

如果對於任何 $\vec{\xi}$，在 $\rho_1(\vec{\xi})$ 與 $\rho_2(\vec{\xi})$ 之間存在着不等式

$$m\rho_1(\vec{\xi}) \leqslant \rho_2(\vec{\xi}) \leqslant M\rho_1(\vec{\xi}),$$

其中 m, M 均與 $\vec{\xi}$ 無關，則稱 $\rho_1(\vec{\xi})$ 與 $\rho_2(\vec{\xi})$ 這兩個範數是等價的或對等的.

在 n 維歐幾里得空間中，所有的範數都是等價的. 事實上，在曲面 $\rho_1(\vec{x}) = 1$ 上函數 $\rho_2(\vec{x})$ 能取得最大值與最小值，且由 B 可知，它的最小值是正的. 用 M, m 分別代表 $\rho_2(\vec{x})$ 在此曲面上的最大值與最小值，則由

$$\rho_2(\xi) = \rho_2\left(\rho_1(\vec{\xi}) \cdot \frac{\vec{\xi}}{\rho_1(\vec{\xi})}\right) = \rho_1(\vec{\xi})\rho_2(\vec{x})$$

立即推出所要的不等式.

n 維空間的任何仿射變換，都保留曲面的凸性. 因此，如果