多元微积分

[美] William G. McCallum
Deborah Hughes-Hallett
Andrew M. Gleason 等著
董达英 高孟宁 邵 勇 郭思旭 张爱和 胡乃冏 译

WILEY
高等教育出版社

多元微积分

美国国家科学基金会资助　以哈佛大学为首的合作组编写

William G. McCallum
University of Arizona

Deborah Hughes-Hallett
Harvard University

Daniel Flath
University of South Alabama

Douglas Quinney
University of Keele

Andrew M. Gleason
Harvard University

Wayne Raskind
University of Southern California

Sheldon P. Gordon
Suffolk County Community College

Jeff Tecosky-Feldman
Haverford Callege

David Mumford
Harvard University

Joe B. Thrash
University of Southern Mississippi

Brad G. Osgood
Stanford University

Thomas W. Tucker
Colgate University

由 Adrian Iovita(*Centre Interuniversitaire en Calcul Mathématique Algébrique*)协助

董达英　高孟宁　邵勇　郭思旭　张爱和　胡乃冏　译

高等教育出版社

图字:01 - 2001 - 3339 号
MULTIVARIABLE CALCULUS
Dedicated to Amy, Nell, Abby, and Sally.

Authorized translation from the English language edition
published by John Wiley & Sons, Inc.

本书是与1997年翻译出版的《微积分》(D·休斯·哈雷特等著,胡乃冏等译)一书相衔接的多元微积分部分。全书共有10章:第11章—20章。正文后有附录A—G、单序号习题答案及名词索引。本书叙述浅易,并有十分丰富生动的联系实际生活的例题与习题。

本书可供高等学校理工科有关教师及本科大学生参考。

图书在版编目(CIP)数据

多元微积分/(美)凯勒姆(McCallum, W. G.)编;董达英等译. —北京:高等教育出版社,2003.8
ISBN 7-04-011875-0

Ⅰ. 多… Ⅱ. ①凯…②董… Ⅲ. 微积分—高等学校—教材 Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第052168号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010 - 64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800 - 810 - 0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010 - 82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷	北京市联华印刷厂		
开　　本	787 × 1092　1/16	**版　　次**	2003年8月第1版
印　　张	32.25	**印　　次**	2003年8月第1次印刷
字　　数	780 000	**定　　价**	57.00元

译 者 的 话

本书是与 1997 年 10 月出版的《微积分》([美]D·休斯·哈雷特 A·M·克莱逊等著,胡乃冏等译)相衔接的多元微积分部分。所包含的是十一至二十章,以及附录。参加翻译的有董达英、高孟宁、邵勇、郭思旭、张爱和、胡乃冏六位同志。其中序言、第十一章及附录由邵勇译出,第十二章由胡乃冏译出,第十四、十九两章由董达英译出,第十六、十七两章由高孟宁译出,第十三、十八、二十章由郭思旭译出,书末的索引也由郭思旭根据各章所译名词按汉语拼音排序。

我们特别感谢文小西编审对译稿的仔细审阅和所提出的不少中肯的修改意见。

由于水平所限,译文中难免还有不妥之处,衷心希望广大读者批评指正。

译　者

2002 年 12 月于北京

序　言

微积分是人类智慧最伟大的成就之一.300 年前,受天文学方面问题的启发,牛顿(Newton)和莱布尼茨(Leibniz)阐发了微积分的诸多概念.自那时以来,每一世纪都证明了微积分在阐明数学、物理科学、工程学以及社会和生物科学方面问题的强大威力.

由于微积分具有将复杂问题归纳为简单规则和步骤的非凡能力,迄今已获得相当大的成功.正因为如此,微积分的教学也存在着危险:很可能将这一学科仅仅教授成一些规则和步骤,从而既忽略了数学本身,也忽略了它的实际价值.由于美国国家科学基金会的慷慨资助,我们以哈佛大学为首的合作组,尝试创立一门新的微积分课程以期恢复它的洞察力.本书是这一努力的第二阶段.第一阶段是我们编写的一元微积分教材.

基本原则

在编写一元微积分教材时我们努力遵循的两条原则依然有效.为了恢复微积分的数学内容,我们制定的第一条原则是:

三项准则:课程的每一主题都应当从几何、数值和代数三个方面加以体现.

我们不断地鼓励学生思考和写出他们所做的一切的几何意义和数值意义.我们不打算削弱微积分的纯代数方面,而宁愿通过给出代数符号的意义来加强这一点.对于涉及应用的课后作业,我们总是要求学生给出他们的答案的实际意义.

受阿基米德(Archimedes)的启发,为恢复对实际问题的理解力,我们制定的第二条原则是:

阿基米德方法:正式的定义与方法是根据对实际问题的调查研究而得出的.

阿基米德认为,获得数学问题的洞察力首先要根据力学或物理学的观点来考虑它们.①出于同样的理由,我们的课本是问题驱动式的.只要有可能,我们总是从实际问题出发,并由此推导出一般性结果.所谓实际问题,我们通常是(但并不总是)指现实世界的应用问题.上述两条原则导致了一门引人注目的新课程——其新颖性远比粗略地看一看目录所得到的提示多得多.

技术手段

为了帮助学生学会从数学角度思考问题,计算机技术在多元微积分中所能发挥出的巨大优势远比它在一元微积分中的大.例如,观察曲面图形和等值线图十分有助于理解多元函数.而且有效地利用技术手段作为工具的能力本身也是极其重要的.我们期望学生用自己的判断力去决

① "……我认为……还是把可能用力学手段研究某些数学问题的方法写给你并加以详细说明的好.我相信这个过程甚至对定理证明本身同样是有用的;我最初是通过力学方法明白某些问题的,虽然它们还须以后在几何上加以证明,因为由所述方法进行的研究并没有给出真正的证明.但是我们通过这个方法事先获得了这些问题的某些知识来给出证明,比事先没有这些知识显然要容易些."引自 Sir Thomas L. Heath 编译的《阿基米德著作中的有关方法》(Dover, NY)

定技术手段在哪些方面是有用的.

然而本书并不需要任何特别的软件和技术手段.我们也提供了一些软件和技术手段,但技术要求并不高,比如提供补充的投影幻灯片,用它们来显示曲面图形、等值线图、参数形式的曲线及向量场.理想上来说,学生应该掌握一定的技术手段从而具备画曲面图形、等值线图和向量场的能力和用数值方法计算多重积分和曲线积分的能力.但是我们没有作那样的要求,而是把使用便携式图形计算器与投影幻灯片相结合,这很令人满意,并且很成功地被用于考试地点.

对学生的学习基础有何要求?

学习本书的学生应该学完并掌握一元函数微积分的课程,但却不一定非要学习与本书配套的那本一元微积分教程.

我们认为这门课程既能激发基础好的学生多思考,同时也能使那些代数基础薄弱的学生容易理解.书中既提供数值方法和图示方法,也提供代数方法,给予学生掌握内容的几种途径.这种处理方式是为了鼓励学生坚持不懈地学习,以降低失败率.

内容

与配套一元微积分课程一样,我们设计这一课程时,仍不受任何传统想法的限制.教材中添加了某些新课题,如,微分方程;也删去了一些传统课题,因为在与数学家、工程师、物理学家、化学家、生物学家及经济学家讨论后,不能认为它们是合理的内容.同时,我们还改变了某些课题传统的注意中心.为了满足个别的需要或课程的要求,可以很容易地增删某些课题,或改变其顺序.

我们始终假设二元及二元以上函数都是定义在具有逐段光滑边界的区域之上的.

第 11 章:多元函数

我们从许多不同的角度来引入多元函数,比如,从曲面图形、等值线图或表格.本章在本书中所起的作用与第 1 章在讲述一元微积分的那本书中所起的作用相同;它教会学生读图形和读等值线图的方法及用图形来思考的方法,它还教给学生读表格及从数值上来思考的方法,从而教给学生用这些方法,连同相应的代数方法一起,去构建真实世界的模型.我们特别强调一个函数的截线,这种截线是通过使一个变量变化而其他变量不变的方法得到的.我们发现,对学生来说,在继续学习偏导数和梯度之前学好截线的概念是极为有用的.我们要仔细研究线性函数,为引入局部线性的概念作准备.我们最后以讨论连续性的一节结束本章.

第 12 章:一种基础工具:向量

我们把向量定义为一个具有方向和大小的几何对象,并且以位移向量作为向量的模型,然后引入了向量的坐标表示法.我们分别给出了点积和叉积的相互等价的几何和代数定义.

第 13 章:多元函数

我们引入了偏导数、方向导数、梯度和微分等基本概念.为了延续一元微积分教材的内在风格,我们将这些概念纳入局部线性性质的框架中.利用局部线性性质,我们引入了可微的概念,并讨论了多元链式法则.我们讨论了高阶偏导数,以及高阶偏导数在偏微分方程中的解释和它们在

二次泰勒逼近中的应用.本章以可微性的一节作为结束.

第 14 章:最优化

我们将前一章的概念应用于最优化问题——有约束最优化和无约束最优化.我们首先考察二次多项式的情况,继而使用了二次泰勒逼近,从而推导出了针对局部极值问题的二阶导数检验法.我们讨论了有界闭区域上连续函数全局极值的存在性.在有约束最优化一节中,我们讨论了拉格朗日乘子法、等式约束和不等式约束条件,多于一个约束条件的问题以及拉格朗日函数.

第 15 章:多元函数的积分

我们从考虑如何用越分越密的网格的方法,从人口密度的等值线图估计总人口数量这一问题出发,在图形方面引出了多元定积分的概念.接着我们继续讨论有表格的数值例子,然后给出两种计算多重积分的方法:分析法,即迭次积分法;数值法,即蒙特卡罗方法.我们在直角坐标、极坐标、球面坐标和柱面坐标中讨论二重积分和三重积分.我们还讨论多元概率的应用.

第 16 章:曲线和曲面的参数表示

我们从用参数形式表示曲线这一问题开始,然后使用参数形式的曲线表示运动.我们从几何方面定义速度和加速度,然后以分量的形式给出公式.接下来的一节讨论曲面的参数表示,然后应用隐函数定理讨论曲面的隐式表示形式、显示表示形式和参数表示形式之间的关系.最后一节讨论微积分的古老应用之一——牛顿对行星运动的开普勒定律的解释.

第 17 章:向量场

在这简短的一章中,我们引入了多元向量值函数,或叫向量场.本章为以后的三章的曲线积分、通量积分、散度和旋度打基础.我们从物理例子如速度向量场和力场开始讨论,然后给出一些向量场的图形以帮助建立几何直观.我们还讨论向量场的流线及它们与微分方程组的关系.

第 18 章:曲线积分

我们给出沿一路径积分向量场的概念是脱离开坐标系定义的.在引入用参数表达式计算积分的方法以前,花了一定时间于利用路径的叠加的向量场的草图去构建直观形象.然后讨论了保守场、梯度场和曲线积分的基本定理.我们接着讨论非保守的向量场和格林定理,给出对于保守向量场的旋度判别法.我们以应用变量变换公式证明格林定理作为本章的结束.

第 19 章:通量积分

我们采取了与介绍曲线积分时同样的办法,介绍了向量场通过参数表示的曲面的通量积分.我们先给出了与坐标无关的定义,然后讨论了通量积分(或至少是积分的正负号)能以几何方法进行计算的例子.之后我们又展示了如何在曲面图形、部分柱面和部分球面上计算通量积分.在本章最后一节我们介绍了任意用参数表示的曲面上的通量积分.

第 20 章:向量场的微积分

我们在脱离开坐标的情况下引入散度和旋度的概念;引入通量密度的散度和环流量密度的旋度等概念.然后给出笛卡儿坐标下的公式.在一元微积分的书中,指出变化率的积分是总变化,推导出微积分基本定理.与此差不多,我们以证明在一个体积上的通量密度的积分是通过这个体积的总通量的方式推导出了散度定理;以证明在一个曲面上环流量密度的积分是沿该曲面边界的总环流量的方式推导出斯托克斯定理.我们讨论了多元微积分的三个基本定理,并说明由这三个基本定理如何对三维空间的保守向量场导出三维的旋度判别法.我们以应用变量变换公式证明散度定理和斯托克斯定理作为一节而结束本章.

与试用版的不同之处

我们采纳了一些读者对试用版提出的建议.这些读者在内容阐述的明确性及准确性方面给予了我们极大的帮助.书中大多数插图我们都重新绘制了,特别是那些三维图形.

·第 11 章.我们加进了一节有关极限和连续的内容.

·第 12 章.这里,在每一节的开始,向量的点乘和叉乘的定义同时以几何和代数两种方式给出.每节还都给出为何这两种定义是等价的说明.

·第 13 章.有关方向导数与梯度的内容实际上是重新组织的.在 13.4 节引入方向导数和梯度向量,但仅仅是在二维的情形.我们用梯度的代数定义取代了梯度的几何定义,目的是以公式计算方向导数;而几何性质可以从这个公式得出.13.5 节包含了有关二维梯度与三维梯度之间联系的新内容,以及梯度没有几何解释的情形.在链式法则一节加入了来自物理化学的新例题.在章末增加了有关可微性的新的一节,从图形和直观形象的角度讨论可微性、偏导数存在性与连续性的关系.

·第 14 章.原第 14.1 节有关全局极值的内容被移到了第14.2节中,于是现在的第 14.1 节就把全部注意力放在临界点和它们的分类之上.有关闭集和有界集的理论内容被移到了第14.2节中.这样我们的注意就更加集中在主要思想方面.

·第 15 章.引例更加简短,使得能够尽快导出定义.

·第 16 章.我们把第 16.1 到 16.3 节的内容重新作了很好的组织.新的第 16.1 节把注意力集中在以参数形式表示曲线的几何思想方面.新的第 16.2 节阐述了曲线的参数表示是一种运动的这一思想,同时介绍了速度向量和加速度向量.有关隐式表示形式、显示表示形式和参数表示形式的内容被移到了新的一节即第 16.4 节"隐函数定理"中.我们还增加了第 16.5 节,即"牛顿对开普勒定律的解释".

·第 18 章.增加了三维旋度判别法作为第 20 章的伏笔.我们还增加了新的一节给出格林定理的证明.

·第 19 章.我们把本章重新组织成三节,其中增加了某些新内容.第 19.1 节包含了有关计算通量积分的新内容,这种计算不需要参数表示,而是使用简单的几何讨论来把积分化为二重积分.第 19.2 节包含了有关在部分柱面和部分球面上计算通量积分的新内容.

·第 20 章.反映 12 章所作出的改变,散度与旋度的几何定义与代数定义是一起给出的,并且以直观的讨论解释为什么两种定义给出相同的结果.我们增加一些更为复杂的例子,以及有关无

散度向量场与无旋向量场的内容.有关三个基本定理的新的一节讨论了三维旋度判别法和对有旋场的散度判别法.我们把原先的最后一节替换为给出散度定理与斯托克斯定理证明的新的一节,这些证明是基于把一个区域用参数表示并应用变量变换的思想,把其化归为长方体区域的证明,其中融合了利用微分形式的标准的现代证明.这对于能力强的学生是具有挑战性的一节,它对在优等水平上读这个课程的学生来说,是一个高潮.

·*单数题号习题的答案*.我们把学生答案手册结合进了本书中.因此,对单数号码习题中那些答案比较简短的习题,本书是附上了它们的答案的.

一学期课程对本书的选取

若课程只有一学期,教师可以有下面两种选取方式:一种是学到前 18 章,其间一定要留出充分时间学习曲线和曲面的参数表示,曲线积分及格林定理等内容;另一种是学到第 20 章,其间只学习第 16、17、18 和 19 各章的前几节,这样就只简略地从几何视角学习曲线积分和通量积分,从而给学生充足的背景知识以理解散度定理和斯托克斯定理.

辅助材料

·教师手册:包括讲课提示、计算器程序、某些优秀的投影仪字幕片及模拟考试题和测试题.
·教师用题解手册:包括全部习题的完整解答.
·学生用题解手册:单数题号的习题中每隔一题给出一个完整解答.
·Windows 环境下曲面绘制软件 MultiGraph.

我们的经验

在我们酝酿构思本书的过程中,就已经意识到需要在多种不同类型学生就学的各级学校中充分试用本书的内容.合作组的成员在各种不同的院校中使用本书的前身讲授了好几年.在 1995 至 1996 学年中,我们得到全美范围内超过 100 所学校的教师的鼎力支持,他们分级试用了本书的试用版,并报告了他们的经验及学生的反映.这些不同类型的学校,有的用本书讲授过一个学期,有的讲授过四分之一学年。有的则在计算机实验室,在小组里,在传统的研讨班上使用过本书,并且应用了多种不同的技术手段.我们衷心感谢他们提出了有价值的建议,我们已经设法将这些建议纳入到这第一版教材中.

致谢

对下面人士表示诚挚的感谢:Ruby Aguirre, Ed Alexander, Carole Anderson, Leonid Andreev, Ralph Baierlein, Paul Balister, Frank Beatrous, Jerrie Beiberstein, Melanie Bell, Ebo Bentil, Yoav Bergner, Shelina Bhojani, Thomas Bird, Paul Blanchard, Melkana Brakalova, John Bravman, David Bressoud, R. Campbell, Phil Cheifetz, Oksana Cherniavskaya, C. K. Cheung, Dave Chua, Dean Chung, Robert Condon, Eric Connally, Radu Constantinescu, Pat Corn, Josh Cowley, Jie Cui, Caspar Curjel, Bill Dunn, Mike Esposito, Pavel Etingof, Bill Faris, Hermann Flaschka, Leonid Friedlander, Leonid Fridman, Greg Fung, Deborah Gaines, Amanda Galtman, Avijit Gangopadhyay, Howard Georgi, Scott Gilbert, Marty Greenlee, David Grenda, Benedict

Gross, John Hagood, David G. Harris, Angus Hendrick, John Huth, Robert Indik, Raj Jesudason, Qin Jing, Jerry Johnson, Millie Johnson, Joe Kanapka, Alex Kasman, Matthias Kawski, David Kazhdan, Misha Kazhdan, Thomas Kerler, Charlie Kerr, Mike Klucznik, Sandy Koonce, Matt Kruse, Ted Laetsch, Sylvain Laroche, Janny Leung, Dave Levermore, Lei Li, Weiye Li, Li Liu, Carlos Lizzaraga, Patti Frazer Lock, John Lucas, Alex Mallozzi, Brad Mann, Elliot Marks, Ricardo Martinez, Eric Mazur, Mark McConnell, Dan McGee, Tom McMahon, Georgia Mederer, Andrew Metrick, Michal Mlejnek, Jean Morris, Don Myers, Bridget Neale, Alan Newell, James Osterburg, Myles Paige, Ed Park, Ted Pyne, Howard Penn, Tony Phillips, Laura Piscitelli, Ago Pisztora, Steve Prothero, Rebecca Rapoport, David Richards, Ann Ryu, Walter Seaman, Russ Shachter, Barbara Shipman, Mary Sibayan, Jeff Silver, Chris Sinclair, Yum-Tong Siu, Keith Stroyan, Noah Syroid, Francis Su, Suds Sudholz, Mike Tabor, Cliff Taubes, Ralph Teixeira, Denise Todd, Elias Toubassi, Jerry Uhl, Doug Ulmer, Adrian Vajiac, Bill Velez, Faye Villalobos, Jianmei Wang, Joseph Watkins, Xianbao Xu, and Bruce Yoshiwara.

还要特别感谢 Paul Feehan 给予的大力支持.

William G. McCallum	Sheldon P. Gordon	Wayne Raskind
Deborah Hughes-Hallett	David Mumford	Jeff Tecosky-Feldman
Daniel E. Flath	Brad G. Osgood	Joe B. Thrash
Andrew M. Gleason	Douglas Quinney	Thomas W. Tucker

致学生:如何学习本教材

·这本书可能与你用过的其他数学教材有所不同,所以事先了解这些差别可能是有帮助的.本书在每个阶段都强调你所使用的符号的意义(包括实际的、几何图像上的或数值上的).本书对直接套用公式计算的重视程度可能比你预期的低,而围绕这些公式所做的解释,却远比你想像的要重视得多.我们会经常要求你对自己的思路做出文字解释,或用图像来解释答案.

·本书用平易的英语叙述了多元微积分的主要概念.成功地使用本书取决于认真地阅读、不断提出问题和对给出的概念努力加以思考.尽管你可能学习其他书时没有这样做过,但确实应该很好计划一下如何仔细地阅读教材,而不是只看那些经过加工的例子对你将是有益的.

·教材中的例子很少与课后的习题完全相仿,所以做课后习题不能指望那些看上去有类似"结果"的例子.努力掌握好微积分的概念才能很好地完成课后作业.

·书中很多习题的结果是开放式的,这就是说有不只一种正确的解法和不只一种正确的答案,这要依赖于你的分析.大多数时候,问题的解决依赖于那些很普通的想法,尽管这些想法习题本身并没有明确给出,但却可以从日常生活中了解到.

·我们假定你很容易找到一台计算机或图形计算器,它能画出曲面图形、等值线图和向量场,并能从数值方面计算多重积分和曲线积分.在很多情况下,你无法求出问题的准确答案,但却能用计算器或计算机得到合理的近似值.用这种方式得到的答案通常与精确解一样有效.然而并不是所有问题都要用计算器来解答,需要你自己去做出判断.

·本书试图让描述函数的三种方法:图示法(一幅图)、数值法(一张数值表)和代数法(一个公式),具有同等重要的地位.有时很容易将所给问题从一种表示方法转变为另一种表示方法.例如,如果你需要求出一个函数的最大值,你就可以使用等值线图来估计出近似的位置,再使用这个函数的公式寻找可用其求出精确位置的方程,然后用数值方法解方程.处理方法灵活是很重要的,如果一种方法观察问题不奏效,就试另一种方法.

·正在使用本书的学生发现小组讨论问题是有益的.很多问题的解决不能墨守成规,用你的同学所提供的其他观点处理它们可能是有帮助的.如果小组讨论不可行,看看你的教师能否组织研讨班对各种附加问题展开讨论.

·你可能想知道,从这本书中将能学到什么.答案是,如果你做出扎实的努力,你将会真正懂得一千年来最重要的成就之一——微积分,也会真正理解在这个技术时代如何应用数学.

责任编辑　郭思旭
封面设计　于　涛
责任绘图　尹　莉
版式设计　张　岚
责任校对　胡晓琪
责任印制　杨　明

目　录

第十一章

多元函数

有许多量的变化依赖于不止一个变量:粮食产量依赖于降雨量和化肥施加量;化学反应依赖于其所处环境的温度和压力;两个物体之间万有引力的大小依赖于它们的质量和它们之间的距离;火山爆发产生的尘埃的聚积速度依赖于所处位置到火山的距离和从火山爆发开始算起到现在的时间.以上所举每一例都是一个二元函数或更多个变元的函数.在本章中,我们将讨论多种不同的考察多元函数的方法.

11.1 二元函数

函数的记号

假设你计划以五年期贷款的方式购买一辆小汽车，因此就需要计算每月所需还款的数额；这一数额的多少既依赖于你所贷款的总额，又依赖于贷款利率．而这些量却是可以单独变化的：可以是贷款利率不变而贷款总额变化，也可以是贷款总额不变而贷款利率变化．因此要计算出月还款数额，就必须知道这两个量．如果月还款数额用 m（美元）表示，贷款总额用 L（美元）表示，利率用 r％表示，那么，我们就说 m 是 L 和 r 的函数，记作

$$m = f(L, r).$$

这就像一元微积分中函数的表示．变量 m 称作因变量，变量 L 和 r 称作自变量．字母 f 表示由所给 L 和 r 的值得出 m 的值所依赖的规则或函数(function)．

一个二元函数可以用图形方式表示，也可以以数值表格的形式用数值方式表示，还可以以公式的形式用代数方式表示．在本节中，我们将分别给出这三种函数表示方式的例子．

用图形方式表示的例子：天气图

图 11.1 所示为源自某一报纸的天气图．它给出了什么信息呢？它显示出了那一天美国各地的预报最高气温值 T（以华氏度°F 表示）．图中的曲线，称作等温线(isotherm)（前缀 Iso 意为“相等的”，therm 意为“热”），它们按照温度是 60～69，70～79，80～89，90～99 或 100～109，把美国划分成一些不同的区域．注意，把 80～89 和 90～99 这两个区域分割开的那条等温线是把所有温度恰好等于 90°F 的那些点连接起来的曲线．

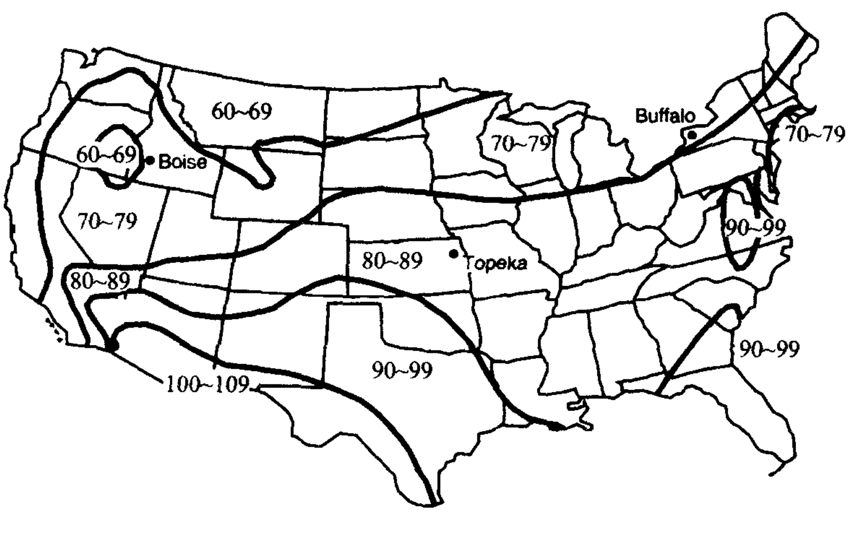

图 11.1 显示某夏日预报最高气温值 T 的天气图