赵坚
顾静相

数学分析专题研究

学习指导

中央廣播电視大學出版社

数学分析专题研究
学 习 指 导

赵 坚 顾静相 编

中央广播电视大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析专题研究学习指导/赵坚,顾静相编.—北京:中央广播电视大学出版社,2002.7

ISBN 7-304-02250-7

Ⅰ.数… Ⅱ.①赵…②顾… Ⅲ.数学分析—电视大学—教学参考资料 Ⅳ.O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 051542 号

数学分析专题研究学习指导

赵 坚 顾静相 编

出版·发行/中央广播电视大学出版社

经销/新华书店北京发行所

印刷/北京云浩印刷有限责任公司

开本/850×1168 1/32 **印张**/4 **字数**/103 千字

版本/2002 年 6 月第 1 版 2002 年 12 月第 2 次印刷

印数 2001—7000

社址/北京市复兴门内大街 160 号 **邮编**/100031

电话/66419791 68519502 **(本书如有缺页或倒装,本社负责退换)**

书号:ISBN 7-304-02250-7/O·122

定价:8.00 元

前　言

《数学分析专题研究学习指导》的读者是中央广播电视大学本科开放教育数学与应用数学专业的学生．由于《数学分析专题研究》课程具有一定的难度，我们编写这本辅导教材，希望对学生的学习有所帮助．

本书是配合主教材以章为单位进行辅导．各章的辅导由以下五部分内容组成：

【学习目标】

按照本课程的教学大纲，提出本章的教学要求．这对自学的学生了解教学内容、抓住学习的重点是有益的．

【内容回顾】

帮助学生对本章的内容进行总结、归纳．

【重难点解析】

对课程中的重点及难点进行分析，帮助学生理解课程内容．

【例题与练习】

通过对一些典型例题的分析，辅导学生弄清基本概念，掌握解题思路，总结解题方法．在每一道例题之后都配有同类型的练习题，学生可以自主练习，以此来检验对学习内容的掌握程度．

【自我检测题】

为学生提供部分客观性题目，意在检验学生对定理、定义、性质和推论的掌握程度和简单应用的水平．

本书由中央广播电视大学赵坚、顾静相撰稿，赵坚负责全书的整理，东北师范大学的高夯教授对全书进行了审阅．由于编者的水平有限，书中不妥之处恳请读者指正．

编　者

2001年7月于北京

目　　录

第一章　集合与映射

【学习目标】

1．理解集合的概念，了解元素与集合、集合与集合之间关系，熟练掌握集合的并、交、差集运算，掌握有关运算律的证明方法．

2．理解笛卡尔积、二元关系、运算关系等概念，理解映射、满射、单射、双射等概念，理解有关定理，掌握有关定理的证明方法和有关的例题的处理方法．

3．理解等价关系的概念，了解商集的概念，理解有关定理，掌握有关定理的证明方法和有关的例题的处理方法．

4．理解序关系和偏序集的概念，了解最大（小）元、极大（小）元的概念，知道良序集；理解有关定理，掌握有关定理的证明方法和有关的例题的处理方法．

5．理解等势、基数等概念，知道 Bernstein 定理．

【内容回顾】

（一）集合的概念

集合：具有某种共同特性的事物的全体．

元素与集合的关系：如果元素 a 是集合 A 的成员，记作 $a\in A$，读作 a 属于 A；如果 a 不是 A 的成员，则记作 $a\overline{\in}A$，读作 a 不属于 A．

集合与集合的关系：若$\forall x \in A$，则有 $x \in B$，称为集合 A 包含于B或B包含A，记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

集合相等：如果集合 A 与 B 的成员完全相同，则称 A 与 B 相等，记作 $A = B$；否则称 A 与 B 不相等，记作 $A \neq B$.

空集：没有成员的集合，记作 $\emptyset$. 注意，空集包含于任一集合中，且空集是惟一的.

子集：若集合 $A \subset B$，则称 A 为 B 的子集；若 $A \subset B$ 且 $A \neq B$，称 A 为 B 的真子集.

（二）集合的运算

并集：$A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$

交集：$A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$

差集（补集）：$A - B = \{x \mid x \in A$ 但 $x \overline{\in} B\}$

对称差：$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$

若 A，B，C 为集合，则集合的并、交、差满足：

（1）等幂律：$A \cup B = A$，$A \cap A = A$

（2）交换律：$A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$

（3）结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

（4）分析律：$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

（5）摩根（DeMorgan）律：$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

（三）二元关系

笛卡尔积：$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$，注意 (a, b) 为有次序的元素偶.

从集合 A 到B 中的关系：$A \times B$ 中的每一子集R 称为从A 到B 中的关系，若 $(a, b) \in R$，则称 a 与b 是R－相关的，记作

aRb.

关系 R 的定义域：Dom（R）＝$\{a \mid$ 存在 $b\in B$，使 $aRb\}$（$\subset A$）.

关系 R 的值域：Ran（R）＝$\{b \mid$ 存在 $a\in A$，使 $aRb\}$（$\subset B$）.

关系 R 的象集：$R(\tilde{A})=\{b \mid$ 存在 $a\in \tilde{A}$，使得 $aRb\}$（$\subset B$）. 其中集合 $\tilde{A}\subset A$.

关系 R 的逆：设 $R\subset A\times B$，则 $B\times A$ 的子集 $R^{-1}=\{(b,a) \mid aRb\}$ 称为 R 的逆.

关系的复合：$S\circ R=\{(a,c) \mid$ 存在 $b\in B$，使得 aRb，$bSc\}$，其中 $R\subset A\times B$，$S\subset B\times C$.

设 A，B，C，D 为集合；$R\subset A\times B$，$S\subset B\times C$，$T\subset C\times D$，则关系的逆与复合运算满足：

(1) $(R^{-1})^{-1}=R$

(2) $(S\circ R)^{-1}=R^{-1}\circ S^{-1}$

(3) $T\circ(S\circ R)=(T\circ S)\circ R$

(四) 映　射

映射：$F:X\to Y$，即 $\forall x\in X$，有惟一 $y\in Y$，使得 xFy.

映射 F 的象：$y=F(x)$，即对于每一 $x\in X$，使得 xFy 成立的 y.

映射 F 的原象：$F^{-1}(y)$，即对于 $y\in Y$，使得 xFy 成立的 x.

映射的复合：$(G\circ F)(x)=G(F(x))$，其中 $F:X\to Y$，$G:Y\to Z$.

满射：若 $f(X)=Y$，则称 f 为从 X 到 Y 上的满射.

单射：若 $\forall x_1$，$x_2\in X$，$x_1\neq x_2$，有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 为从 X 到 Y 上的单射.

双射：若 f 即是单射又是满射的.

逆映射：由 $y=f(x)$ 确定的从 Y 到 X 的映射 f^{-1}：$Y\rightarrow X$，其中 $f: X\rightarrow Y$ 是双射.

结论 1：设 $f: X\rightarrow Y$，A，$B\subset Y$，则逆映射 f^{-1} 满足

(1) $f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$

(2) $f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$

(3) $f^{-1}(A-B)=f^{-1}(A)-f^{-1}(B)$

结论 2：设 $f: X\rightarrow Y$，

(1) 若 f 是单射,则对于 X 的任意子集 A,有 $f^{-1}(f(A))=A$;

(2) 若 f 是满射,则对于 Y 的任意子集 B,有 $f(f^{-1}(B))=B$.

（五）运　算

运算：映射 f：$A\times B\rightarrow C$ 是一个从 $A\times B$ 到 C 中的运算. 特别的，映射 f：$A\times B\rightarrow A$ 是 A 上的一个运算，并且称运算 f 在 A 上封闭.

若 $f(a,b)=f(b,a)$，则称运算 f 满足交换律;

若 $f(f(a,b),c)=f(a,f(b,c))$，则称运算 f 满足结合律.

f 的右零元 e：$\forall a\in A$，使 $f(a,e)=a$;

f 的左零元 e：$\forall a\in A$，使 $f(e,a)=a$;

f 的零元 e：既是 f 的左零元，又是 f 的右零元.

a 的右逆元 a'：对于 $a\in A$，若 $\exists a'\in A$，使 $f(a,a')=e$;

a 的左逆元 a'：对于 $a\in A$，若 $\exists a'\in A$，使 $f(a',a)=e$;

a 的逆元 a'：既是 a 的左逆元，又是 a 的右逆元.

（六）等价关系

恒同关系：$I(X)=\{(x,x)\mid x\in X\}$

反身的：若对于 $x\in X$，有 xRx，则称 R 为反身的.

对称的：若对于任意的 x，$y\in X$，若 xRy，有 yRx，则称 R

为对称的.

反对称的：若对于任意的 x，$y\in X$，xRy 与 yRx 不能同时成立，则称 R 为反对称的.

传递的：若对于任意 x，y，$z\in X$，若 xRy，yRz，有 xRz，则称 R 为传递的.

等价关系：若关系 R 同时为反身的，对称的，传递的，则称关系 R 为等价关系.

等价类 $[x]_R$：对于每一 $x\in X$，X 的子集 $\{y\mid y\in X,\ yRx\}$ 称为 x 的等价类. 其中 R 为集合 X 中的等价关系.

商集 X/R：集族 $\{[x]_R\mid x\in X\}$ 称为集合 X 对于等价关系 R 而言的商集.

结论：设 R 为集合 X 中的等价关系，则

(1) 若 $x\in X$，则 $[x]_R\neq\varnothing$.

(2) 对于任意的 x，$y\in X$，或者 $[x]_R=[y]_R$，或者 $[x]_R\cap[y]_R=\varnothing$.

(七) 序关系

序关系（谦序关系）$<$：集合 X 中满足传递性的二元关系.

偏序集（半序集）$(X,\ <)$：集合 X 中含有偏序关系 $<$ 时，称 $(X,\ <)$ 为偏序集.

上（下）方有界的：若有 $b\in X$，对 $\forall a\in A$，恒有 $a\leqslant b$ ($b\leqslant a$)，则称 b 为 A 的上（下）界. 其中，A 为半序集 X 的子集.

有界：当 A 既上方有界又下方有界时，称 A 为有界.

最大（小）元 $\max A$ ($\min A$)：当 $a\in A$ 且 a 是 A 的上（下）界，则称 a 为 A 的最大（小）元.

上（下）确界 $\sup A$ ($\inf A$)：在 A 的上（下）界集中若有最小（大）元，则称之为 A 的最小（大）上（下）界.

极大（小）元：若对任何 $x \in A$，$a < x$（$a > x$）都不成立，则称 a 为 A 的极大（小）元.

全序集：满足反对称性和可比性的半序集（X，$<$）为全序集，$<$ 为全序关系.

序完备：每个有上（下）界的非空子集必有上（下）确界的全序集.

(八) 基　数

等势 $X \approx Y$：X 与 Y 之间存在一个从 X 到 Y 上的双射.

结论 1：等势关系是等价关系.

基数（势）$\overline{\overline{A}}$：按等势的等价关系将集合分类，与集合 A 等势的集合类的特征以表示$\overline{\overline{A}}$，称为基数.

设 $\overline{\overline{A}} = \alpha$，$\overline{\overline{B}} = \beta$，若 $A_1 \subset A$，使 $A_1 \approx B$，则规定 $\alpha \geqslant \beta$；若 A 与 B 不等势时，规定 $\alpha > \beta$.

结论 2：若 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$ 且 $\overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{A}}$，则 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.

结论 3：对于基数 $\overline{\overline{A}} = \alpha$，$\overline{\overline{B}} = \beta$，在下述三种关系中有且仅有一个成立：

$$\alpha = \beta, \alpha > \beta, \alpha < \beta$$

结论 4：若 $A \subset B \subset C$，且 $A \approx C$，则 $B \approx C$.

结论 5：基数的大小关系是序关系.

【重难点解析】

(一) 关于集合

集合概念是数学中最基本的概念之一，在数学中有其独特的作用．它是现代数学的重要基础，并且应用于许多科学技术领域之中．本节介绍的集合概念和集合运算是本课程的基础，它们在后续各章节中都有应用．因此，我们在学习本节内容时应该理解

集合的概念，了解元素与集合、集合与集合之间关系，熟练掌握集合的并、交、差集运算，掌握有关运算律的证明方法．

集合是一些具有某种共同特性的、可以区分的若干事件的全体．集合中的事件称为元素或点．

集合有以下三种表示方法：

列举法——列出集合的所有元素，并用花括号括起来．例如 $A=\{a,\ b,\ c,\ d\}$，$\mathbf{N}=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$．

描述法——将集合中元素的共同属性描述出来．例如 $B=\{x\mid x^2-1=0,\ x\in\mathbf{R}\}$，$\mathbf{Z}=\{x\mid x$ 是整数$\}$．

文氏图——用一个简单的平面区域表示一个集合，用区域内的点表示集合内的元素．如图 1－1 所示．

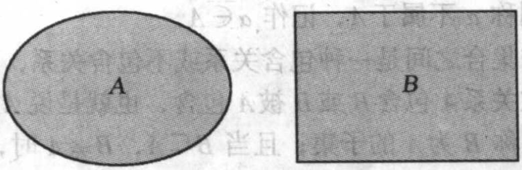

图 1－1

1．理解集合概念时应该注意：

（1）集合中的元素是确定的．也就是说，对集合 A，任一元素 a 或者属于 A 或者不属于 A，两者必居其一．若元素 a 属于集合 A，则用 $a\in A$ 表示，若不属于 A，则用 $a\overline{\in} A$ 表示．

（2）集合中的每个元素是可以互相区分开的．也就是说，在一个集合中不会重复出现相同的元素．例如集合 $\{a,\ b,\ b,\ c,\ d,\ d,\ d\}$ 与 $\{a,\ b,\ c,\ d\}$ 是一样的．

（3）组成一个集合的每个元素在该集合中是无次序的，可以任意列出．例如 $\{1,\ 2,\ 3\}$，$\{2,\ 3,\ 1\}$，$\{3,\ 1,\ 2\}$ 是同一集合的三种列举法．

（4）集合的元素可以是任何事物，甚至某一集合可以作为另一集合的元素．例如集合 $A=\{1,\ 2,\ \{a,\ b\}\}$，其中 $\{a,\ b\}$

是一个集合，但它又是 A 的元素.

(5) 对于集合元素的个数不作任何限制，它可以是有限个，例如 $A=\{a, b, c, d\}$，也可以是无限个，例如 $\mathbf{Z}=\{x \mid x$ 是整数$\}$. 一个集合若由有限个元素组成，称为有限集合；若由无限个元素组成，称为无限集合.

特别地，元素个数为零的集合称为空集，记作 $\varnothing$. 由集合 A 的所有子集组成的集合，称为 A 的幂集，记作 2^A. 若集合 A 是由 n 个元素所组成的有限集合，则幂集是由 2^n 元素组成.

2. 了解元素与集合、集合与集合之间关系时应该注意：

元素与集合之间是一种从属关系或不从属关系，当 α 是集合 A 中的元素，则称 α 属于 A，记作 $\alpha \in A$；若 α 不是集合 A 中的元素，则称 α 不属于 A，记作 $\alpha \overline{\in} A$.

集合与集合之间是一种包含关系或不包含关系，当两个集合 A 和 B 存在关系 A 包含 B 或 B 被 A 包含，也就是说 $A \supset B$ 或 $B \subset A$ 成立，则称 B 为 A 的子集；且当 $B \subset A$，$B \neq A$ 时，称 B 为 A 的真子集. 若 B 不是 A 的子集，即 $B \subset A$ 不成立时，则称 A 不包含 B.

因此，元素与集合、集合与集合之间关系以及表示这两种关系的符号一定不要混淆.

3. 通过文氏图进一步理解集合的并、交、差集的运算，通过练习熟练掌握这些运算.

设 A 和 B 是两个任意集合，所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合，称为集合与 B 的并集，即 $A \cup B=\{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$. 既属于 A 又属于 B 的所有元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的交集，即 $A \cap B=\{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$. 属于 A 而不属于 B 的所有元素组成的集合，称为 A 与 B 的差集（补集），即 $A-B=\{x \mid x \in A$ 但 $x \overline{\in} B\}$. 属于 A 而不属于 B 或属于 B 而不属于 A 的所有元素组成的集合，称为集合 A 和 B 的对称差，即 $A \triangle B=(A-B) \cup (B-A)$，对称差运算的另一种定义是 $A \triangle B=(A$

$\cup B) - (B\cap A)$.

如果两个集合 A 和 B 没有公共元素，即 $A\cap B=\emptyset$，称为集合 A 与 B 不相交.

并、交、差（补）、对称差集的文氏图如图 1-2 至图 1-5 所示.

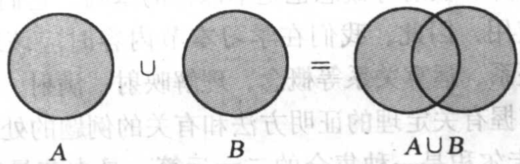

图 1-2

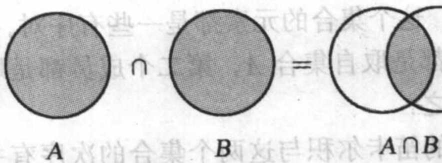

图 1-3

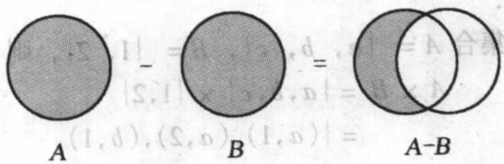

图 1-4

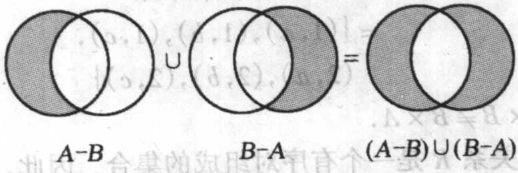

图 1-5

（二）关于关系与映射

世界上存在各种各样的事物，这些事物之间的相互联系，我们称之为“关系”．本节用统一的数学语言来描述这些表面看起来似乎无关的，但本质上却有其共性的“关系”．本节介绍的二元关系、运算和映射等概念也是本课程的基础，它们在后续各章节中都有应用．因此，我们在学习本节内容时应该理解笛卡尔积、二元关系、运算关系等概念，理解映射、满射、单射、双射等概念，掌握有关定理的证明方法和有关的例题的处理方法．

1．笛卡尔积是一种集合的二元运算，是本节最基本的概念之一．集合 A 与 B 的笛卡尔积 $A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,\ b\in B\}$ 是一个集合，这个集合的元素都是一些有序对，这些有序对中的第一个成员都是取自集合 A，第二个成员都是取自集合 B，不能随意取出写之．

集合 A，B 的笛卡尔积与这两个集合的次序有关．一般地，若 A 与 B 非空，只要 $A\neq B$，则有 $A\times B\neq B\times A$．也就是说交换律不成立．

例如，集合 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{1,2\}$，则

$$
\begin{aligned}
A\times B&=\{a,b,c\}\times\{1,2\}\\
&=\{(a,1),(a,2),(b,1),\\
&\quad(b,2),(c,1),(c,2)\}\\
B\times A&=\{1,2\}\times\{a,b,c\}\\
&=\{(1,a),(1,b),(1,c),\\
&\quad(2,a),(2,b),(2,c)\}
\end{aligned}
$$

所以 $A\times B\neq B\times A$．

2．二元关系 R 是一个有序对组成的集合．因此，一个二元关系是一个集合，可以用集合形式表示．但是任意一个集合就不一定是一个二元关系了，只有当这个集合是由有序对组成的，才能称为二元关系．