拓扑方法及其在分析中的应用

周　　毓　　麟

河　南　省　数　学　会　出　版

1　9　8　2

前　　　言

科学技术的深入发展使得很多化学、物理、生物以及工程等方面的工作者，不再局限于采用线性化、渐近展开等近似方法来处理非线性问题，而是有须要直接来探讨非线性问题的解的各种特性。拓扑方法是研究非线性问题的比较有效的方法之一。因此近年来拓扑方法引起了不少实际科学工作者们的注意。

在1972年作者以“不动点原理及其应用”为题编写了一份讲稿，主要内容是在一般分析的基础上介绍拓扑度理论及其应用。讲稿不要求读者具有拓扑学与泛函分析的预备知识，因此这些拓扑度理论中的主要概念的引进与主要命题的证明都尽量是分析的，此外也对泛函分析的概念作些简单介绍。为了不使讲稿篇幅过长，尤其是对于一些应用问题的预备知识的介绍尽量以够用为限。讲稿写成后，只在一部分同志间传看过。在1977年作者在所内以“关于拓扑方法与分歧解”为标题讲过以上讲稿的大部分内容，主要是讨论利用拓扑方法来研究一些非线性问题的解的存在性问题。当时讲课的对象中有物理、力学、计算数学等方面工作的同志，因此讲解就尽可能形象些，封闭些，并且更着重于方法的应用。因此应用问题也尽量选得比较地不太复杂，可以把利

用拓扑方法讨论非线性问题的步骤与方法说明得更具体些更清楚些。对于分歧现象问题只是通过举例等作了些简单的介绍，没有作详细的讨论。拓扑方法在非线性偏微分方程理论方面的大量应用没有在这里作很多的介绍。

本文仍按如上的思路与意图在以上讲稿的基础上改写而成的。本文的部分内容是首次编写的没有作多少推敲，因此会有不少不妥之处的。

目　　录

§1.连续映象的拓扑度

1. 设E_t^n为n维欧氏空间，它的变量为$t=(t_1, t_2, \cdots, t_n)$，并且以坐标变量的次序$(t_1, t_2, \cdots t_n)$来表示空间$E_t^n$的定向．设在$E_t^n$中有$n+1$个线性无关的点$t^k=(t_1^k, t_2^k, \cdots, t_n^k)$ $(k=0, 1, \cdots n)$，点集

$$\sigma^n=\left\{t \;\middle|\; t=\sum_{K=o}^{n} u_k t^k, \quad \sum_{K=o}^{n} u_k=1, u_k>0 \quad (k=0, 1, \cdots, n)\right\}$$

称为n维几何单纯形，记作$\sigma^n=[t^0, t^1, \cdots, t^n]$．如果行列式

$$|(t_i^k-t_i^o)| \qquad (i, k=1, \cdots, n)$$

为正时，称σ^n为正定向；为负时，称σ^n为负定向，分别记作$\pm\sigma^n$．n维定向几何单纯形σ^n的边界为

$$\partial\sigma^n=\partial[t^0, t^1, \cdots, t^n]=\sum_{k=o}^{n}(-1)^k[t^0, \cdots, \hat{t}^k, \cdots, t^n]=\sum_{k=o}^{n}(-1)^k\sigma_k^{n-1},$$

其中符号“∧”表示去掉这个顶点．因此，σ^n的定向就感应出各个边界$n-1$维几何单纯形的定向．

设有一个几何单纯形的有限集合$\{\sigma_k\}$，如果它的任意两个单纯形σ_k，σ_h的交集是一个几何单纯形（空集ϕ可以看作是个-1维的几何单纯形），我们就称这个集合为几何复合形．如果几何复合形中的几何单纯形最高维数为n，而任意低维几何单纯形都是高维几何单纯形的边界部分，则此集合称为n维齐次几何复合形．

在n维欧氏空间E_x^n中，有有界开集D，$\overline{D}$为D的闭包，$\partial D=\overline{D}\setminus D$为可定向的流形或准流形．假定开集D可以单纯分割为有限的n维齐次复合形$K\{\sigma_k\}$，也就说在E_t^n中有一个n维齐次几何复合$P\{\sigma_k\}\subset E_t^n$与$K\{\sigma_k\}$拓扑等价即在P与D之间存在有一个一一对应的双向连续映象$T: P\to D$，$T^{-1}: D\to P$。

在以下的讨论中，所用到的有界开集D，都假定具有以上性质，为了行文简单起见，并不在每次提到开集D时，叙述这些性质．

这种区域的最简单的例子是在E_x^n中的球体$\overline{D}=\{x \mid |x|\le R\}$，其中R为正常数．

2. 设有n维欧氏空间，变量为$y=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$．从闭区域$\overline{D}\subset E_x^n$到$E_y^n$中的任意映象$f: \overline{D}\to E_y^n$，可以用方程

$$y_i=f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

来表示，其中$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in\overline{D}$，$f_i$ $(i=1, \cdots, n)$为x的单值函数．如果f_i为x的连续函数，我们这个映象$f: \overline{D}\to E_y^n$为从$\overline{D}$到E_y^n的连续映象．如果f_i为x的连续可微或光滑函数，则称映象为连续可微的映象或光滑的映象．

设在曲面∂D有局部坐标系$u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}$，曲面$\partial D$上的点$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$可用关系式来表示

$$x_j=x_j(u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}) \qquad (j=1, 2, \cdots, n)$$

把这些表达式代入函数f_i（$i=1, 2, \cdots, n$）中，映象$f: \overline{D}\to E_y^n$在$\overline{D}$的边界∂D上可以用局部坐标表示为

$$y_i=\tilde{f}_i(u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}), \quad (i=1, 2, \cdots, n),$$

其中$\tilde{f}_i$是函数f_i（$i=1, 2, \cdots, n$）中把x_j（$j=1, 2, \cdots, n$）用局部坐标变换关系式代替而得到的。

首先考虑块块（有限块）连续可微映象$f: \overline{D}\to E_y^n$的情况。设固定点$z\in E_y^n$不属于区域D的边界∂D的象集$f(\partial D)$，即$z\overline{\in} f(\partial D)$。

定义1.1. 如果块块连续可微映象$f: \overline{D}\to E_y^n$适合条件$z\overline{\in} f(\partial D)$，其中D为$E_x^n$中的有界开集，z为$E_y^n$中的固定点，则此映象对z点的拓扑度为

$$d[f,D,z]=\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial D}\begin{vmatrix} y_1-z_1, & y_2-z_2 \cdots, & y_n-z_n \\ \frac{\partial y_1}{\partial u_1}, & \frac{\partial y_2}{\partial u_1}, \cdots, & \frac{\partial y_n}{\partial u_1}, \\ \cdots & \cdots & \\ \frac{\partial y_1}{\partial u_{n-1}}, & \frac{\partial y_2}{\partial u_{n-1}}, \cdots, & \frac{\partial y_n}{\partial u_{n-1}} \end{vmatrix}\frac{du_1\cdots du_{n-1}}{|y-z|^n}, \tag{1}$$

其中$z=(z_1, z_2, \cdots, z_n)$，$|y|=\left(\sum\limits_{i=1}^n y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$表示n维空间的欧氏范数，又$\omega_n$为n维单位球的表面积

$$\omega_n=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}. \tag{2}$$

在（1）式中的积分式可以写成以下形式

$$\int_{\partial D}\sum_{i=1}^n(-1)^{i-1}\frac{y_i-z_i}{|y-z|^n}\ \frac{\partial(y_1, \cdots, \hat{y}_i, \cdots, y_n)}{\partial(u_1, \cdots, u_{n-1})}du_1du_2\cdots du_{n-1} \tag{3}$$

其中$\frac{\partial(y_1, \cdots, \hat{y}_i, \cdots, y_n)}{\partial(u_1, \cdots, u_{n-1})}$（$i=1, 2, \cdots, n$）为变量$y_1, \cdots, y_{i-1}, y_{i+1}, \cdots, y_n$对$u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}$的Jacobi函数行列式。由此，此积分还能写成形式

$$\int_{f(\partial D)}\sum_{i=1}^n\frac{y_i-z_i}{|y-z|^n}(-1)^{i-1}dy_1\cdots d\hat{y}_i\cdots dy_n. \tag{4}$$

这说明，积分值与曲面∂D的局部坐标系的选取无关，因而验证了定义1。

从以上的讨论，可以看到，映象的拓扑度只与象集$f(\partial D)$有关而与象集$f(D)$无关，因此在定义中也就只需要要求映象f在∂D上有光滑性就行了。

对于以上映象，作映象$g: \overline{D}\to E_y^n$：对于任意$x\in\overline{D}$,

$$g(x)=f(x)-z,$$

因而坐标系的原点$O\overline{\in} g(\partial D)$，这样从定义可以看到，映象$f: \overline{D}\to E_y^n$对z点的拓扑度等于映象$g: D\to E_y^n$对于原点的拓扑度，即

$$d[f,D,z]=d[g,D,o],$$

或

$$d[f,D,z]=d[f-z,D,o]. \tag{5}$$

3. **引理1.1.** 设块块连续可微映象$f:\overline{D}\to E_z^n$适合条件$z\in f(\partial D)$，其中D 为E_z^n中的有界开集，z为E_z^n中的固定点．这样，映象$f:\overline{D}\to E_z^n$对z 点的拓扑度$d[f,D,z]$等于象集$f(\partial D)$对z点所张的n维立体角对n维全立体角ω_n的倍数．

证： 考虑单位向量

$$w=\frac{y-z}{|y-z|}$$

在∂D上沿参变量u_j（$j=1,2,\cdots,n-1$）方向的导数$\frac{\partial w}{\partial u_j}$（$j=1,2,\cdots,n-1$）．因为

$$\left(w,\ \frac{\partial w}{\partial u_j}\right)=\frac{1}{2}\ \frac{\partial}{\partial u_j}\left(\sum_{i=1}^{n}w_i^2\right)=0,$$

其中（A,B）表示向量A与B的数量积，所以向量$\frac{\partial w}{\partial u_j}$（$j=1,2,\cdots,n-1$）是正交于单位向量w的．由n个向量w，$\frac{\partial w}{\partial u_1}du_1$，$\frac{\partial w}{\partial u_2}du_2,\cdots$，$\frac{\partial w}{\partial u_{n-1}}du_{n-1}$所组成的n维平行多面体的体积为（注）：

$$dJ=\begin{vmatrix} w_1, & w_2, & \cdots, & w_n \\ \frac{\partial w_1}{\partial u_1}du_1, & \frac{\partial w_2}{\partial u_1}du_1, & \cdots, & \frac{\partial w_n}{\partial u_1}du_1 \\ \cdots & \cdots & & \\ \frac{\partial w_1}{\partial u_{n-1}}du_{n-1}, & \frac{\partial w_2}{\partial u_{n-1}}du_{n-1}, & \cdots, & \frac{\partial w_n}{\partial u_{n-1}}du_{n-1} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

这个行列式除去一个因子$|y-z|^{-n}du_1du_2\cdots du_{n-1}$后可写成

$$\begin{vmatrix} y_1-z_1, & y_2-z_2, & \cdots, & y_n-z_n \\ \frac{\partial y_1}{\partial u_1}+(y_1-z_1)A_1, & \frac{\partial y_2}{\partial u_1}+(y_2-z_2)A_1, & \cdots, & \frac{\partial y_n}{\partial u_1}+(y_n-z_n)A_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_1}{\partial u_{n-1}}+(y_1-z_1)A_{n-1}, & \frac{\partial y_2}{\partial u_{n-1}}+(y_2-z_2)A_{n-1}, & \cdots, & \frac{\partial y_n}{\partial u_{n-1}}+(y_n-z_n)A_{n-1} \end{vmatrix}, \tag{8}$$

其中$A_j=|y-z|\frac{\partial}{\partial u_j}\ \frac{1}{|y-z|}$（$j=1,2,\cdots,n-1$）．把这个行列式对$A_j$（$j=1,2,\cdots,n-1$）展开．不包含$A_j$（$j=1,2,\cdots,n-1$）的项为

$$\triangle = \begin{vmatrix} y_1 - z_1, & y_2 - z_2, & \cdots, & y_n - z_n \\ \frac{\partial y_1}{\partial u_1}, & \frac{\partial y_2}{\partial u_1}, & \cdots, & \frac{\partial y_n}{\partial u_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_1}{\partial u_{n-1}}, & \frac{\partial y_2}{\partial u_{n-1}}, & \cdots, & \frac{\partial y_n}{\partial u_{n-1}} \end{vmatrix}. \tag{9}$$

展开式的其余部分，就是把行列式△中至少一个行的元素分别用矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & , & 0 & , & \cdots, & 0 \\ (y_1-z_1)A_1 & , & (y_2-z_2)A_1, & & \cdots, & (y_n-z_n)A_1 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots \\ (y_1-z_1)A_{n-1}, & & (y_2-z_2)A_{n-1}, & & \cdots, & (y_n-z_n)A_{n-1} \end{pmatrix} \tag{10}$$

中相应的行的元素来代替，这样所有可能得到的行列式的总和。代替了二行或二行以上所得到的行列式显然都是等于零的，所以行列式（8）的展开式中除了行列式△ 以 外，只剩下在行列式△中只有一行用矩阵（10）中相应行代替而得到的那些行列式，即还有

$$\sum_{i=1}^{N} \begin{vmatrix} y_1 - z_1, & \cdots, & y_{i-1} - z_{i-1}, & 0 \quad , & y_{i+1} - z_{i+1}, \cdots, & y_n - z_n \\ \frac{\partial y_1}{\partial u_1}, & \cdots, & \frac{\partial y_{i-1}}{\partial u_1}, & (y_i - z_i)A_1, & \frac{\partial y_{i+1}}{\partial u_1}, \cdots, & \frac{\partial y_n}{yu_1} \\ \cdots & \cdots, & \cdots & \cdots & \cdots \quad \cdots & \\ \frac{\partial y_1}{\partial u_{n-1}}, \cdots, & & \frac{\partial y_{i-1}}{\partial u_{n-1}}, & (y_i - z_i)A_{n-1}, & \frac{\partial y_{i+1}}{\partial u_{n-1}}, \cdots, & \frac{\partial y_n}{\partial u_{n-1}} \end{vmatrix} \tag{11}$$

把（11）式对A_j（$j=1,2,\cdots,n-1$）展开，经化简后，（11）式变为

$$\sum_{j=1}^{n-1} \tilde{\triangle}_j A_j$$

其中$\tilde{\triangle}_j$可以这样得到，在行列式△中，把第 $j+1$列换成 $(y_1-z_1, y_2-z_2, \cdots, y_n-z_n)$ 而得到的行列式，显然有$\tilde{\triangle}_j=0$（$j=1, 2, \cdots, n-1$）。于是（11）式等于零。因此，关系式（7）可写成

$$dJ = \triangle \frac{du_1 du_2 \cdots du_{n-1}}{|y-z|^n}$$

因为w是单位向量，它与其余（$n-1$）个向量$\frac{\partial w}{\partial u}du_j$（$j=1, 2, \cdots, n-1$）都垂直，所以（$n-1$）个向量 $\frac{\partial w}{\partial u_j}du_j$（$i=1, 2, \cdots, n-1$）所组成的（$n-1$）维平行多面体的体积元也等于dJ。因此dJ就是这($n-1$)个向量所组成的（$n-1$）维体积元对z点所张的立体角元，所以在(1)式中的积分是象集$f(\partial D)$对$z\in E_y^n$所张的立体角，证毕。

注：设在n维空间中有m个线性无关的向量$\upsilon_1, \upsilon_2, \cdots, \upsilon_m$，这m个向量所组成的m维平行多面体的m维体积$\triangle_{n,m}$为

$$\triangle^2_{m,m}=\begin{vmatrix}(v_1, v_1), & (v_1, v_2), & \cdots, & (v_1, v_m)\\ (v_2, v_1), & (v_2, v_2), & \cdots, & (v_2, v_m)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (v_m,v_1), & (v_m,v_2), & \cdots, & (v_m, v_m)\end{vmatrix}.$$

利用数学归纳法来证明这个公式。当$m=1$时，这公式是显然成立的。设$m=k-1$时，这公式已经证明成立，现在要证明当$m=k$时，以上公式仍然成立。作向量

$$v^*=v_k+\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i v_i,$$

其中α_i ($i=1, 2, \cdots, k-1$)是待定常数，要取得使v^*与v_j ($j=1, 2, \cdots, k-1$) 正交即$(v_i^*, v_j)=0$ ($j=1, 2, \cdots, k-1$,.常数α_i ($i=1, 2, \cdots, k-1$) 适合线性方程组

$$(v_k, v_j)+\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i(v_i, v_j)=0.$$

解得α_i ($i=1, 2, \cdots, k-1$) 为

$$\alpha_i=\frac{(-1)^{k-i}}{\triangle^2_{n,k-1}}\begin{vmatrix}(v_1, v_1), & \cdots, & (\widehat{v_1, v_i}), & \cdots, & (v_1, v_k)\\ (v_2, v_1), & \cdots, & (\widehat{v_2, v_i}), & \cdots, & (v_2, v_k)\\ \cdots & & \cdots & & \cdots\\ (v_{k-1}, v_1), & \cdots, & (\widehat{v_{k-1}, v_i}), & \cdots, & (v_{k-1}, v_k)\end{vmatrix},$$

其中符号“∧”仍表示去掉这些元素。从向量v^*的作法，知道

$$\triangle^2_{n,k}=(v^*, v^*)\triangle^2_{n,k-1},$$

或为

$$\triangle^2_{n,k}=\left[(v_k, v_k)+\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i(v_i, v_k)\right]\triangle^2_{n,k-1}.$$

再把α_i ($i=1, 2, \cdots, k-1$) 的表示式代入，得

$$\triangle^2_{n,k}=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}(v_k, v_i)\begin{vmatrix}(v_1, v_1), & \cdots, & (\widehat{v_1, v_i}), & \cdots, & (v_1, v_k)\\ (v_2, v_1), & \cdots, & (\widehat{v_2, v_i}), & \cdots, & (v_2, v_k)\\ \cdots & & \cdots & & \cdots\\ (v_{k-1}, v_1), & \cdots, & (\widehat{v_{k-1}, v_i}), & \cdots, & (v_{k-1}, v_k)\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}(v_1, v_1), & (v_1, v_2), & \cdots, & (v_1, v_k)\\ (v_2, v_1), & (v_2, v_2), & \cdots, & (v_2, v_k)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (v_k, v_1), & (v_k, v_2), & \cdots, & (v_k, v_k)\end{vmatrix}$$

公式证明完毕。

4．引理1.2． 设块块连续可微映象$f: \bar{D}\to E^n_y$，适合条件$z\bar{\in} f(\dot{D})$，即Z不属于映象对整个闭区域D的象集$f(\bar{D})$，其中D为E^n_x中的有界开集，Z为E^n_y的固定点。这样，此映象对Z点的拓扑度等于零。

证：利用n维空间中的Green-Stokes公式，就有

$$\int_{\partial D} dJ = \int_{f(\partial D)} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i - z_i}{|y-z|^n} (-1)^{i-1} dy_1 \cdots d\hat{y}_i \cdots dy_n =$$

$$= \int_{f(\overline{D})} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{y_i - z_i}{|y-z|^n} \right) dy_1 \cdots dy_n \tag{13}$$

在$|y-z| \neq 0$处，

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{y_i - z_i}{|y-z|^n} \right) = 0 \tag{14}$$

在（13）式中最右边部分的被积函数在整个积分区域上等于零，因而得出引理的结论。

引理1.3. 设对两个已知块块连续可微映象f_0；$f_1 : \overline{D} \to E_y^n$，存在一个块块连续可微映象$F : \overline{D} \times I \to E_y^n$，适合以下条件：

$$F(x,0) \equiv f_0(x), \quad F(x,1) \equiv f_1(x), \quad x \in \overline{D};$$
$$F(x,\lambda) \neq z, \quad x \in \partial D, \ 0 \leq \lambda \leq 1, \tag{15}$$

其中D为E_x^n中的有界开集，I 表示区间$0 \leq \lambda \leq 1$，$\overline{D} \times I$表示闭区域$\overline{D}$与闭区间I的直接拓扑乘积，z为E_y^n中的一个固定的点。映象f_0，$f_1 : \overline{D} \to E_y^n$对于z点的拓扑度相等，即

$$d〔f_0, D, z〕= d〔f_1, D, z〕. \tag{16}$$

证： 从关系式

$$\partial(\partial D \times I) = \partial D \times (\lambda = 1) - \partial D \times (\lambda = 0) \tag{17}$$

与n维空间的Green-Stokes公式，得到积分关系式

$$\int_{F(\partial(\partial D \times I))} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{y_i - z_i}{|y-z|^n} dy_1 \cdots d\hat{y}_i \cdots dy_n =$$

$$= \int_{F(\partial D \times I)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{y_i - z_i}{|y-z|^n} \right) dy_1 \cdots dy_n \tag{18}$$

从条件（15），可知对任意$(x, \lambda) \in \partial D \times I$，$F(x, t) \neq z$，（18）式右边积分中的被积函数在整个积分区域$F(\partial D \times I)$上都等于零，而（18）式的左边等于

$$\omega_n (d〔f_1, D, z〕- d〔f_0, D, z〕),$$

这就证实了引理的结论。

引理 3 可以写成更为一般的形式。

引理1.3′. 设块块连续可微映象$F : \overline{D} \times I \to E_y^n$与$z : I \to E_y^n$适合条件

$$z_\lambda \overline{\in} f_\lambda(\partial D),$$

其中D为E_x^n中的有界开集，I 为闭区间$0 \leq \lambda \leq 1$；记$z_\lambda = z(\lambda)$，$f_\lambda(x) = F(x, \lambda)$，$0 \leq \lambda \leq 1$，$x \in \overline{D}$. 这样，映象$f_\lambda : \overline{D} \to E_y^n$对$z_\lambda$的拓扑度$d〔f_\lambda, D, z_\lambda〕$是一个不依赖于$\lambda$的常数，即

$$d〔f_\lambda, D, z_\lambda〕= 常数 \ (0 \leq \lambda \leq 1). \tag{19}$$

作块块连续可微映象$G : \overline{D} \times I \to E_y^n$，对于$0 \leq \lambda \leq 1$与$x \in \overline{D}$，有

$$G(x,\lambda)=F(x,\lambda)-z(\lambda),$$

则对于映象G，引理1.3′就变成引理1.3了。

5．现在定义任意连续映象的拓扑度．

定义1.2． 设$f:\overline{D}\to E_y^n$为连续映象，对于任意$x\in\partial D$，$f(x)\neq z$，其中D为E_x^n中的有界开集，z为E_y^n中的固定点．此外，又设$f_k:\overline{D}\to E_y^n\ (k=1,2,\cdots)$为块块连续可微映象的序列，并且满足以下条件：

（i）对$x\in\partial D$，$f_k(x)\neq z\ (k=1,2,\cdots)$；（ii）当$k\to\infty$时，映象$f_k$在$\overline{D}$上一致收敛于映象f．

这样，连续映象$f:\overline{D}\to E_y^n$对z点的拓扑度$d[f,D,z]$定义为

$$d\left[f,D,z\right]=\lim_{k\to\infty}d\left[f_k,D,z\right] \tag{20}$$

以下验证定义的有效性．

先要说明，对于给定的连续映象，可以作出任意逼近的块块连续可微的映象．

因为映象$f:\overline{D}\to E_y^n$是连续的，$\overline{D}$是有界的闭集，所以对于任意取定的$\varepsilon>0$，可以找到$\delta(\varepsilon)>0$，对于任意$x_1,x_2\in\overline{D}$，当$|x_1-x_2|<\delta(\varepsilon)$时，

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon \tag{21}$$

因为$\overline{D}$是有界闭集，对于任意$\delta>0$，有有限δ-网集$\{x^j\}\ (j=1,2,\cdots,m(\delta))$其中$m(\delta)$为依赖于δ的正整数，即对于任意$x\in\overline{D}$，在这个有限δ—网集$\{x^j\}$中至少可以找到一点$x^j$，

$$|x-x^j|<\delta,$$

作函数

$$\mu_j(x)=\begin{cases}C_\delta\exp\left(\dfrac{|x-x^j|^2}{|x-x^j|^2-\delta^2}\right), & \text{对}|x-x^j|<\delta,\\ 0, & \text{对}|x-x^j|\geq\delta,\end{cases} \tag{22}$$

其中C_δ为给定常数，例如取

$$C_\delta=\frac{1}{\omega_n}\left(\int_0^\delta\exp\left(\frac{\xi^2}{\xi^2-\delta^2}\right)d\xi\right)^{-1}. \tag{23}$$

不难看出，函数$\mu_j(x)\ (j=1,2,\cdots,m(\delta))$都是非负的无穷次连续可微的函数．作映象$f^*:\overline{D}\to E_y^n$：对于$x\in D$，取

$$f^*(x)=\frac{\sum\limits_{j=1}^{m(\delta)}\mu_j(x)f(x^j)}{\sum\limits_{j=1}^{m(\delta)}\mu_j(x)} \tag{24}$$

因为$\{x^j\}$是闭集$\overline{D}$的有限δ—网集，所以对于任意$x\in\overline{D}$，函数$\mu_j(x)\ (j=1,2,\cdots,m(\delta))$中至少有一个大于零的，因此，对$x\in\overline{D}$，

$$\sum_{j=1}^{m(\delta)}\mu_j(x)>0, \tag{25}$$

这样，所作出的映象$f^*:\bar{D}\to E_y^n$是无穷次连续可微的映象，因此也是块块连续可微的映象。此外，对于$x\in\bar{D}$，

$$|f(x)-f^*(x)|\leq \sum_{j=1}^{m(\delta)}\mu_j(x)|f(x)-f(x^j)|\Big/\sum_{i=1}^{m(\delta)}\mu_i(x).$$

因为对于满足$|x-x^j|<\delta$的j，$|f(x)-f(x^j)|<\varepsilon$，而对于$|x-x^j|\geq\delta$的j，$\mu_j(x)=0$，所以对于任意$x\in\bar{D}$，有

$$|f(x)-f^*(x)|<\varepsilon \tag{26}$$

从假定$z\bar{\in}f(\partial D)$，则存在常数$d_0>0$，

$$d_0=\min_{y\in f(\partial D)}|z-y|, \tag{27}$$

d_0是z点与闭集$f(\partial D)$之间的距离，如果取$\varepsilon<d_0$，则对于$x\in\partial D$，

$$|z-f^*(x)|\geq|z-f(x)|-|f(x)-f^*(x)|>d_0-\varepsilon>0, \tag{28}$$

即$z\bar{\in}f^*(\partial D)$。综上所述，对于给定的连续映象$f:\bar{D}\to E_y^n$，作出了无穷次连续可微映象$f^*:\bar{D}\to E_y^n$，$f^*$可以任意逼近f，而且$z\bar{\in}f^*(\partial D)$。

其次要说明，连续映象$f:\bar{D}\to E_y^n$的拓扑度不依赖于光滑的逼近映象序列的选取。

设有两个块块连续可微映象f_0，$f_1:\bar{D}\to E_y^n$，
适合条件$Z\bar{\in}f_0(\partial D)$，$z\bar{\in}f_1(\partial D)$，而且对于$x\in\bar{D}$，

$$|f(x)-f_0(x)|<\varepsilon,\qquad |f(x)-f_1(x)|<\varepsilon.$$

容易证明：如果 $\varepsilon<d_0$，则

$$d[f_0,D,z]=d[f_1,D,z], \tag{29}$$

其中d_0即(27)所定义的常数。作映象$F:\bar{D}\times I\to E_y^n$如下：对于$x\in\bar{D}$与$0\leq\lambda\leq1$，取

$$F(x,\lambda)=\lambda f_1(x)+(1-\lambda)f_0(x).$$

显然映象$F:\bar{D}\times I\to E_y^n$是块块连续可微的。对于每个$x\in\partial D$，联接$f_0(x)$与$f_1(x)$的线段是不经过Z点的，$|z-F(x,\lambda)|\leq\lambda|z-f_1(x)|+(1-\lambda)|z-f_0(x)|<\varepsilon$，所以对于$x\in\partial D$与$0\leq\lambda\leq1$，

$$F(x,\lambda)\neq z.$$

根据引理1.3，映象$f_0,f_1:\bar{D}\to E_y^n$对Z点的拓扑度相等。这说明连续映象$f:\bar{D}\to E_y^n$的拓扑度不依赖于逼近序列的选取。

定义1.2对连续映象的拓扑度是唯一地确定的。

从以上的讨论可以看出，定义1.2还能换成如下形式：

定义1.2′. 设连续映象$f:\bar{D}\to E_y^n$具有性质$z\bar{\in}f(\partial D)$，其中D为E_x^n的有界开集，z为E_y^n的固定点。设d_0为Z点与象集$f(\partial D)$之间的距离，即$d_0=\min\limits_{y\in f(\partial D)}\left|z-y\right|$。设有块块连续可微映象$f^*:\bar{D}\to E_y^n$，适合条件：对$x\in\bar{D}$，有$|f(x)-f^*(x)|<\varepsilon<d_0$，其中ε为常数。这样，连续映象$f:\bar{D}\to E_y^n$对Z点的拓扑度$d[f,D,z]$定义为

$$d[f,D,Z]=d[f^*,D,z]. \tag{31}$$

6. 定理1.1. 设D_1与D_2为在E_x^n中不相交的两个有界开集，$D_1\cap D_2=\phi$，设有连续映象

$f: \bar{D} \to E_y^n$，其中$D = D_1 \cup D_2$，$z \bar{\in} f(\partial D)$，$z$为$E_y^n$的固定点，这样，

$$d[f,D,z] = d[f,D_1,z] + d[f,D_2,z]. \tag{32}$$

此定理可以直接从定义1.1与定义2得来。

定理1.2. 设连续映象$f: \bar{D} \to E_y^n$具有性质$z \bar{\in} f(\partial D)$，其中$D \subset E_x^n$为有界开集，$z \in E_y^n$为固定点，如果$d[f,D,z] \neq 0$，即连续映象$f$对$z$的拓扑度不等于零，则至少存在一点$x^* \in D$，使得$f(x^*) = z$。

证：假定不存在$x^* \in D$使得$f(x^*) = z$，因而对于任意$x \in \bar{D}$，$f(x) \neq z$，即$x \bar{\in} f(\bar{D})$，这样，就存在整数$\varepsilon > 0$，使得，对$x \in \bar{D}$，

$$|f(x) - z| > \varepsilon$$

作充分逼近于连续映象$f: \bar{D} \to E_y^n$的块块连续可微映象$f^*: \bar{D} \to E_y^n$，使得对$x \in \bar{D}$

$$|f(x) - f^*(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

这样，对于$x \in \bar{D}$，有

$$|f^*(x) - z| > \frac{\varepsilon}{2}$$

因而$z \bar{\in} f^*(\bar{D})$。根据引理1.2，有$d[f^*,D,z] = 0$，从定义1.2，得$d[f,D,z] = 0$，这与定理的假定相矛盾，因此定理证毕。

定理1.3 设连续映象$F: \bar{D} \times I \to E_y^n$与$z: I \to E_y^n$适合条件：$z_\lambda \bar{\in} f_\lambda(\partial D)$，其中$D \subset E_x^n$为有界开集，$I$为闭区间$0 \le \lambda \le 1$；对于$x \in \bar{D}$，$0 \le \lambda \le 1$，$z_\lambda = z(\lambda)$，$f_\lambda(x) = F(x,\lambda)$。这样连续映象$f_\lambda: \bar{D} \to E_y^n$对$z_\lambda(0 \le \lambda \le 1)$的拓扑度$d[f_\lambda,D,z_\lambda]$为不依赖于$\lambda$的常数，即

$$d[f_\lambda, D, z_\lambda] = \text{常数}. \tag{33}$$

证：不难看出，存在这样正数$\varepsilon > 0$，使得对任意$x \in \bar{D}$，$\lambda \in I$，有

$$|f_\lambda(x) - z_\lambda| > \varepsilon$$

其中　$\varepsilon < d_0$而　$$d_0 = \min_{x \in \partial\bar{D}, \lambda \in I} |z_\lambda - F(x,\lambda)|$$

根据在定义1.2的验证中同样的做法，可以作出，块块连续可微映象$F^*: \bar{D} \times I \to E_y^n$与$z^*: I \to E_y^n$，使得对于$x \in \bar{D}$，$\lambda \in I$成立不等式

$$|z_\lambda - z_\lambda^*| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |f_\lambda(x) - f_\lambda^*(x)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

其中对$x \in \bar{D}$，$\lambda \in I$，有$z_\lambda^* = z^*(\lambda)$，$f_\lambda^*(x) = F^*(x,\lambda)$。于是，对于$x \in \bar{D}$，$\lambda \in I$，有关系式

$$|z_\lambda^* - f_\lambda^*(x)| > \frac{\varepsilon}{3}.$$

由引理1.3′，得出

$$d[f_\lambda^*, D, z_\lambda^*] = \text{常数}\ (0 \le \lambda \le 1)$$

又从定义1.2′，得到

$$d[f_\lambda, D, z_\lambda] = d[f_\lambda^*, D, z_\lambda^*].$$

定理证毕。

7. 引理1.4. 设$f(x)$为在有界闭集$F\subset E^n$上的连续函数.存在在整个E^n上连续的函数$g(x)$，对于$x\in F$，有$f(x)=g(x)$

（这是Tiefze定理的一种特殊情况）

证：对一个固定的$a\in E^n$，作一个在$E^n\setminus F$中的函数$h(x,a)$：对$x\in E^n\setminus F$，

$$h(x,a)=\max\left\{2-\frac{|x-a|}{\min\limits_{y\in F}|x-y|},0\right\}. \tag{34}$$

显然函数$h(x,a)$是连续的，并且$0\leq h(x,a)\leq 2$. 取$\{a_k\}$为在F上稠密的序列点，即对F中的任意点x的任意邻域内至少有序列$\{a_k\}$的一个点. 作函数

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & x\in F; \\ \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{\infty}2^{-k}h(x,a_k)f(a_k)}{\sum\limits_{k=1}^{\infty}2^{-k}h(x,a_k)}, & x\overline{\in}F. \end{cases} \tag{35}$$

不难看出，对$x\in E^n$，有

$$|g(x)|\leq\max_{y\in F}|f(y)|. \tag{36}$$

函数$g(x)$分别在闭集F上与在开集$E^n\setminus F$上是连续的. 为了证明$g(x)$在E^n中连续，只需要证明：对于每个序列$\{x_i\}$（$i=1,2\cdots$），$\lim\limits_{i\to\infty}x_i=x_0\in F$,则$\lim\limits_{i\to\infty}g(x_i)=f(x_0)$.

对于任意取定的正数$\varepsilon>0$，可以找到$\delta(\varepsilon)>0$,对于任意$x,x'\in F$，当$|x-x'|<\delta$时，$|f(x)-f(x')|<\varepsilon$，因为$f(x)$在闭集F上是连续的.因为$\{x_i\}$在$i\to\infty$时的极限为$x_0\in F$，可以取得$I(\delta)$，当$i\geq I(\delta)$时，$|x_i-x_0|<\delta/3$. 对于每个$i\geq I(\delta)$所有使

$$h(x_i,a_k)\neq 0$$

的a_k，具有关系式

$$|a_k-x_i|<2\min_{y\in F}|x_i-y|\leq 2|x_i-x_0|<\frac{2}{3}\delta.$$

因此，在表示式

$$g(x_i)=\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty}2^{-k}h(x_i,a_k)f(a_k)}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}2^{-k}h(x_i,a_k)}$$

中有贡献的那些$f(a_k)$都适合不等式

$$f(x_0)-\varepsilon<f(a_k)<f(x_0)+\varepsilon,$$

因为，对这些a_k，$|a_k-x_0|<|a_k-x_i|+|x_i-x_0|<\delta$.

所以对于$i\geq I(\delta)$，有

$$f(x_0)-\varepsilon<g(x_1)<f(x_0)+\varepsilon.$$

引理证毕.

定理1.4. 设连续映象$f:\overline{D}\to E_r^n$具有性质$z\overline{\in}f(\partial D)$，其中$D\subset E_r^n$为有界开集，z为$E_r^n$中的已知点，这样拓扑度$d[f,D,z]$为整数.

证：设正数$\varepsilon>0$具有性质：对于$x\in\partial D$,

$$|f(x)-z|>\varepsilon$$

设在$\overline{D}$与一个n维齐次几何复合形$P\subset E_r^n$之间有一个一对一双向连续映象$T:P\to\overline{D}$，$T^{-1}:\overline{D}\to P$.因此，对于$t\in T^{-1}(\partial D)$,

$$|fT(t)-z|>\varepsilon$$

重复地对这个n维齐次几何复合形进行重心单纯分割，使得它的每个单纯形σ的直径小于$\delta(\varepsilon)$.（所谓重心单纯分割是把每单纯形及其各维边界单纯形的重心相互联接起来，形成分细的单纯形.经重心单纯分割的几何复合形仍是个几何复合形.）而数$\delta(\varepsilon)$是这样选取的，使得对于任意$t,t'\in P$，在$|t-t'|<\delta(\varepsilon)$时，$|fT(t)-fT(t')<\frac{\varepsilon}{4}$. 对于每个单纯形$\sigma^n=[a^0,a^1\cdots,a^n]$的$n+1$个顶点$a^0$，$a^1$，…，$a^n$的象$fT(a^0)$，$fT(a^1)$，…，$fT(a^n)$，取$n+1$个点$b^0,b^1,\cdots b^n$，使得以下条件成立：

(i) $|fT(a^i)-b^i|<\frac{\varepsilon}{8}, i=0,1,\cdots,n.$

(ii) $b^0,b^1\cdots,b^n$线性无关.

(iii) 如果σ^n的某个边界$n-1$维单纯形$[a^0\cdots\hat{a}^i\cdots a^n]$属于$T^{-1}(\partial D)$，则对应的$n-1$维单纯形$[b^0,\cdots,\hat{b}^i,\cdots b^n]$所在的$n-1$维超平面不经过Z点。

(iv) 在(iii)中的那些$n-1$维单纯形没有两个在同一个超平面上.

定义映象$h:P\to E_r^n$：对应于P中的任一个单纯形σ^n中的任一点

$$t=\sum_{k=0}^{n}u_ka^k,\quad \sum_{k=0}^{n}u_k=1,\quad u_k\geq0\ (k=0,1,\cdots,n),$$

有

$$h(t)=\sum_{k=0}^{n}u_kb^k\in E_r^n$$

不难看出，映象$h:P\to E_r^n$是块块光滑的，并且

$$|fT(t)-h(t)|\leq|fT(t)-fT(a^i)|+|fT(a^i)-b^i|+|b^i-h(t)|\leq\frac{7\varepsilon}{8}$$

其中a^i为包含t点的单纯形σ^n的任意一个顶点。因此，对于每个$t\in P$，有

$$|h(t)-Z|>\frac{9\varepsilon}{8}.$$

设映象$g:\overline{D}\to E_r^n$定义如下：对于$x\in\overline{D}$,

$$g(x)=hT^{-1}(x)$$

显然映象$g:\overline{D}\to E_r^n$是连续的，$z\overline{\in}g(\partial D)$，并且对于$x\in\overline{D}$

$$|g(x)-f(x)|<\frac{7\varepsilon}{8}.$$

根据定理1.3，不难可以推导出

$$d[f,D,z]=d[g,D,z].$$

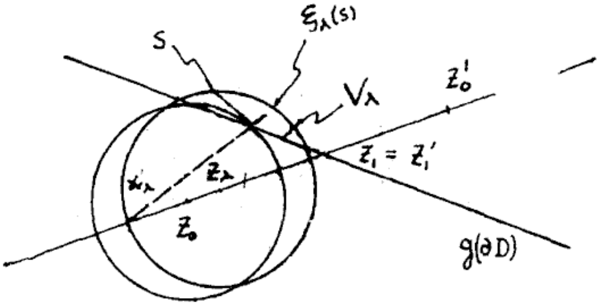
用R_o表示$g(\partial D)$上的原象不足一点的点集，从映象$g:\overline{D}\to E_y^n$的作法中，可以看出：R_o是$g(\partial D)$上不超过$n-2$维的点集．用Rz表示$g(\partial D)$上的这些点的集合，这种点与Z点的联线，在这点上不是穿过$g(\partial D)$而是与它相“切”而过．显然R_z的维数也是不超过$n-2$的．

取经过Z点的半射线l，使得l与$g(\partial D)$的有限个交点属于$g(\partial D)\setminus(R_o\cup R_z)$，即射线l在每个交点上都是穿过$g(\partial D)$的．除此以外，还要求每个交点都是$g(\partial D)$中某个n—1维单纯形的内点，这点显然是能够做到的．

现在考虑，在拓扑度的参考点Z沿着这根半射线经过各个这种交点而到达$z'\in g(\overline{D})$点的过程中，拓扑度$d[g,D,z]$的变化．从引理1.3′可知当z点在l上移动，但不碰到$g(\partial D)$的点时，拓扑度$d[g,D,z]$是不变的．

设z_1为l与$g(\partial D)$的交点，也是$g(\partial D)$中某个n维单纯形σ^{n-1}的一个内点，在l线上z_1的两边取z_0与z_0^1点．这两点与σ^{n-1}的距离为ε．取ε充分小，使得球心在z_0与z_0^1的联线上，半径为ε的小球只与σ^{n-1}的内部相交，不与$g(\partial D)$中的其他单纯形相交．

设$z_\lambda=\lambda z_1+(1-\lambda)z_0(0\leq\lambda\leq1)$．以$z_\lambda$为球心，以ε为半径，作小球面$S(z_\lambda,\varepsilon)$．这球面与l线在$z_0$那一边交于$x_\lambda$点．球面$S(Z_\lambda,\varepsilon)$在$g(\partial D)$上割下来的部分记作$V_\lambda$，以$x_\lambda$为投影中心，作立体投影变换$\xi_\lambda:V_\lambda\to S(z_\lambda,\varepsilon)$，把$V_\lambda$投影到小球$S(z_\lambda,\varepsilon)$面上，即设$S\in V_\lambda$，$\overline{x_\lambda S}$的联线交$S(Z_\lambda,\varepsilon)$面于$\xi_\lambda(S)$点．作映象$g_\lambda:\partial D\to E_y^n$如下：对于$x\in g^{-1}(V_\lambda)\subset\partial D$，取$g_\lambda(x)=\xi_\lambda(g(x))$；对于$x\in\partial D\setminus g^{-1}(V_\lambda)$，取$g_\lambda(x)=g(x)$（因为ε可以取得充分小，而在$z_1$附近$g^{-1}$存在）．作连续映象$G:\overline{D}\times I\to E_y^n$适合条件：



$$G(x,o)=g(x),\qquad 对于x\in\overline{D},\ \lambda=0;$$
$$G(x,\lambda)=g_\lambda(x),\qquad 对于x\in\partial D,\ 0\leq\lambda\leq1.$$

根据引理1.4，这样的连续映象是存在的．从定理1.3，知道

$$d[g,\ D,\ z_0]=d[g_1,\ D,\ z_1].$$

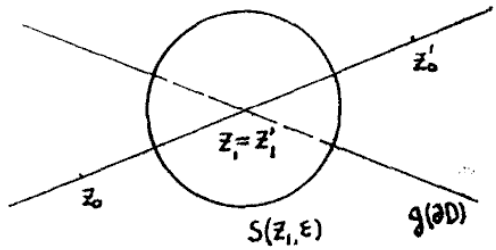
记$z_1'=z_1$．按照以上同样的做法，在z_0'与z_1'之间取$z_\lambda'=\lambda z_1'+(1-\lambda)z_0'(0\leq\lambda\leq1)$．以$Z_\lambda'$为中心，以ε为半径的小球面$S(z_\lambda',\varepsilon)$交l线在$z_0'$那边的$x_\lambda'$点上，以$x_\lambda'$为立体投影变换的中心，作变换$\xi_\lambda'$，它把$S(z_\lambda',\varepsilon)$在$\sigma^{n-1}\subset g(\partial D)$上割下的部分$V_\lambda'$，投影到小球面$S(z_\lambda',\varepsilon)$上．同样，作变换$z_\lambda':\partial D\to E_y^n$如下：对于$x\in g^{-1}(V_\lambda')\subset\partial D$，取$g_\lambda'(x)=\xi_\lambda'(g(x))$；对于$x\in\partial D\setminus g^{-1}(V_\lambda')$，取$g_\lambda'(x)=g(x)$．根据引理1.4，可以作出连续映象$G':\overline{D}\times I\to E_y^n$，使得以下条件成立：

$G'(x,0)=g(x)$,

$x\in\overline{D}$, $\lambda=0$;

$G'(x,\lambda)=g'_\lambda(x)$,

$x\in\partial D$, $0\le\lambda\le 1$.



又从定理1.3，可知

$d[g,D,z_0^1]=d[g'_1, D, z_1]$,

其中$z_1^1=z_1$.

再从引理1.1，可以推出

$$d[g_1, D, z_1]-d[g'_1, D, z_1]=\frac{1}{\omega_n}\int_{S(z_1,\varepsilon)}dJ$$

而

$$\frac{1}{\omega_n}\int_{S(z_1,\varepsilon)}dJ=\frac{1}{\omega_n\varepsilon^n}\int_{S(z_1,\varepsilon)}\sum_{i=1}^{n}y_i\,dy_1\cdots\widehat{dy_i}\cdots dy_n$$

$$=\frac{n}{\omega_n\varepsilon^n}\int_{B(z_1,\varepsilon)}dy_1\cdots dy_n=\pm 1,$$

其中$B(z_1,\varepsilon)$为以z_1为中心，ε为半径的小球体，如果向量$\overrightarrow{z_0z_1}$与$g(\partial D)$上的定向所形成的空间定向与坐标系的定向一致，则取正号，称l线正向穿过$g(\partial D)$，否则取负号，称l线负向穿过$g(\partial D)$.因此

$$d[g,D,z_0]-d[g,D,z'_0]=\pm 1.$$

换句话说，z点沿半射线l移动时，每经过$g(\partial D)$一次，拓扑度$d[g_1D,z]$改变±1. z点经过$g(\partial D)$有限次后，到达z'位置.因为$z'\in f(\overline{D})$，由引理1.2，$d[g,D,z']=0$.这样经过有限次改变±1后的拓扑度变成了零.因此拓扑度$d[g,D,z]$为整数，如果N^+与N^-分别表示l线正向穿过与负向穿过$g(\partial D)$的次数，则

$$d[f,D,z]=N^+-N^-. \tag{37}$$

其实对于射线l与$g(\partial D)$的交点属于R_0，R_z或维数小于n—1的单纯形的情况，也可以作类似的讨论.只是在推论过程中，对交点的每个原象重复作以上变换g_λ一次，因此经过这些点时，拓扑度的改变仍是个整数.

定理证明完毕.

定理1.5. 设D^{n+m}为在n＋m维空间E_X^{n+m}中的有界开集，E_X^n为E_X^{n+m}中的n维子空间，又$D^n=E_X^n\cap D^{n+m}$为n维的开集.设有连续映象$f_{n+m}:\overline{D}^{n+m}\to E_y^{n+m}$，适合条件$z\in f_{n+m}(\partial D^{n+m})$，其中$z\in E_y^n\subset E_y^{n+m}$，z为固定点，$E_y^n$为$E_y^{n+m}$的n维子空间；此外还假定，对于$x\in\overline{D}^n\subset E_x^n$，

$$f_{n+m}^{(x)}=f_n(x)\in E_y^n.$$

记f_n: $\overline{D}^n\to E_y^n$为因此而感应所得到的连续映象.这样，成立关系式

$$d[f_n,D^n,z]=d[f_{n+m}, D^{n+m}, z]$$

证：经过Z点在E_y^n上作半射线l，半射线l与在E_y^n中n－1维超曲面$g(\partial D^n)$和与在E_y^{n+m}中n＋m－1维超曲面$g(\partial D^{n+m})$相交的情况是重合的.用E_y^m表示在E_y^{n+m}中正交于E_y^n的m维子空间.半射线l与$g(\partial D^{n+m})$的定向可以用l，$g(\partial D^n)$，E_y^m三者依次的定向来决定的，因此以上结论成立.