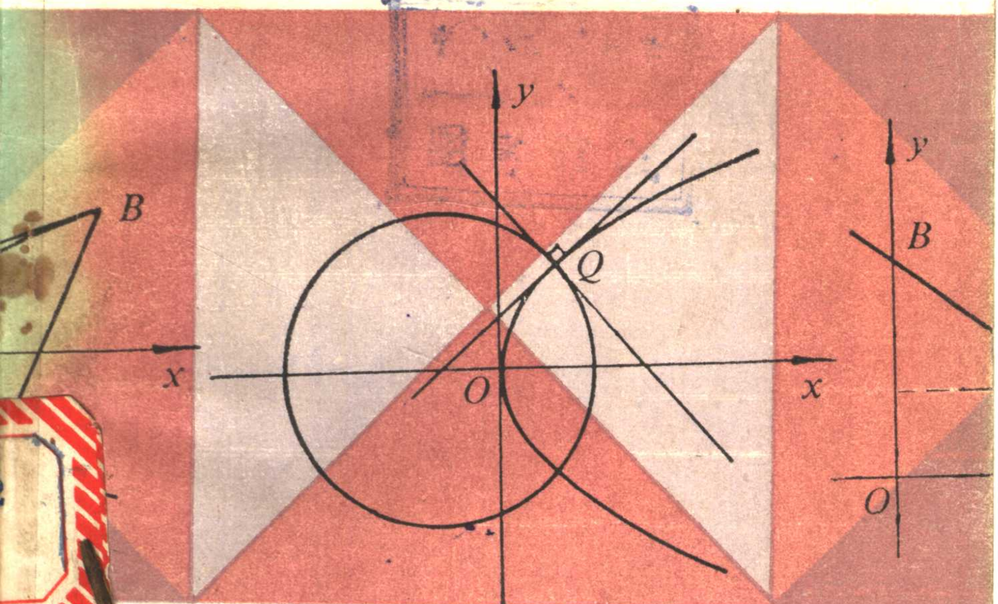
平面解析几何一题多解选



河北教育出版社

平面解析几何一题多解选

王 培 甫

河 北 教 育 出 版 社

平面解析几何一题多解选

王 培 甫

河北教育出版社出版（石家庄市北马路45号）

河北正定县印刷厂印刷　　河北省新华书店发行

787×1092毫米 1/32　8.625印张　177,000字　1988年1月新1版

1988年1月第1次印刷　　印数　1--22520　　定价　1.45元

ISBN7-5434-0005-7/G·3

前　言

提高学生的解题能力，是当前中学数学教学的一项重要任务。在掌握基础知识的前提下，做一定数量的习题，对学生来讲是必不可少的。在解题方法上强调基本功的训练，对一道习题能运用学过的数学知识采用多种方法解题，这无疑有利于学生解题与创造能力的培养。本书就是在上述思想指导下，以基本知识为主题，编写了十四个解题的专题，分类精选了中学《平面解析几何》六十个题目。对每一个专题首先探讨了有关的基本知识和解题规律。对于每一个具体题目，则又打破类型的约束，纵横联系，给出多种解题方法。并在每个专题的结尾，配备相应的习题（共六十个），要求读者也运用一题多解去探讨它们。对这类习题，我们也打破了一般解答的常规，而改用分题指导多种思考方法，给读者留下继续探索的余地。

我们希望本书将有助于中学生巩固所学的《平面解析几何》的基本知识，开拓思路，提高解题能力，也希望它有助于中学数学教师的教学和复习指导。

由于学识所限，错误处请大家指正。

编　者

1985.5.

目　　录

一　关于点的坐标及两曲线的交点问题

(一)基本知识

1. 点的坐标

在平面直角坐标系中，一个点的位置由一对有序实数(x,y)确定，称x、y为这两个点的直角坐标*，因此，确定一个点的坐标，一般需要两个独立的条件，即需要两个以x、y为未知量的方程所组成的方程组来决定。特殊地，有时，也可直接求出x与y的表达式。

2. 曲线上的点

假如点P的坐标(x,y)是方程$F(x,y)=0$的一组解，则称P在以$F(x,y)=0$为方程的曲线上，简称在曲线$F(x,y)=0$上。

3. 两条曲线的交点

i) 若两条曲线的方程分别是$C_1:F_1(x,y)=0$，$C_2:F_2(x,y)=0$，则它们的交点的坐标是方程组

$$\begin{cases}F_1(x,y)=0,\\F_2(x,y)=0.\end{cases}$$

---

* 确定平面点的位置，除平面直角坐标系以外，尚有平面极坐标系等其它坐标系，本书以讨论直角坐标系为主，有些题也采用极坐标系，在本书的专题十四集中讨论了用极坐标系解题问题.

的一组实数解。

ii）若曲线 C_1 的方程是 $F_1(x,y)=0$，曲线 C_2 的参数方程是

$$\begin{cases} x=f(t), \\ y=g(t), \end{cases} \qquad (t\text{ 为参数})$$

则可先由方程组

$$\begin{cases} F_1(x,y)=0, & (1) \\ x=f(t), & (2) \\ y=g(t). & (3) \end{cases}$$

消去未知量 x 及 y，得到以 t 为未知量的一元方程

$$F_1[f(t),g(t)]=0 \qquad (4)$$

解方程(4)，即得曲线 C_1 与 C_2 的交点的对应参数值。然后，将此参数值分别代入方程(2)与(3)，即得曲线 C_1 与 C_2 的交点的坐标(x,y)。

显然，类型 i）及类型 ii）是可以互相转化的。

（二）解题举例

1．已知直线 l_1 过 $P_1(0,-1)$、$P_2(2,0)$两点，直线 l_2 的方程是 l_2:$x+y-1=0$，求直线 l_1 与 l_2 的交点的坐标。

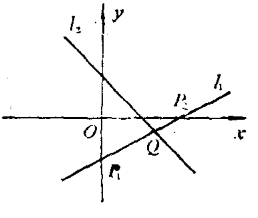


图 1-1

解1 （如图 1-1）∵直线 l_1 过点 $P_1(0,-1)$ 及 $P_2(2,0)$。

∴ l_1 的方程为

$$\frac{x-0}{0-2}=\frac{y+1}{-1-0},$$

即 $$x-2y-2=0.$$

解方程组

$$\begin{cases}x-2y-2=0,\\ x+y-1=0.\end{cases}$$

得 $$x=\frac{4}{3},\quad y=-\frac{1}{3}.$$

$\therefore$ 直线 l_1 与 l_2 的交点坐标为

$$\left(\frac{4}{3},\ -\frac{1}{3}\right).$$

解 2 设直线 l_1 与 l_2 的交点为 $Q(x,y)$，Q 分 P_1P_2 之比为 λ，由定比分点公式*.

$$x=\frac{\cancel{3}+2\lambda}{1+\lambda},\quad y=\frac{-1+0}{1+\lambda}.$$

$\because$ Q 在 l_2 上，

$$\therefore\quad \frac{2\lambda}{1+\lambda}+\frac{-1}{1+\lambda}-1=0.$$

$$\therefore\quad \lambda=2,$$

$$\therefore\quad x=\frac{4}{1+2}=\frac{4}{3},\quad y=\frac{-1}{1+2}=-\frac{1}{3}.$$

$\therefore$ 直线 l_1 与 l_2 的交点 Q 的坐标为 $Q\left(\frac{4}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$.

注意 解 2 若利用本书专题三中的“基本知识 4”，则可直接求出交点 Q 分 P_1P_2 之比

---

* 参看本书的专题三。

$$\lambda=-\frac{0+(-1)-1}{2+0-1}=2.$$

解 3 设直线 l_1 与 l_2 的交点是 Q,

$\because$ Q 在 l_2 上

$\therefore$ Q 的坐标可设为 $Q(t,1-t)$, 又 Q 在 l_1 上, 即 Q、P_1、P_2 共线。

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} t & 1-t & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

解上列方程, 得 $t=\frac{4}{3}$.

$\therefore$ Q 点的坐标为 $Q\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

注意 解 2、解3 实际上都引入了相应的参变数 (λ 及 t). 引入参数之后, 曲线上的点的坐标可分别用参数表示, 从而不必再考虑曲线方程, 故在运算时, 显得比较方便与灵活.

2. 已知椭圆的中心在原点, 焦点在 x 轴上, 离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 且与 y 轴的正向相交于点 $B(0,1)$, 若椭圆的右焦点为 F, 椭圆的中心在 BF 上的射影为点 Q, 求点 Q 的坐标。

解 1 (如图 1-2) 设此椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 则由

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad b=1,$$

$c^2=a^2-b^2$，可求得

$a=2b=2$，

$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$。

∴ 椭圆方程为

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1.$$

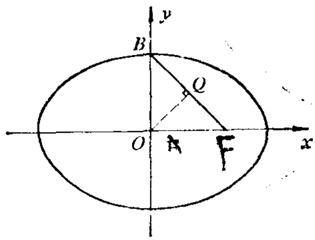


图 1-2

∵ 焦点 F 的坐标为 $F(c,0)$，即 $(\sqrt{3},\ 0)$.

∴ 直线 BF 的方程为 $\dfrac{x}{\sqrt{3}}+y=1$，即

$$x+\sqrt{3}\,y=\sqrt{3}. \tag{1}$$

∵ $OQ\perp BF$，∴ 直线 OQ 的方程为

$$y=\sqrt{3}\,x. \tag{2}$$

解由方程(1)及(2)组成的方程组，得

解 $$x=\frac{\sqrt{3}}{4},\qquad y=\frac{3}{4}.$$

∴ 椭圆的中心在直线 BF 上的射影 Q 点的坐标为 $Q\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4},\ \dfrac{3}{4}\right)$。

解 2 （如图 1-2)在 $\triangle OFB$ 中，$|OB|=b=1$，$|FB|=a=2$，$\angle FOB=\dfrac{\pi}{2}$，故$\angle OFB=\dfrac{\pi}{6}$，$\angle FOQ=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$，

$|OQ|=|OF|\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。

∴ 根据三角函数的定义，Q 点的坐标为

$$x=|OQ|\cos\angle FOQ=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$y=|OQ|\sin\angle FOQ=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}.$$

解 3 $\because$ $\triangle BOF$ 是直角三角形，OQ 是它斜边上的高。

$$\therefore\quad \frac{FQ}{QB}=\frac{|FQ|}{|QB|}=\frac{|FQ|\cdot|FB|}{|QB\cdot|FB|}=\frac{OF^2}{OB^2}=\frac{3}{1}.$$

即 Q 点分 FB 之比 $\lambda=3$。

$\because$ F 及 B 点的坐标分别为 $F(\sqrt{3},0)$、$B(0,1)$，

$\therefore$ Q 点的坐标为

$$x=\frac{\sqrt{3}+0}{1+3}=\frac{\sqrt{3}}{4},\quad y=\frac{0+3\cdot1}{1+3}=\frac{3}{4}.$$

解 4 以 x 轴、y 轴分别为实轴、虚轴（原点属于实轴），把直角坐标系改为复平面，

则根据解 1 可得 $\overrightarrow{OF}=\sqrt{3}$，$\overrightarrow{OF}$ 绕 O 旋转 $\frac{\pi}{3}$，且模数缩小到原来的一半，即得 $\overrightarrow{OQ}$，

$$\therefore\quad \overrightarrow{OQ}=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i.$$

$\therefore$ Q 点的坐标为 $Q\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\ \frac{1}{4}\right)$.

注意 由于复数运算具有明确的几何意义（参看专题六），因此，

运用复数知识解几何问题，往往比较简捷，本书今后常常采用这种方法，如本题的解4。

3．已知一点Q与点$P_1(0,1)$，$P_2(7,2)$及x轴等距，求点Q的坐标。

解1 设Q点的坐标为$Q(x,y)$，则

$$x^2+(y-1)^2=(x-7)^2+(y-2)^2=y^2,$$ 即

$$\begin{cases}x^2+(y-1)^2=(x-7)^2+(y-2)^2,\\ x^2+(y-1)^2=y^2.\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}7x+y-26=0,\\ x^2-2y+1=0.\end{cases}$$

解此方程组，得

$$\begin{cases}x_1=3,\\ y_1=5.\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2=-17,\\ y_2=145.\end{cases}$$

∴ Q点的坐标为$(3,5)$或$(-17, 145)$。

解2 设动点Q的坐标是$Q(x,y)$。

∵ 点Q与点P_1及P_2等距，

∴ Q在P_1P_2的垂直平分线上，

∴ 其坐标适合方程

$$y-\frac{1+2}{2}=-\frac{0-7}{1-2}\left(x-\frac{0+7}{2}\right),$$

即
$$7x+y-26=0. \tag{1}$$

又 点Q与P_1及x轴等距，

故 Q又在以P_1为焦点，以x轴为准线的抛物线上，故其坐标适合方程

$$x^2=2\left(y-\frac{1}{2}\right) \tag{2}$$

∴ 点 Q 为直线(1)及抛物线(2)的交点。

解由方程(1)及(2)组成的方程组，得交点 Q 的坐标为(3，5)、(-17，145)。

解3 设点 Q 的坐标为 $Q(a,b)$。则 Q 可看作一个过 P_1、P_2 两点且与 x 轴相切的圆的圆心。

设此圆的方程为

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0. \tag{3}$$

∵ 圆过 $P_1(0,1)$、$P_2(7,2)$ 两点，故有

$$1+E+F=0. \tag{4}$$

$$49+4+7D+2E+F=0. \tag{5}$$

又 此圆与 x 轴相切，则在方程(3)中令 $y=0$，得方程 $x^2+Dx+F=0$，此方程必有重根，故其判别式为0，即

$$D^2-4F=0. \tag{6}$$

方程(4)、(5)、(6)消去 F，解出 D、E，得

$$\begin{cases}D=-6,\\E=-10,\end{cases} \quad 或 \begin{cases}D=34,\\E=-290.\end{cases}$$

∴ 交点 Q 的坐标为(3,5)或(-17,145)*。

注意 根据解3的构思，若运用曲线系知识**还可如解4这样做：

---

* 方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 的圆的圆心为 $\left(-\frac{D}{2},\ -\frac{C}{2}\right)$，半径为 $\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$.

** 参看本书的专题十。

解 4 过 $P_1(0,1)$、$P_2(7,2)$ 的直线方程为

$$x-7y+7=0,$$

以 P_1P_2 为直径的圆方程为

$$(x-0)(x-7)+(y-1)(y-2)=0.$$

即 $$x^2+y^2-7x-3y+2=0.$$

过 P_1、P_2 的圆系方程为

$$x^2+y^2-7x-3y+2+\lambda(x-7y+7)=0,$$

即 $$x^2+y^2+(\lambda-7)x-(7\lambda+3)y+7\lambda+2=0 \qquad (7)$$

若此圆与 x 轴相切，则令方程(7)中的 $y=0$，得方程

$$x^2+(\lambda-7)x+7\lambda+2=0,$$

必有重根，故其判别式为 0。即

$$(\lambda-7)^2-4(7\lambda+2)=0,$$

$\therefore$ $\lambda=1$ 或 $\lambda=41$。

令 $\lambda=1$，从方程(7)可得圆心 Q 的坐标为 $Q(3,5)$。

令 $\lambda=41$，从方程(7)可得圆心 Q 的坐标为 $Q(-17,145)$。

注意 也可先写出与 x 轴相切的圆方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$，然后由另外两个条件，决定 a 及 b，从而求得 $Q(a,b)$ 的坐标，总之充分运用已学过的几何定理及性质，往往可以使问题简化。

4．已知直线 l 与抛物线 $y^2=8x$ 相交于 Q_1、Q_2 两点，而这两点的连线的中点为点 $M(2,2)$，求此直线的方程。

解 1 （如图 1-3）直线 l 必过点 $M(2,2)$，故其方程可设为

$$y-2=k(x-2).$$

即 $$y=kx-2(k-1).$$

由方程组

$$\begin{cases} y^2 = 8x, & (1) \\ y = kx - 2(k-1), & (2) \end{cases}$$

消去 x，得

$$ky^2 - 8y - 16(k-1) = 0. \quad (3)$$

设交点 Q_1、Q_2 的坐标分别是 $Q_1(x_1, y_1)$ 及 $Q_2(x_2, y_2)$，则 y_1 及 y_2 必为方程(3)的两个实根，根据一元二次方程根与系数的韦达定理，有

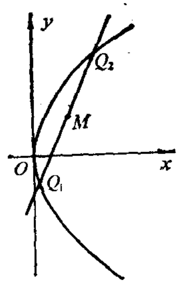


图 1-3

$$y_1 + y_2 = \frac{8}{k}.$$

$\because$ Q_1Q_2 的中点是 $M(2,2)$，

$\therefore$ $\dfrac{y_1 + y_2}{2} = \dfrac{4}{k} = 2$，　即　$k = 2$.

$\therefore$ 所求的直线 l 的方程为

$$y = 2x - 2. \quad (4)$$

注意 i) 尽管本题的目的不在于求交点，但"求交点"的思考过程仍是本解法的主要过程，因此，在思考方法上我们可以把它纳入求交点问题的类型.

ii) 本题我们没有求出 Q_1 及 Q_2 的坐标，而是运用韦达定理直接写出 Q_1Q_2 的中点坐标，这种方法在今后解题中，常常应用.

iii) 一般地说，在求出 k 值之后，并不能说明所求直线一定存在. 因为所得的直线(4)与抛物线(1)可能是相离的（即有虚交点），因此尚须验证方程(3)的判别式是否为非负的，(在做习题3时，请读者注意这一点）由于本题已明确声明交点 Q_1 与 Q_2 的存在，所以可把这一步省去.

解 2 设直线 l 过点 $M(2,2)$，则它的参数方程可设为

$$\begin{cases}x=2+t\cos\alpha,\\ y=2+t\sin\alpha.\end{cases}$$

(其中 t 为参数，α 为直线的倾角)。*

则由方程组

$$\begin{cases}y^2=8x,\\ x=2+t\cos\alpha,\\ y=2+t\sin\alpha.\end{cases}$$

消去变量 x 及 y，得

$$(2+t\sin\alpha)^2=8(2+t\cos\alpha),$$

即 $$t^2\sin^2\alpha+4(\sin\alpha-2\cos\alpha)t-12=0. \tag{5}$$

设交点 Q_1、Q_2 的对应参数为 t_1 及 t_2，则 t_1 及 t_2 是方程(5)的两个根。

$$\therefore \quad t_1+t_2=-\frac{4(\sin\alpha-2\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}$$

$\because$ M 点的对应参数 $t_M=0$

$$\therefore \quad t_M=\frac{t_1+t_2}{2}=-\frac{2(\sin\alpha-2\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}=0^{**}$$

---

* 若一条直线 l 过定点 $Q(a,b)$，则此直线的参数方程可写为 $x=a+t\cos\alpha$，$y=b+t\sin\alpha$，(t 为参数，α 为由 x 轴的正向至直线 l 的正向所成的角)。若 P 是 l 上的一点它的对应参数为 t，则 t 的几何意义是 i) 当 QP 的方向与直线 l 的正向一致时，$t=|QP|$，ii) 当 QP 的方向与直线 l 的正向相反时，$t=-|QP|$，iii) 当 P 与 Q 重合时，$t=0$。(图 1-4)。

** 参看本书的专题三。

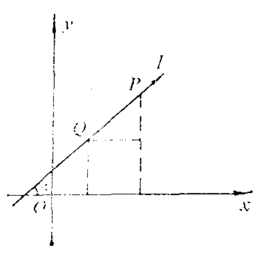


图 1-4

$$\therefore \qquad \sin\alpha - 2\cos\alpha = 0.$$

即直线 l 的斜率 $k = tg\,\alpha = 2$*

$\therefore$ 直线 l 的方程为

$$y - 2 = 2(x - 2).$$

解 3 $\because$ 点 Q_1、Q_2 在抛物线 $y^2 = 8x$ 上，

$\therefore$ 它们的坐标可设为 $Q_1(8t_1^2, 8t_1)$、$Q_2(8t_2^2, 8t_2)$

$\because$ $M(2,2)$ 是 Q_1Q_2 的中点，

$$\therefore \qquad \frac{8t_1^2 + 8t_2^2}{2} = 2, \qquad \frac{8t_1 + 8t_2}{2} = 2,$$

$$\therefore \quad \text{直线 } Q_1Q_2 \text{ 的斜率} \quad k_{Q_1Q_2} = \frac{8t_1 - 8t_2}{8t_1^2 - 8t_2^2}$$

$$= \frac{1}{t_1 + t_2} = 2.$$

故所求直线 l 的方程为

$$y - 2 = 2(x - 2).$$

解 4 设抛物线的弦 l 的方程为

$$y = kx + b,$$

由方程组

$$\begin{cases} y^2 = 8x, \\ y = kx + b. \end{cases}$$

消去变量 x，得 $\quad ky^2 - 8y - 8b = 0, \qquad (6)$

---

* 为了方便起见，今后常用字母 k 表示一条直线的斜率，用 $k_{Q_1Q_2}$ 表示两点 $Q_1(x_1, y_1)$、$Q_2(x_2, y_2)$ 所在的直线的斜率，即 $k_{Q_1Q_2} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$。