高等学校数学学习辅导教材

GAODENG XUEXIAO SHUXUE XUEXI FUDAO JIAOCAI

概率论与数理统计
习题全解

GAILVLUN YU SHULITONGJI XITI QUANJIE

人大·概率论与数理统计修订版

王丽燕 柳 扬/编 著

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计习题全解 / 王丽燕,柳扬编著. —大连:大连理工大学出版社,2003.9
ISBN 7-5611-2375-2

Ⅰ. 概… Ⅱ. ①王… ②柳… Ⅲ. 概率论—高等学校—解题 Ⅳ. O21-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 086239 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市凌水河 邮政编码:116024
电话:0411-4708842 传真:0411-4701466 邮购:0411-4707955
E-mail:dutp@mail.dlptt.ln.cn URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:140mm × 203mm 印张:7.75 字数:190 千字
印数:1 ~ 8 000
2003 年 9 月第 1 版 2003 年 9 月第 1 次印刷

责任编辑:王 纪 责任校对:韩丽娟
封面设计:宋 蕾

定价:10.00 元

卷首赠言

·应用更便利·基础更扎实·学习更容易·

骐骥一跃，不能十步；驽马十驾，功在不舍；锲而舍之，朽木不折；锲而不舍，金石可镂。

——荀　况

前言

·应用更便利·基础更扎实·学习更容易·

《概率论与数理统计》是大学理工科、经济学、管理学等门类各专业学生必修的基础课，也是硕士研究生入学考试的一门必考科目。为了帮助广大读者学好《概率论与数理统计》，扩大课堂信息量，提高应试能力，我们根据原国家教委审定的普通高等学校"概率论与数理统计"课程教学基本要求（教学大纲）编写了这本具有工具书性质的《概率论与数理统计习题全解》。

本书按照被全国许多院校经济、管理等专业采用的袁荫棠主编的《概率论与数理统计》（人大修订版）（中国人民大学出版社）的章节顺序，分为十一章，每章的习题都作了较为详细的解答。有的题还给出了多种解法及其注意事项。编写这本书的目的是为了方便读者对照和分析。值得提醒的是：解题需亲自动手，通过本身的实践，积累经验。

本书使用了中国人民大学出版社出版的袁荫棠主编《概率论与数理统计》中的全部习题,在此表示衷心的感谢!李彩荣审阅了全书,并提出了宝贵的意见,李海燕、王艳芳等作了大量的校对工作,张金利等帮助验算了大部分习题,编者在此向他们一并表示衷心的感谢。

由于时间仓促,编者水平有限,不妥之处一定存在,恳请广大读者提出批评和指正!

编著者

2003 年 9 月

目　录

第一章　随机事件及其概率

1. 互不相容事件与对立事件的区别何在?说出下列各对事件的关系。

(1) $|x-a|<\delta$ 与 $x-a\geqslant\delta$;　　(2) $x>20$ 与 $x\leqslant 20$;

(2) $x>20$ 与 $x<18$;　　(4) $x>20$ 与 $x\leqslant 22$;

(5)20 个产品全是合格品与 20 个产品中只有一个废品;

(6)20 个产品全是合格品与 20 个产品中至少有一个废品。

答　对立事件一定是互不相容事件,但互不相容事件不一定是对立事件。对立事件和互不相容事件的共同特点是事件间没有公共的样本点,但两个对立事件的并(和)等于样本空间,即若 A 与 $\overline{A}$ 是两个对立事件,则 $A\overline{A}=\varnothing, A+\overline{A}=\Omega$;而两个互不相容事件的并(和)被样本空间所包含,即若 A 与 B 是两个互不相容事件,则 $AB=\varnothing$,且 $A+B\subset\Omega$.

(1) 由于 $\{x \mid |x-a|<\delta\}\cap\{x\mid x-a\geqslant\delta\}=\varnothing$,且 $\{x\mid |x-a|<\delta\}\cup\{x\mid x-a\geqslant\delta\}\neq\mathbf{R}$,所以事件 $|x-a|<\delta$ 与 $x-a\geqslant\delta$ 是互不相容事件(参见图 1-1(1))。

(2) 由于 $\{x\mid x>20\}\cap\{x\mid x\leqslant 20\}=\varnothing$,且 $\{x\mid x>20\}\cup\{x\mid x\leqslant 20\}=\mathbf{R}$,所以事件 $x>20$ 与 $x\leqslant 20$ 是对立事件(参见图 1 - 1(2))。

(3) 由于 $\{x\mid x>20\}\cap\{x\mid x<18\}=\varnothing$,且 $\{x\mid x>20\}\cup\{x\mid x<18\}\neq\mathbf{R}$,所以事件 $x>20$ 与 $x<18$ 是互不相容事件(参见图 1-1(3))。

(4) 由于$\{x \mid x > 20\} \cap \{x \mid x \leqslant 22\} \neq \varnothing$，所以事件 $x > 20$ 与 $x \leqslant 22$ 是相容事件(参见图 1-1(4))。

(5) 记事件 A = {20个产品全是合格品}，事件 B = {20个产品只有一个废品}，显然 $AB = \varnothing$，$A + B \neq \Omega$ = {20个产品}，所以 A 与 B 是互不相容事件。

(6) 记事件 A = {20个产品全是合格品}，事件 B = {20个产品中至少有一个废品}，显然 $AB = \varnothing$，$A + B = \Omega$ = {20个产品}，所以 A 与 B 是对立事件。

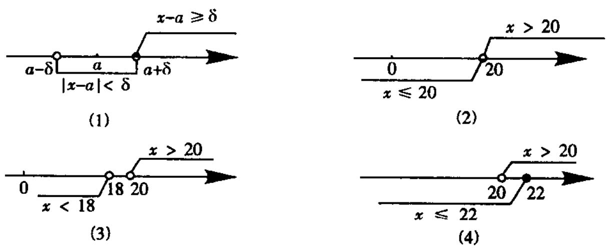


图 1-1

2. 同时掷两颗骰子，x、y 分别表示第一、二两颗骰子出现的点数，设事件 A 表示“两颗骰子出现点数之和为奇数”，B 表示“点数之差为零”，C 为“点数之积不超过 20”，用样本点的集合表示事件 $B - A$；BC；$B + \overline{C}$。

解　试验的样本空间 $\Omega = \{(x,y) \mid x = 1,2,\cdots,6; y = 1,2,\cdots,6\} = \{(1,1),(1,2),\cdots,(1,6),(2,1),(2,2),\cdots,(2,6),(3,1),(3,2),\cdots,(3,6),(4,1),(4,2),\cdots,(4,6),(5,1),(5,2),\cdots,(5,6),(6,1),(6,2),\cdots,(6,6)\}$。事件 $A = \{(1,2),(1,4),(1,6),(2,1),(2,3),(2,5),(3,2),(3,4),(3,6),(4,1),(4,3),(4,5),(5,2),(5,4),(5,6),(6,1),(6,3),(6,5)\}$；事件 $B = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$；事件 $C = \{(1,1),(1,2),\cdots,(1,6),(2,1),$

$(2,2),\cdots,(2,6),(3,1),(3,2),\cdots,(3,6),(4,1),(4,2),\cdots,(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(6,1),(6,2),(6,3)\}$。从而

$$B-A=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}=B,$$
$$BC=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\},$$
$$B+\overline{C}=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}。$$

---

3. 用步枪射击目标 5 次，设 A_i 为“第 i 次击中目标”$(i=1,2,3,4,5)$，B 为“5 次击中次数大于 2”，用文字叙述下列事件：

(1) $A=\sum\limits_{i=1}^{5}A_i$　　(2) $\overline{A}$　　(3) $\overline{B}$

答　(1) 事件 $A=\sum\limits_{i=1}^{5}A_i$ 表示“5 次中至少有一次击中目标”。

(2) 事件 $\overline{A}$ 表示“射击 5 次一次也没有击中目标”。

(3) 事件 $\overline{B}$ 表示“射击 5 次至多击中两次”或“5 次中击中次数小于等于 2”。

---

4. 用图示法简化下列各式（A、B、C 都相容）：

(1) $(A+B)(B+C)$；　　(2) $(A+B)(A+\overline{B})$；

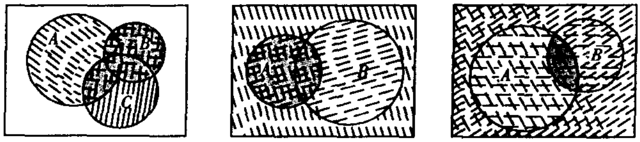
(3) $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)$。

解：

(1) 图 1-2(a) 中阴影部分即为 $(A+B)(B+C)$。

(2) 图 1-2(b) 中阴影部分即为 $(A+B)(A+\overline{B})$，显然，$(A+B)(A+\overline{B})=A$。

(3) 图 1-2(c) 中阴影部分即为 $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)$，显然，$(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)=A(\overline{A}+B)=AB$。



(a) (b) (c)

图 1-2

5. 在图书馆中随意抽取一本书，事件 A 表示“数学书”，B 表示“中文图书”，C 表示“平装书”。(1) 说明事件 $AB\overline{C}$ 的实际意义；(2) 若 $\overline{C} \subset B$，说明什么情况；(3) $\overline{A} = B$ 是否意味着馆中所有数学书都不是中文版的？

答 (1) 事件 $AB\overline{C}$ 表示在图书馆中随意抽取的一本书是精装的中文版的数学书。

(2) $\overline{C} \subset B$ 说明凡是精装书都是中文版的。

(3) $\overline{A} = B$ 并不意味着馆中所有数学书都不是中文版的，而是说馆中的非数学类的书是中文图书，而数学书既可能是中文版的，也可能是外文版的。

6. 表 1-1 是 10 万个男子中活到 ξ 岁的人数统计表，若以 A、B、C 分别表示一个新生婴儿活到 40 岁、50 岁、60 岁，由表 1-1 估计 $P(A)$、$P(B)$、$P(C)$。

表 1-1

年岁 ξ	0	10	20	30	40	50
活到 ξ 岁的人数	100000	93601	92293	90092	86880	80521
年岁 ξ	60	70	80	90	100	
活到 ξ 岁的人数	67787	46739	19866	2812	65	

解　$P(A) = \dfrac{86880}{100000} = 0.8688$

$$P(B) = \frac{80521}{100000} = 0.80521$$

$$P(C) = \frac{67787}{100000} = 0.67787$$

7. 某产品设计长度为 20cm，规定误差不超过 0.5cm 为合格品。今对一批产品进行测量，长度如下：

表 1-2

长度(cm)	19.5 以下	19.5 ~ 20.5	20.5 以上
件数	5	68	7

计算这批产品的合格率。

解　根据设计要求知，长度在 19.5cm 以下和 20.5cm 以上均为不合格品，所以这批产品的合格率为

$$p = \frac{68}{5 + 68 + 7} = 0.85$$

8. 掷三枚硬币，求出现 3 个正面的概率。

解　抛一枚硬币，记出现正面为 H，反面为 T，则掷三枚硬币的试验的样本空间为 $\Omega = \{HHH, THT, HTT, TTH, HHT, HTH, THH, TTT\}$，出现三个正面的事件记为 A，则 $A = \{HHH\}$，于是

$$P(A) = \frac{1}{8} = 0.125$$

9. 10 把钥匙中有 3 把能打开门，今任取两把，求能打开门的概率。

解法一　随机试验是从 10 把钥匙中任取两把，从而样本空间

Ω 的样本点总数为

$$n = C_{10}^2 = 45$$

要想把门打开，取出的两把钥匙至少有一把从能把门打开的三把钥匙中获得，从而能把门打开这一事件所包含的样本点数为 $m = C_3^2 + C_7^1 C_3^1 = 24$。故所求概率为

$$p = \frac{m}{n} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15} \approx 0.53$$

解法二　随机试验是从10把钥匙中任取两把，从而样本空间 Ω 的样本点总数为

$$n = C_{10}^2 = 45$$

记事件 A 为“能把门打开”，则 $\overline{A}$ 为“不能把门打开”，从7把不能把门打开的钥匙中任取2把，共有 $C_7^2 = 21$ 种取法，即事件 $\overline{A}$ 共包含21个样本点，从而

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{21}{45} = \frac{24}{45} \approx 0.53$$

---

10. 一部4卷的文集随便放在书架上，问恰好各卷自左向右或自右向左的卷号为1、2、3、4的概率是多少？

解　一部4卷的文集随便放在书架上共有 $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ 种放法，而文集恰好各卷自左向右或自右向左的卷号为1、2、3、4共有2种放法。从而所求的概率为

$$p = \frac{2}{24} = \frac{1}{12} \approx 0.083$$

---

11. 100个产品中有3个次品，任取5个，求其中次品数分别为0、1、2、3的概率。

解　随机试验是从100个产品中任取5个，样本空间所包含

的样本点总数为 $n = C_{100}^5$。

记事件 A_i 为"取出的5个产品中含有 i 个次品"，$i = 0,1,2,3$。若取出的5个产品中没有次品，则取出的5个产品都必须从97个合格品中获得，从而事件 A_0 所包含的样本点数为 $m_0 = C_{97}^5$，故

$$P(A_0) = \frac{m_0}{n} = \frac{C_{97}^5}{C_{100}^5} \approx 0.856$$

同理，若取出的5个产品中含有 i 个次品，则 i 个次品必须从3个次品中获得，$5 - i$ 个合格品必须从97个合格品中获得，从而事件 A_i 所包含的样本点数为 $m_i = C_3^i C_{97}^{5-i}$，$i = 1,2,3$，故

$$P(A_1) = \frac{C_3^1 C_{97}^4}{C_{100}^5} \approx 0.138$$

$$P(A_2) = \frac{C_3^2 C_{97}^3}{C_{100}^5} \approx 0.006$$

$$P(A_3) = \frac{C_3^3 C_{97}^2}{C_{100}^5} \approx 0.00006$$

---

12. N 个产品中有 N_1 个次品，从中任取 n 个（$1 \leqslant n \leqslant N_1 \leqslant N$），求其中有 $k(k \leqslant n)$ 个次品的概率。

解 随机试验是从 N 个产品中任取 n 个，所以样本空间所包含的样本点总数为 C_N^n。

在取出的 n 个产品中恰有 k 个次品，必须在 N_1 个次品中取出 k 个次品，在 $N - N_1$ 个合格品中取出 $n - k$ 个合格品，事件"取出的 n 个产品中恰有 k 个次品"所含的样本点数为 $C_{N_1}^k C_{N-N_1}^{n-k}$。从而所求的概率为

$$p = \frac{C_{N_1}^k C_{N-N_1}^{n-k}}{C_N^n}$$

13. 一个袋内有5个红球，3个白球，2个黑球，计算任取3个球恰为一红，一白，一黑的概率。

解 随机试验是从5+3+2个球中任取3个，样本空间的样本点总数为 $n = C_{10}^3 = 120$。

欲使取出的三个球恰为一红、一白、一黑，必须从5个红球中取一红球，从3个白球中取一白球，从2个黑球中取一黑球，从而任取3个球恰为一红、一白、一黑这一事件所包含的样本点数为 $m = C_5^1 C_3^1 C_2^1 = 30$，故所求概率为

$$p = \frac{m}{n} = \frac{30}{120} = 0.25$$

14. 两封信随机地投入四个邮筒，求前两个邮筒内没有信的概率及第一个邮筒内只有一封信的概率。

解 将两封信随机地投入四个邮筒，共有 $4 \times 4 = 16$ 种投法，即样本空间的样本点总数为 $n = 16$。

记事件 A 为"前两个邮筒内没有信"，此时两封信投在后两个邮筒中，从而事件 A 所包含的样本点数为 $m_1 = 2 \times 2 = 4$。于是

$$P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{4}{16} = 0.25$$

记事件 B 为"第一个邮筒内只有一封信"，此时，需将两封信中的一封放入第一个邮筒，共有2种放法，剩下的一封放入其他三个邮筒中的一个，共有3种放法，从而事件 B 包含的样本点数为 $m_2 = 2 \times 3 = 6$。故

$$P(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{6}{16} = 0.375$$

15. 一批产品中，一、二、三等品率分别为0.8、0.16、0.04，若规定

一、二等品为合格品，求产品的合格率。

解　记 A 为一等品，B 为二等品，C 为合格品。显然，$AB = \varnothing$，$A + B = C$，且 $P(A) = 0.8$，$P(B) = 0.16$，从而

$$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) = 0.8 + 0.16 = 0.96$$

16. 袋内装有两个5分，三个2分，五个1分的硬币，任意取出5个，求总数超过1角的概率。

解　从 $2 + 3 + 5$ 个硬币中任取5个，共有 $C_{10}^5 = 252$ 种取法，即样本空间的样本点总数为 $n = 252$。

取出的5个硬币分值总数超过1角共有三种情况：

(1)5个硬币中有2个5分，再从 $3 + 5$ 个硬币中任取3个，共有 $C_2^2 C_8^3 = 56$ 种取法；

(2)5个硬币中1个5分，3个2分，1个1分，共有 $C_2^1 C_3^3 C_5^1 = 10$ 种取法；

(3)5个硬币中1个5分，2个2分，2个1分，共有 $C_2^1 C_3^2 C_5^2 = 60$ 种取法，从而

$$p = \frac{56 + 10 + 60}{252} = 0.5$$

17. 求习题11中次品数不超过一个的概率。

解　由11题知，所求的概率

$$p = P(A_0) + P(A_1) \approx 0.856 + 0.138 = 0.994$$

18. 估计习题6中的 $P(B \mid A)$、$P(C \mid A)$、$P(\overline{C} \mid B)$ 及 $P(AB)$。

解　由习题6知，$P(A) = 0.8688$，$P(B) = 0.80521$，$P(C) = 0.67787$，从而

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{0.80521}{0.8688} \approx 0.927$$

或 $P(B \mid A) = \dfrac{80521}{86880} \approx 0.927$

第二种做法是将10万人中在40岁以前死亡的人去掉，活到40岁的有 86880 人，这些人构成的集合称为缩减样本空间，在缩减样本空间中，事件 B 包含的样本点总数为 80521，从而

$$P(B \mid A) = \frac{\text{事件 } B \text{ 包含的样本点总数}}{\text{缩减样本空间包含的样本点总数}} = \frac{80521}{86880} \approx 0.927$$

用缩减样本空间求条件概率是求条件概率的一个非常重要的方法。

$$P(C \mid A) = \frac{P(AC)}{P(A)} = \frac{P(C)}{P(A)} = \frac{0.67787}{0.8688} \approx 0.780$$

或 $P(C \mid A) = \dfrac{67787}{86880} \approx 0.780$

$$P(\overline{C} \mid B) = \frac{P(B\overline{C})}{P(B)} = \frac{(80521 - 67787)/100000}{0.80521} \approx 0.158$$

或 $P(\overline{C} \mid B) = \dfrac{80521 - 67787}{80521} \approx 0.158$

注意到 $B\overline{C}$ 是活到 50 岁而在 60 岁之前死亡的人，即在 50 ~ 60 岁之间死亡的人。

$$P(AB) = P(B) = 0.80521$$

注意到 AB 是既活到 50 岁又活到 60 岁的人，即表示活到 60 岁的人。

---

19. 由长期统计资料得知，某一地区在4月份下雨（记作事件 A）的概率为$\frac{4}{15}$，刮风（用 B 表示）的概率为$\frac{7}{15}$，既刮风又下雨的概率为

$\frac{1}{10}$,求 $P(A \mid B)$、$P(B \mid A)$、$P(A+B)$。

解　依题意知:$P(A)=\frac{4}{15}, P(B)=\frac{7}{15}, P(AB)=\frac{1}{10}$, 从而

$$P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1/10}{7/15}=\frac{3}{14}\approx 0.214$$

$$P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1/10}{4/15}=\frac{3}{8}=0.375$$

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$=\frac{4}{15}+\frac{7}{15}-\frac{1}{10}=\frac{19}{30}\approx 0.633$$

---

20. 为了防止意外,在矿内同时设有两种报警系统 A 与 B,每种系统单独使用时,其有效的概率系统 A 为 0.92,系统 B 为 0.93,在 A 失灵的条件下,B 有效的概率为 0.85,求:

(1) 发生意外时,这两个报警系统至少有一个有效的概率;

(2) B 失灵的条件下,A 有效的概率。

解　依题意知 $P(A)=0.92, P(B)=0.93, P(B \mid \overline{A})=0.85$, 而

$$P(B \mid \overline{A})=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(\overline{A}B)}{1-P(A)}=\frac{P(\overline{A}B)}{1-0.92}=0.85$$

从而　$P(\overline{A}B)=0.85\times 0.08=0.068$

而　$B=AB+\overline{A}B, (AB)(\overline{A}B)=\varnothing$

所以　$P(AB)=P(B)-P(\overline{A}B)=0.93-0.068=0.862$

又由　$A=AB+A\overline{B}, (AB)(A\overline{B})=\varnothing$

有　$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=0.92-0.862=0.058$

(1) $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$$=0.92+0.93-0.862$$

$$=0.988$$