21世纪高等学校教材

陈才生 主编

# 数学物理方程

SHUXUE WULI FANGCHENG

东南大学出版社

SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

责任编辑 吉雄飞
封面设计 顾晓阳

ISBN 7-81089-105-7

9 787810 891059 >

ISBN 7-81089-105-7
O·7 定价: 20.00元

# 数学物理方程

主　编　陈才生
编　写　李　刚　王文初　杨钟海
　　　　周继东　董祖引

东南大学出版社

## 内容提要

本书是作者分别在河海大学、江苏大学、南京气象学院数学系和为工科研究生讲授"数学物理方程"的讲稿基础上，经过多次认真讨论和修改而成．

本书主要内容包括偏微分方程的基本概念、三类典型方程的导出与定解问题、特征线积分法、傅里叶级数理论、分离变量法、格林函数法、积分变换法、极值原理与应用、能量积分法与应用、贝塞尔函数和勒让德函数及应用等．本书选材适当，叙述详尽，重点介绍了定解问题的各种基本解法，突出了应用性．每一章配备了较多类型的例题与习题，供读者阅读和练习．书末附有大部分习题答案与提示．

本书可作为应用数学专业、信息与计算科学专业本科生和工科有关专业研究生的教学用书，也可作为从事本门课程教学的教师和有关工程科技人员参考．

**图书在版编目(CIP)数据**

数学物理方程/陈才生主编．—南京：东南大学出版社，2002.5

ISBN 7-81089-105-7

Ⅰ.数... Ⅱ.陈... Ⅲ.数学物理方程—高等学校—教材 Ⅳ.O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 012777 号

东南大学出版社出版发行
(南京四牌楼 2 号 邮编 210096)
出版人 宋增民
江苏省新华书店经销 华东有色地研所印刷厂印刷
开本：700mm×1000mm 1/16 印张：15.5 字数：300 千字
2002 年 11 月第 1 版 2002 年 11 月第 1 次印刷
印数：1—8000 定价：20.00 元

# 出 版 说 明

近几年来，我国高等教育事业发生了许多巨大的变化，其中之一就是研究生教育正以前所未有的速度向前发展，研究生的招生规模逐年大幅度地增长．这说明我国现代化建设对高层人才的需求越来越大，这是国家兴旺发达的重要标志之一．

为了适应研究生教育迅猛发展的需要，江苏省工业与应用数学学会与东南大学出版社联合组织力量撰写并出版一套研究生用的数学教材与教学参考书，其中包括数学类研究生的数学教材和参考书，也包括非数学类研究生的数学教材和参考书．这样做的主要出发点是力图动员全省的数学工作者来参与这项工作，使这套教材写得更好一点．

我们的主观愿望是这套教材具有一些自身的特点．第一，起点适中．起点太高，脱离学生的实际水平，难以教学．起点低了，又不能适应形势的发展，也满足不了学生渴望求知的要求．选择恰如其分的起点的关键，在于处理好各课程中经典内容与现代内容之间的关系，要将两者有机地结合在一起．第二，较广泛的适用面．这套教材包含数学类研究生的学位课程、选修课程、专业课程，也包括非数学类研究生的基础课程．我们希望不论哪一本教材都能被较多的专业学生所采用，这就要求在内容的处理上有一定的自封闭性，突出这门课程的主题．当然，有时为了不过多地增加篇幅，冲淡主体思想的阐述，也略去一些命题的证明，但都指出了有关的参考书籍．第三，便于阅读．研究生教育与本科生教育有很大的不同，那就是更强调学生的主观能动性和独立工作能力的培养．研究生课程的教学，除了有主讲教师启发性的讲解以外，更重要的是靠学生自学．因此，要求教材文字通顺，说理清晰，跨度不能太大，但也不能过细、过繁．书的对象是读者，只有读者认为好读的书才是一本好书．

一本好的教材需要经历一个长时期的完善过程，即不断使用，不断修改，精益求精．这套教材第一版都是有关作者在多年教学实践的基础上撰写而成的，有的讲义（书的前身）在相关的学校内已使用多年，但毕竟仍有一定局限性，缺点与错误一定还不少．我们热切地希望广大数学工作者都关心这套教材，帮助我们修改，力争在经过几次修订后，使这套教材能成为一套受欢迎的教学用书．

研究生数学教材<br>编委会<br>2001 年 11 月

# 前　　言

数学物理方程通常是指物理学、力学、工程技术和其他学科中出现的偏微分方程．它不光是应用数学专业、信息与计算科学专业本科生的一门重要的专业基础课,而且是一些工科专业的本科生和研究生不可缺少的专业基础课．随着现代科学技术的发展,使得数学物理方程在理论和应用等方面的内容愈加丰富,并因此而不断加强了同其他学科的深人联系和互相渗透,从而又促进了偏微分方程的进一步研究与发展．

随着国家面向21世纪课程改革计划的实施,为适应新世纪高等教育教学改革的发展要求,我们根据工科专业的教学特点与要求,参阅了国内外有关教材和文献,编写了这本更加突出应用性的教学参考书．它可以作为工科有关专业的本科生和研究生用的数学物理方程课程的教材或参考书,也可作为数学与应用数学专业、信息与计算科学专业本科生以及应用数学工作者、工程技术人员、科技工作者作为教学用书或参考书．学习全书需60～80学时,但有些章节是相互独立的,可根据需要取舍．数学物理方程的研究范围十分广泛,内容十分丰富．由于它的物理背景直接来源于自然现象和工程技术,所以不断地产生需要解决的新问题和新方法．在今天,数学物理方程中的一些基本理论和基本方法与技巧已经不仅仅是每一个应用数学工作者所必备的基础知识,而且是工程技术人员处理工程实际问题的常用方法．因此这门课程应是给学生提供一个数学模型的建立以至求解的数学理论与应用的课程,使学生掌握有关偏微分方程的基本理论和求解偏微分方程的各种方法与技巧．所以本书在阐述一般理论的同时,重点是根据各类定解问题及有关解法来展开讨论．我们试图把数学理论、解题方法与技巧和实际物理背景三者有机地结合在一起,对各章内容进行了细致的安排,使学生能够有条理地正确地理解所学内容．全书共分8章．第1章绪论,作为本书的开头,本章介绍了三类典型方程的导出和它们的定解问题的提法与物理背景;同时也讨论了两个自变量的二阶线性偏微分方程的分类、标准型与化简．第2章介绍了用于求解波动方程初值问题的行波法(又称特征线积分法)、球面平均法和降维法．第3章介绍分离变量法,它是求解偏微分方程的最简单而应用最广泛的方法之一．在这一章里,我们首先简要复习了傅里叶(Fourier)级数理论,然后叙述了分离变量法的基本概念以及应用这个方法时所必要的可分离条件,重点放在分离变量法在求解初边值问题和边值问题中的各种应用;在本章的最后,我们简要介绍了斯图姆—刘维尔

(Sturm－Liouville)理论．第4章介绍了格林(Green)函数方法，以及一些特殊区域的格林函数的构造和在边值问题上的应用．傅里叶变换和拉普拉斯(Laplace)变换是求解无界区域上定解问题的两种常用方法，我们在第5章里给出了详细的讨论．关于定解问题的唯一性和稳定性的讨论，我们放在第6章和第7章里进行．由于满足热传导方程和拉普拉斯方程的解成立极值原理(又称最大最小值原理)，所以可用极值原理来研究这两类方程定解问题解的唯一性和稳定性．能量积分法是偏微分方程定性研究中的一种基本方法，它可用来研究解的各种估计和解的唯一性、稳定性以及解的渐近性态，这种方法对三类方程的定解问题都适用，这可以在第7章里看到．在最后一章里，我们介绍了两类经常出现在数学物理问题中的特殊函数——贝塞尔(Bessel)函数与勒让德(Legendre)函数，并讨论了其应用．

对于上述内容，教师可依据教学的具体情况适当加以选取．

本书总体框架和编写大纲由编者反复讨论后确定．第1、4章由河海大学周继东和董祖引同志执笔；第2章由江苏大学杨钟海同志和河海大学陈才生同志执笔；第3、8章由江苏大学王文初和杨钟海同志执笔；第5、6、7章由河海大学陈才生同志和南京气象学院李刚同志执笔．交稿前，由陈才生同志对本书的整体编排作了统一处理．

在本书的编写过程中，得到了江苏省工业与应用数学学会和东南大学出版社的大力支持，东南大学数学系管平教授给予了极大关怀，在此编者们一并深致谢忱．

由于编者水平所限，错误和缺陷在所难免，恳请广大读者批评指正．

编　者

2002年10月

# 目　　录

# 1　绪论

本章将介绍数学物理方程(偏微分方程)的一些基本概念,以及数学物理方程所研究的对象,其中包括将典型物理模型归结为偏微分方程、偏微分方程定解问题及其适定性、二阶线性偏微分方程的分类,以及线性定解问题的叠加原理.

## 1.1　概念

在研究较复杂的物理运动过程中,反映运动规律的量与量之间的关系往往不易直接写出,却能比较容易地建立起变量和未知函数的偏导数之间的关系式.这种联系着几个自变量、未知函数及其偏导数的等式称为偏微分方程.在偏微分方程中,偏导数当然是不可缺少的.

例如

$$\frac{\partial u}{\partial x}+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=f(x,y) \tag{1.1.1}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=u \tag{1.1.2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{1.1.3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=x^2 y \tag{1.1.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \tag{1.1.5}$$

等都是偏微分方程,其中 $u$ 为未知函数,$(x,y)$ 或 $(x,t)$ 是自变量,$a(x,y)$,$f(x,y)$ 为已知函数.

偏微分方程的一般形式可写成

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,u,u_{x_1},u_{x_2},\cdots,u_{x_n},\cdots)=0 \tag{1.1.6}$$

其中 $F$ 是一个已知函数,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为自变量,$u$ 是关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的未知函数.$F$ 中可以不显含自变量和未知函数,但必含有未知函数的某个偏导数.

出现在方程 $F=0$ 中的最高阶偏导数的阶数称为偏微分方程的阶.如方程(1.1.1),(1.1.2) 是一阶的,(1.1.3),(1.1.4) 是二阶的,(1.1.5) 是三阶的.

如果方程 $F=0$ 对未知函数及其所有偏导数均是线性的,则称为线性偏微分方程,否则称为非线性偏微分方程.如方程(1.1.1),(1.1.3),(1.1.4) 是线性的,(1.1.2),(1.1.5) 是非线性的.

对于一个非线性偏微分方程,如果未知函数的所有最高阶偏导数都是线性的,

则称其为拟线性偏微分方程，如方程(1.1.5)是拟线性的．

对线性偏微分方程而言，我们将方程中不含未知函数及其偏导数的项称为自由项，当自由项为零时，线性偏微分方程称为齐次的，否则称为非齐次的．如方程(1.1.3)是齐次的，(1.1.4)是非齐次的．方程(1.1.1)中的自由项为 $f(x,y)$，当 $f(x,y)=0$ 时是齐次的，否则是非齐次的．顺便指出，齐次、非齐次是对线性方程而言的，对于非线性方程不再区分．

设方程(1.1.6)的阶数为 $m$，函数 $u=u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在区域 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 中具有 $m$ 阶的连续偏导数，且代入方程(1.1.6)得恒等式，则称 $u$ 为区域 $\Omega$ 内方程(1.1.6)的一个解，这个解又称古典解(相对于更广意义下的广义解).

**例 1.1** 验证 $u(x,t)=f(x-at)+g(x+at)$ 是方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

的解，其中 $f,g$ 是任意两个二阶连续可微函数，$a$ 为正常数．

**解**
$$\frac{\partial u}{\partial t}=-af'(x-at)+ag'(x+at)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2f''(x-at)+a^2g''(x+at)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(x-at)+g'(x+at)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(x-at)+g''(x+at)$$

故

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

移项即证．

事实上，$u(x,t)=f(x-at)+g(x+at)$ 也是原方程的全部解，方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \quad 或 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

称为一维波动方程．

**例 1.2** 验证 $u=\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 是方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

的一个解．

**解** 直接计算，我们得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

故 $u=\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 满足方程．

方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

称为二维调和方程或二维拉普拉斯(Laplace) 方程．由复变函数知,任何解析函数 $f(z)$ 的实部和虚部都是调和方程的解．

需要注意的是,并不是每个偏微分方程都有解．1957 年,Lewy 曾举了一个著名的反例说明这一点．

## 1.2 三类典型方程的导出

下面我们将通过几个不同的物理模型来导出数学物理方程中三类典型的方程,这三类方程也是我们以后主要的研究对象．事实上,本学科中所涉及的偏微分方程绝大多数都具物理背景,它们是物理现象的数学描述,从而实现用数学的方法来研究物理问题(数学物理方程的名称由此而得).

**例 1.3** 弦的横振动问题．

设有一根均匀柔软的细弦,平衡时沿直线拉紧,除受不随时间而变的张力作用及弦本身重力外,不受外力影响．它在做微小的横向振动．下面我们用偏微分方程来刻画它的振动规律．在推导过程中将简化或略去某些次要因素．

所谓横向运动是指全部运动出现在一个平面上,且弦上的点沿垂直于 $x$ 轴的方向运动(见图 1.1);微小是指振动的幅度及弦在任意位置处切线的倾角都很小．

设弦上具有横坐标 $x$ 的点在时刻 $t$ 时的位置为 $M$,位移 $NM$ 记作 $u$,则 $u$ 是 $x,t$ 的函数 $u(x,t)$.

用微元法的思想,我们把弦上点的运动先看作是小弧段的运动,然后再考虑小弧段趋于 0 时的极限情况．在弦上任取一弧段 $\widehat{MM'}$,其长为 $ds$,设 $\rho$ 是弦的线密度,弧段 $\widehat{MM'}$ 两端所受的张力记为 $T$ 和 $T'$,其方向沿切线方向．由于弦只作横向振动,故弧段 $\widehat{MM'}$ 在 $x$ 轴方向受力总和为 0,即

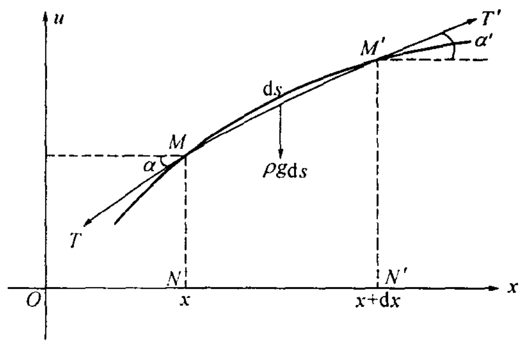


图 1.1

$$T'\cos\alpha' - T\cos\alpha = 0$$

在振动微小的假设下,振动过程中弦上 $M$ 点与 $M'$ 点处切线的倾角都很小,即 $\alpha \approx 0, \alpha' \approx 0$,利用

$$\cos\alpha = 1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}-\cdots$$

并略去所有高于一次方的各项,有

$$\cos\alpha \approx 1, \qquad \cos\alpha' \approx 1$$

由此可得(近似地)

$$T = T'$$

在 $u$ 轴方向弧段 $\overset{\frown}{MM'}$ 受力总和为

$$-T\sin\alpha + T'\sin\alpha' - \rho g\mathrm{d}s$$

其中 $-\rho g\mathrm{d}s$ 是弧段 $\overset{\frown}{MM'}$ 的重力. 又因为 $\alpha \approx 0, \alpha' \approx 0$ 时,有

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \approx \tan\alpha = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

$$\sin\alpha' \approx \tan\alpha' = \frac{\partial u(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial x}$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1+\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]^2}\mathrm{d}x \approx \mathrm{d}x$$

且小弧段在时刻 $t$ 沿 $u$ 方向的加速度近似地为 $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$,小弧段的质量为 $\rho\mathrm{d}s$. 由 Newton 第二运动定律,有

$$-T\sin\alpha + T'\sin\alpha' - \rho g\mathrm{d}s \approx \rho\mathrm{d}s\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

或

$$T\left[\frac{\partial u(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] - \rho g\mathrm{d}x \approx \rho\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\mathrm{d}x$$

上式左边方括号内的部分是由于 $x$ 产生 $\mathrm{d}x$ 的变化而引起的 $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ 的改变量,可用微分近似代替,即

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} &\approx \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

于是

$$T\left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\rho g}{T}\right]\mathrm{d}x \approx \rho\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\mathrm{d}x$$

或

$$\frac{T}{\rho}\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \approx \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + g$$

一般说来,张力较大时弦振动速度变化很快,即 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 要比 $g$ 大得多,故可将 $g$ 略去. 这样弦的振动规律近似地满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.2.1}$$

其中 $a^2 = \frac{T}{\rho}$.

如果在振动过程中,弦上另外还受到一个与弦振动方向平行的外力,其在时刻 $t$ 弦上 $x$ 点处的外力密度(单位弦长所受外力)为 $F(x,t)$. 此时,不难推得弦的强迫振动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{1.2.2}$$

其中 $f(x,t) = \frac{1}{\rho}F(x,t)$.

称方程(1.2.1)为齐次一维波动方程,(1.2.2)为非齐次一维波动方程.

类似地,均匀薄膜的横振动满足下面的二维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{1.2.3}$$

和

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x,y,t) \tag{1.2.4}$$

这里 $u = u(x,y,t)$ 是薄膜在时刻 $t$ 和点 $(x,y)$ 处的位移;$a^2 = \frac{T}{\rho}$,$T$ 为张力,$\rho$ 为面密度;$f(x,y,t)$ 表示 $t$ 时刻单位质量的膜在 $(x,y)$ 点处所受垂直方向的外力.

此外,电场 $E$ 或磁场 $H$ 在一定条件下满足下面的三维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{1.2.5}$$

其中 $a^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu}$,$\varepsilon$ 是介质的介电常数,$\mu$ 是导磁率,$u$ 是 $E$(或 $H$)的任意一个分量.

**例 1.4**　热传导方程.

所谓热传导就是物体内温度较高的点处的热量向温度较低点处的流动.热传导问题归结为物体内温度的分布.

在物体 $G$ 中任取一闭曲面 $S$(见图 1.2),以函数 $u(x,y,z,t)$ 表示物体 $G$ 在位置 $M(x,y,z)$ 时刻 $t$ 的温度.根据 Fourier 热传导定律,在无穷小时段 $dt$ 内流过物体的一个无穷小面积 $dS$ 的热量 $dQ$ 与时间 $dt$,曲面面积 $dS$,以及物体温度 $u$ 沿曲面 $dS$ 的法线方向的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 三者成正比,即

$$dQ = -k\frac{\partial u}{\partial n}dSdt$$

其中 $k = k(x,y,z)$ 是物体在点 $M(x,y,z)$ 处

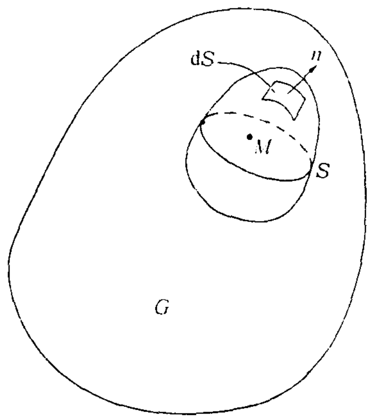


图 1.2

热传导系数,取正值;$\boldsymbol{n}$ 是外法向;$\frac{\partial u}{\partial n}$ 是温度函数在点 $M(x,y,z)$ 处沿外法向的方向导数.规定 $\boldsymbol{n}$ 所指的那一侧为 $\mathrm{d}S$ 的正侧.负号的出现是由于热量的流向和温度梯度($\mathrm{grad}u$)的方向相反.

对于 $G$ 内任一封闭曲面 $S$,设其所包围的空间区域为 $V$,则从时刻 $t_1$ 到时刻 $t_2$ 经曲面 $S$ 流出的热量为

$$Q_1 = -\int_{t_1}^{t_2}\left[\iint_S k\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S\right]\mathrm{d}t$$

设物体的比热为 $c(x,y,z)$,密度为 $\rho(x,y,z)$,则无穷小体积 $\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 的温度由 $u(x,y,z,t_1)$ 升高到 $u(x,y,z,t_2)$ 所需的热量为

$$\mathrm{d}Q = c\rho[u(x,y,z,t_2)-u(x,y,z,t_1)]\mathrm{d}V$$

因此,使 $V$ 内各点温度由 $u(x,y,z,t_1)$ 变化为 $u(x,y,z,t_2)$ 所需热量为

$$Q_2 = \iiint_V c\rho[u(x,y,z,t_2)-u(x,y,z,t_1)]\mathrm{d}V$$

根据热量守恒定律,有

$$Q_2 = -Q_1$$

即

$$\iiint_V c\rho[u(x,y,z,t_2)-u(x,y,z,t_1)]\mathrm{d}V$$
$$= \int_{t_1}^{t_2}\iint_S k\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t$$

假设函数 $u(x,y,z,t)$ 关于 $x,y,z$ 具有二阶连续偏导数,关于 $t$ 具有一阶连续偏导数,则由 Gauss 公式可得

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint_V\left[c\rho\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\mathrm{d}V\mathrm{d}t = 0$$

由于时间间隔 $[t_1,t_2]$ 及区域 $V$ 是任意取的,且被积函数是连续的,因此在任何时刻在 $G$ 内任意一点都有

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{1.2.6}$$

方程(1.2.6)称为非均匀的各向同性体的热传导方程.如果物体是均匀的,此时 $k,c$ 及 $\rho$ 均为常数,令 $a^2=\frac{k}{c\rho}$,则方程(1.2.6)化为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{1.2.7}$$

方程(1.2.6),(1.2.7)都称为三维热传导方程.本书中的三维热传导方程也特指方程(1.2.7).

若考虑物体内有热源,其热源密度为 $F(x,y,z,t)$,则有热源的热传导方程为