中学数学思维方法丛书

猜想与合情推理

过伯祥 编著

CAIXIANGYUHEQINGTUILI

GUOBOXIANG

ZHONGXUE SHUXUE SIWEIFANGFA CONGSHU

大象出版社

中学数学思维方法丛书

猜想与合情推理

过伯祥 编著

大象出版社

CAIXIANGYUHEQINGTUILI
GUOBOXIANG

图书在版编目(CIP)数据

猜想与合情推理/过伯祥编著. -郑州:大象出版社,1999
(中学数学思维方法丛书/王梓坤,张乃达主编)
ISBN 7-5347-2335-3
Ⅰ.猜… Ⅱ.过… Ⅲ.数学课-中学-教学参考资料
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 21771 号

责任编辑　侯耀宗　　　　责任校对　王　森

大象出版社出版(郑州市农业路 73 号　邮政编码 450002)

新华书店经销　　河南省瑞光印务股份有限公司印刷

开本 850×1168　　1/32　　印张 5.5　　字数 118 千字

1999 年 9 月第 1 版　　　　1999 年 9 月第 1 次印刷

印数 1—2 500 册　　　　定　价　6.35 元

若发现印、装质量问题,影响阅读,请与承印厂联系调换。

印厂地址　郑州市二环路 35 号

邮政编码　450053　　　　电话　(0371)3822319

中学数学思维方法丛书

主　　编　王梓坤　张乃达

编　　委　(以姓氏笔画为序)

王梓坤　过伯祥　杨世明

张乃达　蒋　声

本册作者　过伯祥

序

早在1995年8月，大象出版社（原河南教育出版社）在扬州举办了一个座谈会，邀请十余位教学水平很高的数学教师参加，商讨出版一套“中学数学思维方法丛书”。与会同仁认为，这是一个富有创见的倡议，因而得到大家热烈赞许。提供一套既有较深厚的理论基础，又富有文采和启发性、可读性的关于数学思维的参考书，对中学数学教学，无疑会是非常有益的；而更主要的，广大的中学生们，将在形象思维、逻辑推理和严密计算等方面，学到很多的东西。这对将来无论做什么工作，都会受益无穷。

回想我们青少年时期学习数学的情景，总会有几分乐趣几分惊异。做出了几道难题是乐趣，而惊异则来自方法的进步。记得小学算鸡兔同笼，必须东拼西凑，多一只兔便比鸡多了两条腿，好不容易才能做出一题。而学过代数，这类问题便变得极为简单。做几何题也一样，必须具体问题具体解决，而学过解析几何后便有了一般的

程序可循。至于算圆的面积，如果不用积分便会相当麻烦。由此可见，方法的进步对科学的发展是何等重要。以上是对学习现成的东西而言。如果要进行科研，从事创新、发现或发明，那就更应重视方法，特别是思维方法。没有新思想，没有新方法，要超过前人是很困难的。有鉴于此，一些优秀的数学家便谆谆告诫学生们，要非常重视学习方法和研究方法。美国著名数学家 G. Pólya 写过好几种关于数学思想方法的书，如《怎样解题》、《数学的发现》、《数学与猜想》，后来都成为世界名著，很受欢迎。

学习任何一门科学，都有掌握知识和培养能力两方面。一般说来，前者比较容易。因为知识已经成熟，而且大都已经过前人整理，成为循序渐进的教材。但能力则不然，那是捉摸不定、视之无形的东西，主要靠自己去思考，去探索，去总结，去刻苦锻炼。老师的培养固然重要，但只能起辅导作用。只可意会，不可言传，而有时甚至连意会都做不到。正如游泳，只靠言传是绝对学不会的。这是对受业人而说的。

至于老师，则应无保留地传授自己的经验和体会，尽量缩短学生学习的时间。中国有句古诗："鸳鸯绣出凭君看，不把金针度与人。"意思是说知识可以输出，但能力不可传授。前一句话意思很好，后一句应改为"急把金针度与人"。这套丛书，正是专门传授金针的。

一般的科学研究方法，可分为演绎与归纳两大类。在数学中，演绎极为重要，而归纳则基本上用不上，除了 C. F. Gauss 等人偶尔通过观察数列以提出一些数论中的猜想而外。不过自从计算机发明后，这种情况已大为改

观。混沌学主要靠计算机而发展起来，数学模拟也主要靠计算机。再者，以往数学中极少实验，还是由于计算机的广泛使用，现在不少数学系已有了实验室，特别是统计实验室。可以期望，计算机对改变数学的面貌，对改善数学的思维方法，都会起到越来越大的作用。

在此之前，我国已经出版了几本关于数学方法的书，它们都各有特色。如就规模之大，选题之广，论述之精而言，这套丛书也许是盛况空前、蔚为大观的。我们希望它在振兴我国的科学事业和培养数学人才中，将会起到令人鼓舞的作用。

王梓坤

99.7.6.

引　　言

当代著名科学家波普尔说过:我们的科学知识,是通过未经证明的(和不可证明的)预言,通过猜测,通过对问题的尝试性解决,通过猜想而进步的.

数学史上就充满着猜想! 可以说,数学是伴随着对数学命题的猜想而发展的.

早在高斯出生以前的2000多年来的岁月中,数学家们一直在猜想:“一切正多边形都能用尺规来完成作图”,并一直想用尺规来作古代所不能作的那些正多边形.然而,这一切尝试都以失败而告终.

一天,19岁的高斯也正在思考这一问题.他考察了边数少于20的正多边形,其中能用欧几里得工具作出的,计有正三、四、五、六、八、十、十二、十五、十六和十七边形(1796年,高斯已找到了用圆规和直尺来作正十七边形的方法).

他又从中画去了那些用倍边法即可作出的正多边形(例如正六边形、正十二边形等).于是,只剩下了边数为3、4、5、15、17的正多边形为可作.他又想到

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15},$$

所以正十五边形的可作其实是建立在正三、五边形可作的基础上的，而4又为偶数.这样，边数为素数且小于20的正多边形中，能用尺规作图的只有正三、五、十七边形了.

过了些日子后的某一天早晨，他猛然发现

$$3=2^{2^0}+1,$$

$$5=2^{2^1}+1,$$

$$17=2^{2^2}+1.$$

于是，他猜想可能会有结论："一个具有素数个边的正多边形，当且只有当它的边数具有 $f(n)=2^{2^n}+1$ 这样的形式时，才可以用欧氏工具来作出."

这就是高斯猜想！由此，他朝向目标，兴奋地投入了工作.5年后的1801年，高斯终于出色地证明了这一猜想.

从某种意义上说，一部数学史就是猜想与验证猜想的历史.这里面，既有伟大的猜想，也有微不足道的猜想；有最后被证明了的猜想，也有最后被否定了的猜想；有很快被解决了的猜想，更有至今还"悬着"的猜想.有许多数学家是猜想家，他们具有非凡的直感、直觉能力，为后世留下了一个个饶有趣味的诱人的猜想.重大猜想的解决过程，往往也带来了数学发展的巨大推动力.

所以，著名科学史家丹皮士说："人类是在十试九误的过程中进步的."每一次试验都是由某一个猜想引起的.实际上，试，就是检验某一个猜想.

所以，波普尔说过："科学总是首先大胆地跳跃到某种结论上，然后，再去小心地搜集经验证据."这就启示我们，在研究问题时，或是在试解难题中，如果遇到了很大困难，乃至一筹莫展时——

请不要忘记“猜想”!

不妨“跳跃到某种结论上”,就是提出一个猜想,去继续进行一些试验;

就在这样的试验过程中,一个新的好想法也许会突然地在你的脑屏闪现;你也许又会联想到……

猜想.使人的认识摆脱了消极等待的被动状态.在人的认识发展过程中,功不可没,作用伟大.难怪科学家们总是感慨地惊叹:“人类每一次大的成功,都是开始于大胆的猜想!”

本书将以数学史上的著名猜想和数学学习活动中的典型猜测为素材与背景,探讨、总结数学猜想的孕育、形成和解决过程中的规律性的东西:猜测的常用方法,合情推理的模式,猜想的过程等.以帮助读者开阔思路,提高自己的思维素质,了解与掌握好不可或缺的重要的数学思维方法——数学猜想.它将会帮助你,当你在难题面前一无所措、一筹莫展时,如何通过一些试验——猜测——再试验的活动,去逐步摆脱消极等待的窘境.

目　录

一、数学史上的著名猜想

数学史上,长时期未能解决的数学猜想特别多！并且很多都是世界级的难题,其中属于整数论方面的问题又占多数.它们表面上是那么的浅显,好像不难解决似的;其实,若无深厚的数学功底,即使想接近它也十分困难.本章特作较多的介绍,使数学爱好者有一个初步了解.如果你有志要攻克这些猜想,就必须作好长期艰苦跋涉的思想准备.

1.被否定的数学猜想

(1)试证第五公设的漫长历程

几何学是从制造器皿、测量容器、丈量土地等实际问题中产生和发展起来的.

几何学的发展历程中,有两个重大的历史性转折.其一是,大约从公元前7世纪到公元前3世纪,希腊数学从素材到框架,已经

为几何学的理论大厦的建造准备了足够的条件.欧几里得在前人毕达哥拉斯、希波克拉底和欧多克斯等人的工作基础上,一举完成了统治几何学近2000年的极其伟大的经典著作《几何原本》.它使几何学发展成为一门独立的理论学科,是几何学史上的一个里程碑.

其二,也正是由于《几何原本》的问世,才带来了一个使无数人困惑和兴奋的著名问题——欧几里得第五公设问题.

在《几何原本》的第一卷中,规定了五条公设和五条公理.著名的欧几里得第五公设:

“若两条直线被第三条直线所截,如有两个同侧内角之和小于两直角,则将这两直线向该侧适当延长后必定相交.”

就是这五条公设中的最后一条.由于它在《几何原本》中引用得很少(直到证明关键性的第29个定理时才用到它);而且,它的辞句冗长,远不如前四条公设那样简单明白.于是给后人的印象是:似乎欧几里得本人也想尽量避免应用第五公设.

于是,一代又一代的数学家猜测,大概不用花费很多力气,就能证明欧几里得第五公设.就这样,数学家们开始了试证第五公设的历程.

这是个始料未及的漫长历程!真正是前赴后继,几乎每个时代的大数学家都做过这一件工作.

然而,满以为非常简单,只不过是举手之劳的这么一件事,谁料历时两千年仍未解决.

第五公设问题几乎成了“几何原理中的家丑”(达朗贝尔).

直至19世纪,人们才逐渐意识到,“欧氏第五公设可以证明”是一个错误的猜想.但它却引导数学家们得到了有意义的结果.所以说:

错误的猜想有时也是极有意义的!

"在我们试图证明某个猜想的时候,如果使尽各种招数仍无进展,就应该去查一查这个猜想本身有没有毛病."

(2)引出一个大胆猜想

第五公设的一个又一个试证,总是发生"偷用"某个与第五公设等价的"假设"去代替的毛病,这逐渐地使几位思想较开阔而又有远见的数学家高斯、亚诺什·鲍耶、罗巴契夫斯基意识到:

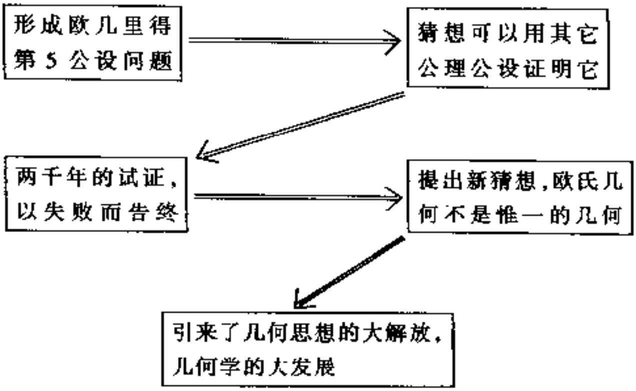
"欧几里得第五公设是不能从《几何原本》的其余公设、公理中导出的."亦即与其它公设公理不相依赖,并且提出了一个新的大胆猜想:

"欧几里得几何不是惟一的几何;

任何一组假设如果不导致矛盾的话,一定提供一种可能的几何."

罗巴契夫斯基、鲍耶正是在此想法的基础上开展了一系列工作,才发现了非欧几何的.虽然,他们的工作约有 30 年之久被人们所忽视;虽然,非欧几何的相容性问题在其后的 40 年中仍然悬而未决,然而,从某数学家的头脑中首先形成这大胆的猜想——与第五公设相矛盾的公理,也许仍可建立逻辑上相容的新几何——的那一刻起,就注定了即将发生几何学发展的又一次历史性的大转折:将迎来的是,几何学思想的大解放,几何学大发展的新时代.

可以说,在 19 世纪所有复杂的技术创造中间,最深刻的一个——非欧几何的创造,就是起源于两千年试证第五公设的失败而日渐形成的大胆的猜想.非欧几何是在欧几里得几何领域中,一系列的长期努力所达到的一个新顶点.我们可以把这段历史发展画成如下的简明框图:



(3)费尔马猜想

我们知道

$2^{2^0}+1=3$,

$2^{2^1}+1=5$,

$2^{2^2}+1=17$

都是素数.一天,法国数学家费尔马似有所悟.他继续试验

$2^{2^0}+1=257$,

$2^{2^4}+1=65537$,

经检验,它们也都是素数.那么

“如 $2^{2^n}+1$(n 为非负整数)形式的数(是不是)都是素数.”

这是费尔马在1640年提出的一个猜想.

时间过去了100年,到了1732年,俄国数学家欧拉指出:

$2^{2^5}+1=641\times 6700417$.

一个反例就否定了一个猜想,于是,就宣告了费尔马的这个猜想不成立.

以后,人们又陆续找到了不少反例,如

$$2^{2^6}+1=274,177\times 67\ 280\ 421\ 310\ 721$$

也是合数.

如今,人们把形如 $2^{2^n}+1$ 的数叫做费尔马数.一些年来,人们共研究了 46 个 $n\geqslant 5$ 的费尔马数,竟连一个素数都没再找到.于是有人作出了相反的猜想:只有有限个费尔马数是素数.这个猜想是否正确还有待于证明.

(4)关于 $6n\pm 1$ 型数对的猜想

数学家迪布凡耳(De Bouvelles)在 1509 年曾注意到,在形如 $6n-1$ 与 $6n+1$ 的数对

5、7;11、13;17、19;23、25;29、31;35、37;41、43;…

中,当 n 取前几个自然数时,都至少有一个数是素数.由此他提出猜想:

"对于任何自然数 n,$6n-1$ 和 $6n+1$ 这两个数中都至少有一个是素数."

时隔不久,有人就举出了反例:最小一个使结论不成立的自然数是 20.而且,一般地,取 $n=20+77k(k=0,1,2,\cdots)$,都能使 $6n-1$ 和 $6n+1$ 分别地含有因数 7 和 11,因为

$$6n-1=119+6\times 77k=7(17+66k),$$

$$6n+1=121+6\times 77k=11(11+42k).$$

(5)x^n-1 的因式特征的猜想

数学家契巴塔廖夫曾由下面的因式分解式:

$$x-1=x-1,$$

$$x^2-1=(x-1)(x+1),$$

……… ………