教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材
数 学 与 应 用 数 学 专 业 系 列 教 材

数学分析专题研究

主编 高夯

中央廣播电視大學出版社

教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材
数学与应用数学专业系列教材

数学分析专题研究

主编　高　夯

中央广播电视大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学分析专题研究/高夯主编. —北京：中央广播电视大学出版社，2003.7

教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材.

数学与应用数学专业系列教材

ISBN 7-304-02414-3

Ⅰ. 数... Ⅱ. 高... Ⅲ. 数学分析—专题研究—电视大学—教材 Ⅳ. 017

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 065838 号

教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材

数学与应用数学专业系列教材

数学分析专题研究

主编 高 夯

出版·发行/中央广播电视大学出版社

经销/新华书店北京发行所

印刷/北京密云胶印厂

开本/B5 **印张**/19.25 **字数**/341 千字

版本/2003 年 6 月第 1 版 2003 年 8 月第 1 次印刷

印数/0001— 8000

社址/北京市复兴门内大街 160 号 **邮编**/100031

电话/66419791 68519502 **（本书如有缺页或倒装，本社负责退换）**

网址/http://www.crtvup.com.cn

书号：ISBN 7-304-02414-3/O·129

定价：26.00 元

前　言

本书是为中央广播电视大学开放教育数学与应用数学专业“数学分析专题研究”课程编写的文字教材．根据学生已经在专科阶段学习过数学分析课程，且正在中学从事数学教学的状况，本教材选取了中学数学作为研究对象，以数学分析的知识作为研究工具，利用高等数学的观点与方法，系统地研究中学数学．通过本课程的学习，一方面可以使学生重新复习已经学过的数学分析知识，同时可以加深对中学数学的理解．

全书共分六章：第 1 章是集合与关系，集合与关系是全书的基础；在第 2 章中，我们介绍了数系的扩张，重点介绍了实数理论；在第 3 章中，一方面，复习了函数的分析理论，同时也介绍了超越理论，并且在广泛的意义下介绍了一次函数；第 4、5 章用公理化方法研究了对数函数、指数函数与三角函数；第 6 章介绍了凸函数理论，更广泛地讨论了函数的极值问题，可供对此问题感兴趣的学生阅读．

在编写过程中，我们充分考虑到广播电视大学开放教育学生的自学状况，尽可能将教材写得通俗易懂，便于自学．文字教材采用“合一式”形式编写，把教学内容和辅导内容融为一体，以便于学生学习．书中标有 * 号的习题，一般说来是较难的，供感兴趣的学生选做．书末附有计算题的答案，对部分证明题给予提示，供学生参考．

参加本书编写的有东北师范大学高夯教授、中央广播电视大学的赵坚副教授、顾静相副教授．在各自完成撰写任务后，最后由高夯教授负责统一定稿．本书从大纲审定到教材内容的确定，都得到了北京航空航天大学孙善利教授、首都师范大学王尚志教授与东北师范大学高益明教授的帮助与指导．他们为编者提出了很多宝贵的意见，使本书增色不少．在本书的编写过程中，东北师大数学系、中央电大师范部给予了大力支持．中央广播电视大学出版社的有关编辑为本书的出版付出了辛勤的劳动．在这里，对于给予本书支持与帮助的各位

同志一并表示感谢.

由于编者水平有限，本书一定会有许多缺点与谬误之处. 我们恳请读者不吝赐教，批评指正!

高 夯

写于长春

2002年12月

目　　录

注:加 * 的节为阅读材料,仅供感兴趣的读者阅读.

第 1 章　集合与关系

学习目标

1. 理解集合的概念，了解元素与集合、集合与集合之间的关系，熟练掌握集合的并、交、差集运算，掌握有关运算律的证明方法.

2. 理解笛卡尔积、二元关系、映射、满射、单射、双射等概念，理解有关定理并掌握其证明方法.

3. 理解等价关系的概念，了解商集的概念，理解有关定理并掌握证明方法.

4. 理解序关系偏序集的概念，了解最大（小）元、极大（小）元的概念，知道良序集；理解有关定理并掌握其证明方法.

5. 理解等势、基数等概念，知道 Bernstein 定理.

导　学

集合论是德国数学家康托尔（G.Cantor）于 19 世纪末创立的，它在数学中占有独特的地位. 由于集合论的语言简洁，具有很强的概括性，它的基本概念已经成为全部数学的基础.

关系是一个与集合同样重要的概念. 关系是集合论的重要组成部分. 特别是等价关系，是对事物进行分类的基础. 它在数学中地位是极其重要的.

在本章学习过程中，读者要深刻理解集合理论的基础知识，特别是对概念的理解，要掌握本章的基本理论及典型的例子.

学习本章知识，不需要太多的数学基础，但要求学生要善于思考. 本章是全书的基础. 本章内容对于培养学生严密的逻辑思维能力将起到一定的作用.

1.1 集合及其运算

1.1.1 集合的概念

集合的概念是数学的一个基本的原始概念，不能用另外的概念定义它，只能给予一种描述.

集合是指具有某种共同特性的事物的全体. 例如，“中央广播电视大学数学与应用数学专业的全体学生”就是一个集合；“全体中国人”也是一个集合.

集合是由它的成员构成的. 通常称集合的成员为**元素**或**点**. 一般用大写字母 $A,B,C\cdots$ 来表示集合；用小写字母 $a,b,c\cdots$ 来表示集合的元素.

若集合的元素可以全部列出，我们通常用列举法来表示集合. 例如：

$$A=\{\text{甲、乙、丙、丁、戊、已、庚、辛、壬、癸}\},$$
$$B=\{\text{子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥}\},$$
$$C=\{a,b,c,d\}.$$

若集合中的元素不能全部列出，我们则用符号 $\{x\mid$关于 x 的命题$\}$ 表示满足大括号中的命题的所有成员 x 的集合. 例如：

$$\pi=\{p\mid p\text{ 是平面上与定点 }O\text{ 的矩离为 1 的点}\}$$

显然，π 是圆周.

设 A 是一集合，a 是一成员，若 a 是 A 的成员，记作 $a\in A$，读作 **a 属于 A**；若 a 不是 A 的成员，则记作 $a\overline{\in}A$，读作 a 不属于 A.

显然，对于任一集合 A 和任一成员 a，$a\in A$ 和 $a\overline{\in}A$ 这两者有且仅有一个成立.

如果集合 A 与集合 B 的成员完全相同，则称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$，读作 **A 等于 B**；否则，若集合 A 与集合 B 不完全相同，则称 A 与 B 不相等，记作 $A\neq B$，读作 **A 不等于 B**.

显然，$A=B\Leftrightarrow\forall x\in A$，则 $x\in B$，且 $\forall x\in B$，则 $x\in A$；$A\neq B\Leftrightarrow\exists x\in A$ 但 $x\overline{\in}B$，或 $\exists x\in B$ 但 $x\overline{\in}A$.①

如果集合 A 的每一成员都是集合 B 的成员，即 $\forall x\in A$，则 $x\in B$，我们记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，分别读作 **A 含于 B** 或 **B 包含 A**，可图示如下：

---

① 符号“$\Leftrightarrow$”表示“当且仅当”；符号“$\forall$”表示“对于任意的”；符号“$\exists$”表示“存在”.

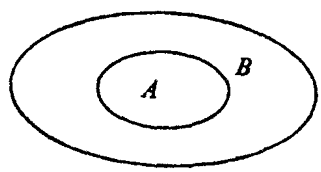

图 1-1

显然，$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \overline{\in} B$，则 $x \overline{\in} A$.

由集合相等的定义，$A = B \Leftrightarrow A \subset B$ 且 $B \subset A$.

集合也可以没有成员，这种没有成员的集合我们称之为**空集**，记作 $\emptyset$.

按照集合的包含定义可以证明空集含于任意集合中，且空集是惟一的.

设 A，B 为两个集合，若 $A \subset B$，我们则称 A 为 B 的**子集**；若 $A \subset B$ 且 $A \neq B$，我们称 A 为 B 的**真子集**，记作 $A \subsetneqq B$.

显然，任一集合都是其自身的子集. 若 A 是 B 的真子集，则至少存在一点 $b \in B$，但 $b \overline{\in} A$.

A 是一个集合，我们称 A 的所有子集构成的子集族为 A 的**幂集**，记作 2^A（或 $P(A)$）. 例如，$A = \{a, b, c\}$，则 $2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

注：对于集合，做如下的进一步说明：

(1)集合中的任意两个元素是不同的，也就是说，在一个集合中，任意一个元素都不会重复出现.

(2)集合中的元素是无次序的. 例如，$\{a, b, c\}$，$\{b, a, c\}$，$\{a, c, b\}$ 是同一集合.

(3)集合的元素可以是任何事物，甚至某一集合是另一集合的元素.

(4)一个集合 A 可以由满足某一命题 p 的元素来组成，换句话说，这个命题 p 决定了集合 A. 但是，并非每个命题都可以确定一个集合. 读者可参阅[7].

1.1.2　集合的运算

在这里，我们定义两个集合的并、交、补的运算.

定义 1.1.1　对于两个集合 A 与 B：

集合 $\{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$ 称为 A 与 B 的**并**，记作 $A \cup B$，读作 ***A* 并 *B***.

集合 $\{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$ 称为 A 与 B 的**交**，记作 $A \cap B$，读作 ***A* 交 *B***.

集合 $\{x \mid x \in A$ 但 $x \overline{\in} B\}$ 称为 A 与 B 的**差集**，或称为 B 相对 A 而言的**补集**，

记作 $A-B$,读作 **A 减去 B** 或 **A 差 B**.

对于这三种运算,我们可给出它的几何表示如下:

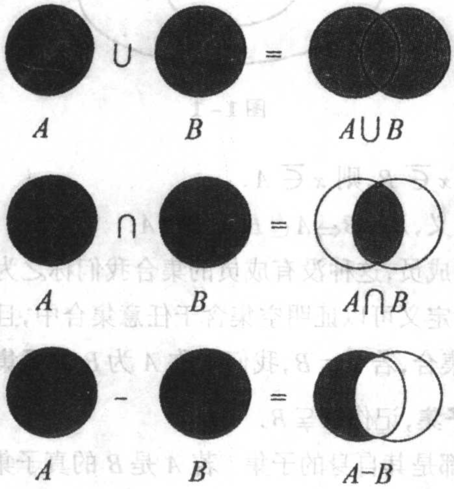

图 1-2

例 1 设集合 $A=\{a,b,c\}$,$B=\{c,d,e\}$,求 $A\cup B$,$A\cap B$,$A-B$.

解 $A\cup B=\{a,b,c,d,e\}$,$A\cap B=\{c\}$,$A-B=\{a,b\}$.

对于集合 A 与 B,若 $A\cap B=\varnothing$,则称 A 与 B 不相交;反之,若 $A\cap B\neq\varnothing$,则称 A 与 B 相交.

若 A 与 B 不相交,表明 A 与 B 没有相同的元素,即 A 与 B 是完全不同的两个集合.

我们称集合 $(A-B)\cup(B-A)$ 为集合 A 与 B 的**对称差**,记作 $A\Delta B$.

容易看出:$A=B\Leftrightarrow A\Delta B=\varnothing$.

关于集合的并、交、补三种运算,如下的算律成立:

定理 1.1.1 若 A,B,C 为集合,则

(1)等幂律成立,即

$$A\cup A=A,\quad A\cap A=A;$$

(2)交换律成立,即

$$A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A;$$

(3)结合律成立,即

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),$$
$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C);$$

(4)分配律成立,即

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C),$$
$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C);$$

(5)De Morgan 律成立,即

$$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C),$$
$$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C).$$

证 这里我们只证明两个等式. 先证(3)中的第二式.

设 $x\in(A\cap B)\cap C$,按定义,$x\in A\cap B$ 且 $x\in C$,也就是 $x\in A$ 且 $x\in B$ 且 $x\in C$. 由此得 $x\in A$ 且 $x\in B\cap C$. 由交集的定义,$x\in A\cap(B\cap C)$. 这就证明了 $(A\cap B)\cap C\subset A\cap(B\cap C)$. 同理可证 $(A\cap B)\cap C\supset A\cap(B\cap C)$. 两者合起来即得 $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

再证(5)中的第一个等式.

设 $x\in A-(B\cup C)$,即 $x\in A$ 但 $x\overline{\in} B\cup C$,也就是 $x\in A$ 但 $x\overline{\in} B$ 且 $x\overline{\in} C$. 由此得 $x\in A-B$ 且 $x\in A-C$. 由交集的定义,$x\in(A-B)\cap(A-C)$. 按照包含的定义,$A-(B\cup C)\subset(A-B)\cap(A-C)$. 同样方法可以证明 $A-(B\cup C)\supset(A-B)\cap(A-C)$. 两者合起来即得到 $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$.

其余各款的证明都是类似的,留给读者自行完成.

1.2 关系与映射

1.2.1 二元关系

我们在数学的学习中,已经熟悉了一些关系,如直线的平行关系、垂直关系,实数的相等关系、大小关系,集合的包含关系,等等. 这些表面看起来似乎无关的内容,本质上却有其共性,可以用统一的数学语言来刻划.

定义 1.2.1 设 A,B 为任意两个集合,集合 $\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$ 称为 A 与 B 的**笛卡尔(Rene Descartes)积**,记作 $A\times B$,读作 A 乘 B. 其中 (a,b) 为有序的元素偶,a 称为 (a,b) 的第一个坐标,b 称为 (a,b) 的第二个坐标,特别地,$A\times A$ 记作 A^2.

例 1 $A=\{a,b\}$,$B=\{c,d\}$,求 $A\times B$,$B\times A$.

解

$$A\times B=\{(a,c),(a,d),(b,c),(b,d)\},$$
$$B\times A=\{(c,a),(c,b),(d,a),(d,b)\}.$$

例2　已知 $A=\{$甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸$\}$，$B=\{$子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥$\}$，求 $A\times B$.

解　$A\times B=\{$(甲，子)，(甲，丑)，(甲，寅)，(甲，卯)，……，(乙，子)，(乙，丑)，……，(癸，子)，(癸，丑)，……，(癸，亥)$\}$.

由例1可以看出 $A\times B\neq B\times A$. 这就是说，交换律不成立.

定义 1.2.2　设 A,B 是两个非空的集合，$A\times B$ 中的每一个子集 R 称为从 A 到 B 中的(二元)关系. 若 $(a,b)\in R$，则称 a 与 b 是 R-相关的，记作 aRb.

集合 $\{a\mid a\in A$，存在 $b\in B$，使 $aRb\}(\subset A)$ 称为关系 R 的定义域，记作 $\mathrm{Dom}(R)$.

集合 $\{b\mid b\in B$，存在 $a\in A$，使 $aRb\}(\subset B)$ 称为关系 R 的值域，记作 $\mathrm{Ran}(R)$.

若 $\tilde{A}\subset A$，集合 $\{b\mid b\in B$，存在 $a\in\tilde{A}$，使 $aRb\}(\subset B)$ 称为集合 $\tilde{A}$(对于关系 R 而言的)像集，记作 $R(\tilde{A})$.

对于定义 1.2.2，我们给出如下的几何表示：

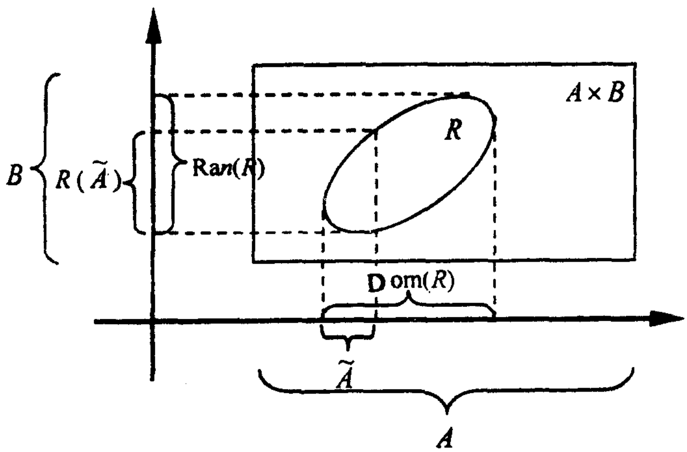

图1-3

下面给出两个特殊的，也是最简单的关系的例子.

例3　设 A,B 是两个非空的集合，由于 $A\times B\subset A\times B$，故 $A\times B$ 是从 A 到 B 的一个关系. 易见，$\mathrm{Dom}(A\times B)=A$，$\mathrm{Ran}(A\times B)=B$.

例4　设 A,B 是两个非空集合，由于 $\varnothing\subset A\times B$，所以 $\varnothing$ 是从 A 到 B 中的一个关系. 因为对于任意的 $a\in A$，$b\in B$，$(a,b)\overline{\in}\varnothing$，故 a 与 b 不是 $\varnothing$-相关的. 此即表明 $\mathrm{Dom}(\varnothing)=\mathrm{Ran}(\varnothing)=\varnothing$.

定义 1.2.3　设 $R\subset A\times B$,则集合 $\{(b,a)\mid b\in B,a\in A,aRb\}$ 为 $B\times A$ 的子集,即为从 B 到 A 中的关系,称为 $\boldsymbol{R}$ **的逆**,记作 R^{-1}. 此时,对于 $\tilde{B}\subset B$, $R^{-1}(\tilde{B})\subset A$ 为集合 $\tilde{B}$ 的 R^{-1}-像,也称之为 $\tilde{B}$(对于关系 R 而言)的**原像**.

定义 1.2.4　设 R 为从 A 到 B 中的关系(即 $R\subset A\times B$),S 为从 B 到 C 中的关系(即 $S\subset B\times C$),集合 $\{(a,c)\mid$存在 $b\in B$,使得 $aRb,bSc\}$ 为 $A\times C$ 的子集,即为从 A 到 C 中的关系,称其为关系 R 与关系 S 的**复合**(或**积**),记作 $S\circ R$.

例 5　设 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$,$B=\{b_1,b_2,b_3,b_4\}$,$C=\{c_1,c_2\}$,$R=\{(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_4),(a_2,b_3)\}$,$S=\{(b_3,c_1),(b_3,c_2)\}$,则 $S\circ R=\{(a_2,c_1),(a_2,c_2)\}$.

定理 1.2.1　设 A,B,C,D 为集合;$R\subset A\times B,S\subset B\times C,T\subset C\times D$,则有

(1)$(R^{-1})^{-1}=R$;

(2)$(S\circ R)^{-1}=R^{-1}\circ S^{-1}$;

(3)$T\circ(S\circ R)=(T\circ S)\circ R$.

证明思路　本定理是要证明关系相等,关系是一集合,故证明两个关系相等就是要证明两个集合相等. 而证明两个集合 A 与 B 相等,只需证明他们的元素相同,即 $\forall\, a\in A\Leftrightarrow a\in B$.

证　(1) $\forall(a,b)\in(R^{-1})^{-1}\Leftrightarrow(b,a)\in R^{-1}\Leftrightarrow(a,b)\in R$,即 $(R^{-1})^{-1}=R$.

(2) $\forall(c,a)\in(S\circ R)^{-1}\Leftrightarrow(a,c)\in S\circ R\Leftrightarrow\exists\, b\in B$,使得 $(a,b)\in R,(b,a)\in S$,即 $(c,b)\in S^{-1},(b,a)\in R^{-1}\Leftrightarrow(c,a)\in R^{-1}\circ S^{-1}$,

因此,
$$(S\circ R)^{-1}=R^{-1}\circ S^{-1}.$$

(3)证明相似于(1)与(2)的证明,留给读者自行完成.□[1]

1.2.2 映　射

定义 1.2.5　设 F 为从集合 X 到集合 Y 中的关系. 如果 $\forall\, x\in X$,有惟一的 $y\in Y$,使得 xFy,则称 F 为(从 X 到 Y 中的)**映射**,记作 $F:X\to Y$.

对于每一 $x\in X$,使得 xFy 的 y,记作 $y=F(x)$,并称为点 x(对于映射 F 而言)的**像**. 对于 $y\in Y$,若 $x\in X$ 使得 xFy,则称 x 是 y(对于映射 F 而言)的**原像**,并且 y 的原像集记作 $F^{-1}(y)$.

注 2.1　对于关系与映射,我们做如下比较:

(1)若 F 是从 X 到 Y 中的关系,则 $\mathrm{Dom}(F)\subset X$,而 $F:X\to Y$,有 $\mathrm{Dom}(F)=X$.

---

① 符号“□”表示定理已证毕.

(2)若 F 是从 X 到 Y 中的关系,对于任一 $x\in X$,$\{F(x)\}$可以是空集、单点集、多点集,而当 $F:X\to Y$,$\{F(x)\}$一定是单点集.

(3)设 $F:X\to Y$. $\forall y\in Y$,$F^{-1}(y)$可能是空集、单点集、多点集.

对于关系与映射,我们给出如下的几何表示:

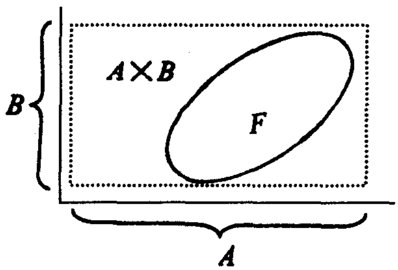

图1-4 (a) F 是关系

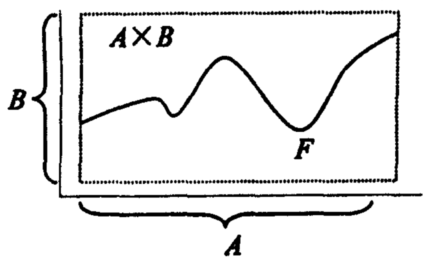

图1-4 (b) F 是映射

设 $F:X\to Y$,若还有映射 $G:Y\to Z$,作为关系,则 F 与 G 的复合 $G\circ F$ 是从 X 到 Z 中的关系. 进一步地,我们有

定理 1.2.2 若 $F:X\to Y$, $G:Y\to Z$,则 $G\circ F:X\to Z$. 且 $\forall x\in X$,有 $(G\circ F)(x)=G(F(x))$.

证明 首先证明 $G\circ F$ 满足映射定义的要求. 事实上,$\forall x\in X$,令 $y=F(x)$,则 xFy;令 $z=G(y)=G(F(x))$,则 yGz. 从而根据关系复合的定义,有 $xG\circ Fz$. 设 $z_1,z_2\in Z$,使 $xG\circ Fz_1$,$xG\circ Fz_2$. 根据关系复合的定义,$\exists y_1,y_2\in Y$,使 xFy_1,y_1Gz_1 且 xFy_2,y_2Gz_2. 由于 F 是映射,故 $y_1=y_2$. 再由 G 是映射,故 $z_1=z_2$. 这就证明了:$\forall x\in X$,都存在惟一的 $z\in Z$,使得 $xG\circ Fz$.

其次,在上面证明中,我们已经得到关系式:$G(F(x))=z=(G\circ F)(x)$.□

复合映射的例子很多. 例如,X 是平面,Ω 是平面上的图形. $F:X\to X$ 是平移映射,$G:X\to X$ 是旋转映射,则 $G\circ F:X\to X$ 是先平移再旋转的**复合映射**,即是将图形 Ω 先进行一次平移,再进行旋转.

后面,我们常用小写字母 $f,\varphi,g,\cdots$等表示映射.

设 $f:X\to Y$,$A\subset X$,$B\subset Y$,我们记

$$f(A)=\{y\in Y\mid y=f(x),x\in A\}$$

$$f^{-1}(B)=\{x\in X\mid f(x)\in B\}$$

我们常可以用 $f(A)$ 与 $f^{-1}(B)$ 来刻画映射 f 的性质. 两者是否相同呢? 我们可以从下面的两个定理做个比较.

定理 1.2.3 设 $f:X\to Y$,$A,B\subset Y$,则有

(1)$f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$;

(2)$f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$;

(3)$f^{-1}(A-B)=f^{-1}(A)-f^{-1}(B)$.

证 (1)易证,留给读者.

(2)$\forall x\in f^{-1}(A\cap B)$,$\exists y\in A\cap B$,使得 $y=f(x)$,即 $x\in f^{-1}(A)$且 $x\in f^{-1}(B)$,故 $x\in f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$. 从而有 $f^{-1}(A\cap B)\subset f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$.

另一方面,设 $x\in f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$,由于 $x\in f^{-1}(A)$,故 $f(x)\in A$;由 $x\in f^{-1}(B)$,故 $f(x)\in B$. 从而有 $f(x)\in A\cap B$,即 $x\in f^{-1}(A\cap B)$. 这表明 $f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)\subset f^{-1}(A\cap B)$.

从而结论(2)得证.

(3)证明与(2)的证明相似,留给读者. □

注 2.2 若我们将符号"f^{-1}"看成是一种映射,定理 1.2.3 表明,它保持了集合的并、交、补的运算;若我们将符号"f^{-1}"看成是一种运算,定理 1.2.3 表明,它与集合的并、交、补运算可交换次序.

定理 1.2.4 设 $f:X\to Y$,$A,B\subset X$,则

(1)$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$;

(2)$f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$;

(3)$f(A-B)\supset f(A)-f(B)$.

证 该定理的证明与定理 1.2.3 的证明相似,留给读者.

人们自然会提出下面的问题:定理 1.2.4 中结论(2)与结论(3)能否有等号成立?

例 6 设 $X=\{a,b\}$,$Y=\{c\}$,$f:X\to Y$. 显然有 $f(a)=c$,$f(b)=c$. 现在令:$A=\{a\}$,$B=\{b\}$,则

$$f(A\cap B)=f(\varnothing)=\varnothing\subset(\text{但}\neq)\{c\}=f(A)\cap f(B)$$

且

$$f(A-B)=f(A)=\{c\}\supset(\text{但}\neq)\varnothing=\{c\}-\{c\}=f(A)-f(B).$$

此例表明,定理 1.2.4 的结论不能改进.

设 $f:X\to Y$,$A\subset X$,$B\subset Y$,则我们有 $f^{-1}(f(A))\supset A$,$f(f^{-1}(B))\subset B$

我们感兴趣的问题是:在什么条件下,有

$$f^{-1}(f(A))=A,\quad f(f^{-1}(B))=B$$

定义 1.2.6 设 $f:X\to Y$,若 $f(X)=Y$,则称 f 是**满射**;若 $\forall x_1,x_2\in X$,$x_1\neq x_2$,有 $f(x_1)\neq f(x_2)$,则称 f 是**单射**;若 f 既是满射又是单射,则称 f 是**双射**.