中 等 专 业 学 校 教 学 参 考 书

无线电、电机、电力等专业适用

代数补充教材

工科中专数学教材编写组编

人 民 教 育 出 版 社

本书是将中专工科专业适用《代数》
一版)第九章复数修订后，加上新编行列式
订而成的，供无线电、电机、电力等专业使用。

中等专业学校教学参考书

代数补充教材

(无线电、电机、电力等专业适用)

工科中专数学教材编写组 编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北 京 印 刷 一 厂 印 装

*

1966 年 9 月第一版 1978 年 5 月第 1 次印刷

书号：13012·0159 定价 0.11 元

目　录

第一章　复　数

§1-1　复数的概念

在初中，我们已经把数的范围从有理数扩充到实数．但是，要解决许多自然科学和工程技术方面的问题，例如，在研究电工学、航空工程学等方面的问题，实数就不够用了．又如，在解方程 $x^2=-1$ 和 $x^2+2x+10=0$ 时，在实数范围内就没有解．因此，需要进一步把数的范围扩充到复数．下面我们来说明有关复数的一些知识．

1. 虚数单位　我们知道方程 $x^2=-1$ 在实数范围内是没有解的，因为任何实数的平方都不是负数．现在，我们引进一个新的数的单位，这个单位平方后得到 -1，我们把它叫做**虚数单位**，并且用符号 i（电工学中用 j）来表示，就是

$$\boldsymbol{i^2=-1}.$$

虚数单位 i，除了具有这个性质以外，它还可以和实数在一起按照实数的四则运算法则进行运算．

例 1　解方程：(1) $x^2=-1$；　(2) $25x^2+9=0$.

解　(1) $\because\ i^2=-1,\ (-i)^2=-1,$

$\therefore\ -1$ 的平方根是 $\pm i$.

因此，方程 $x^2=-1$ 的根是

$$x=\pm\sqrt{-1}=\pm i.$$

(2) 把方程 $25x^2+9=0$ 移项，可得

$$x^2=-\frac{9}{25}.$$

$$\because\quad \left(\frac{3}{5}i\right)^2=-\frac{9}{25},\qquad \left(-\frac{3}{5}i\right)^2=-\frac{9}{25},$$

$$\therefore\quad -\frac{9}{25}\text{的平方根是}\pm\frac{3}{5}i.$$

因此，方程 $25x^2+9=0$ 的根是

$$x=\pm\sqrt{-\frac{9}{25}}=\pm\frac{3}{5}i.$$

2. 复数 我们看下面的例子：

例 2 解方程 $x^2+2x+10=0$.

解 利用二次方程求根公式，得

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-40}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-36}}{2}$$

$$=\frac{-2\pm 6i}{2}=-1\pm 3i.$$

对于象 $-1+3i$ 和 $-1-3i$ 这种形式的数，我们给出下面的定义：

形式为 $a+bi$(a、b 都是实数)的数叫做**复数**. 其中 a 叫做**复数的实部**，bi 叫做**复数的虚部**，b 叫复数虚部的系数.

在复数 $a+bi$ 中：

如果 $b=0$，那么复数就是实数 a.

如果 $a=0$，那么复数叫做**纯虚数***.

由此可知，复数包含着所有的实数和所有的虚数，而实数和纯虚数是复数的特例.

我们规定：如果实数 $a=a_1$，$b=b_1$，那么复数 $a+bi=a_1+b_1i$.

* 虚数产生后，在一段时期内，它的实际意义没有被人们所认识，所以把它叫做“虚数”。

反之，如果复数 $a+bi=a_1+b_1i$，那么实数 $a=a_1, b=b_1$.

显然复数 $a+bi=0$ 时，$a=0, b=0$.

我们知道，两个实数可以比较大小．但是两个虚数或者一个虚数和一个实数，就不能比较它们的大小．

例 3 已知复数 $(2x-1)+i=1-(3-y)i$，求实数 x 和 y 的值．

解 根据复数相等的规定，只有当 $a=a_1$，$b=b_1$ 时 $a+bi=a_1+b_1i$ 才能成立，所以

$$2x-1=1, \quad 1=-(3-y);$$

即 $$x=1, \qquad y=4.$$

3. 用复数平面上的点表示复数 复数 $a+bi$ 可以用直角坐标系所在的平面上的点 M 表示．这个点的横坐标是 a，纵坐标是 b（图 1-1）．按照这种表示方法，相等的复数就可以用同一个点来表示．这样，给出一个复数，在平面上就能找到一个确定的点和它对应；反过来，对于平面上任何一点，就有一个确定的复数和它对应．所以复数和平面上的点是一一对应的．我们把这样的平面叫做**复数平面**．因为横轴上的点表示实数，纵轴上的点表示纯虚数，所以把横轴叫做**实轴**，纵轴叫做**虚轴**．

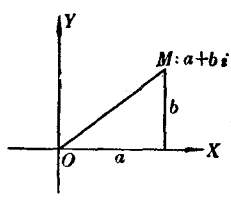


图 1-1

复数 $a+bi$ 和 $a-bi$ 的实部相等，虚部的系数绝对值相等而符号相反，这样的两个复数叫做**共轭复数**．例如 $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 和 $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$-\sqrt{3}i$ 和 $\sqrt{3}i$ 都是共轭复数．

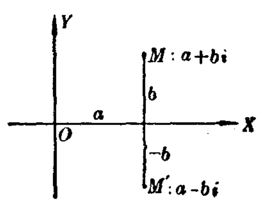


图 1-2

很明显，表示两个共轭复数的点关于x轴是对称的（图1-2）。

§1-2 复数的向量表示法

如果M点表示复数$a+bi$（图1-3）．连结原点O和M点，并且把O点看作线段OM的起点，M点看作线段OM的终点，那么有方向的线段OM就表示一个**向量**（也叫做**矢量**），记作$\overrightarrow{OM}$．

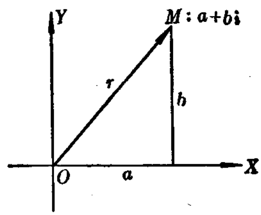


图 1-3

因为复数平面上的点和复数是一一对应的，所以复数和向量也是一一对应的，因此可以用向量$\overrightarrow{OM}$表示复数$a+bi$．

向量$\overrightarrow{OM}$的长r叫做复数的**模数**，也叫做复数$a+bi$的**绝对值**，记作$|a+bi|$．根据勾股定理可以知道，

$$r=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

例 用向量表示复数：$3+4i$，$-3+2i$，$-2i$，-2．并分别求出向量的长．

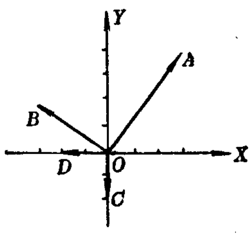


图 1-4

解 如图1-4所示：

向量$\overrightarrow{OA}$表示复数$3+4i$，

$|3+4i|=\sqrt{3^2+4^2}=5.$

向量$\overrightarrow{OB}$表示复数$-3+2i$，

$|-3+2i|=\sqrt{(-3)^2+2^2}=\sqrt{13}.$

向量$\overrightarrow{OC}$表示复数$-2i$，

$|-2i|=\sqrt{0^2+(-2)^2}=2.$

向量$\overrightarrow{OD}$表示复数-2，

$$|-2|=\sqrt{(-2)^2+0^2}=2.$$

§1-3 复数的加法和减法

复数的加法和减法可按多项式的加法和减法的法则来进行；也就是实部和实部相加减，虚部和虚部相加减．例如，

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i;$$

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$$

例 1
$$\begin{aligned}&(5-6i)+(-2-i)-(3+4i)\\ =&(5-2-3)+(-6-1-4)i\\ =&-11i.\end{aligned}$$

现在我们来看复数相加和向量相加的关系．

设复数 $a+bi$ 用向量 $\overrightarrow{OM}$ 来表示，复数 $c+di$ 用向量 $\overrightarrow{ON}$ 来表示（图 1-5）；M 点的坐标是(a, b)，N 点的坐标是 (c, d)．以 OM 和 ON 为两条邻边作平行四边形 $OMLN$．自 M、N、L 三点各作 x 轴的垂线 MP、NQ、LR，并作 $MS\perp LR$．

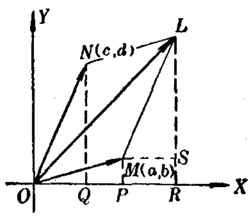


图 1-5

$\because$ $\triangle LMS\cong\triangle NOQ$,

四边形 $MPRS$ 是矩形，

$\therefore$ $OR=OP+PR=OP+OQ=a+c$,

$RL=RS+SL=PM+QN=b+d$.

因此，L 点的坐标是 $(a+c, b+d)$，$\overrightarrow{OL}$ 就是表示复数 $(a+c)+(b+d)i$ 的向量．

由此可知，求两个复数的和时，可以先作出表示这两个复数的向量，然后以这两个向量为两条邻边作平行四边形，这个平行四边形的对角线所表示的向量就是所求复数的和．

在物理中，两个向量(如力、速度、加速度)相加，是按照“平行四边形法则”的，所以向量相加也可以用复数相加来表示.

因为复数相减可以变为复数相加，所以向量相减也可以用复数相加来表示.

例2 用复数 $4-7i$ 表示的一个力分成两个分力，其中一个分力可以用复数 $-2-3i$ 表示，作出向量图求表示另一个分力的复数.

解 ∵ 复数 $-2-3i$ 和 $2+3i$ 所对应的向量大小相等，方向相反.

∴ 表示另一个分力的复数是

$$(4-7i)-(-2-3i)$$
$$=(4-7i)+(2+3i)=6-4i.$$

答：由图1-6可知，表示另一个分力的复数是 $6-4i$.

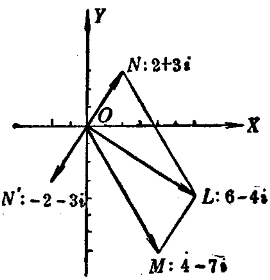


图 1-6

§1-4 复数的乘法和除法

两个复数相乘可以按照多项式相乘的法则来进行. 在所得的结果中把 i^2 换成 -1，并将实部和虚部分别合并，就得到所求的积. 例如，

$$(a+bi)(c+di)=ac+bci+adi+bdi^2$$
$$=(ac-bd)+(bc+ad)i.$$

例1 求共轭复数 $a+bi$ 与 $a-bi$ 的积.

解 $(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2.$

由上例可知，两个共轭复数的乘积是一个实数，这个实数等于其中任一个复数的模数的平方.

例2 计算：$(1-2i)(3+4i)(-2+i)$.

解 $(1-2i)(3+4i)(-2+i)=(11-2i)(-2+i)$

$$=-20+15i.$$

两个复数相除，可以先把它们的商写成分式，然后利用两个共轭复数的积是实数的性质，把分子和分母都乘以分母的共轭复数，并且把结果化简．例如，

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

例 3 计算 $(1+2i)\div(3-4i)$.

解 $(1+2i)\div(3-4i)=\dfrac{1+2i}{3-4i}=\dfrac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}$

$$=\frac{-5+10i}{25}=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i.$$

例 4 已知两复数：$z_1=3+4i$, $z_2=\dfrac{Rxi}{R+xi}$. 且 $z_1=z_2$, 求实数 R 和 x 的值.

解 $z_2=\dfrac{Rxi}{R+xi}=\dfrac{Rxi(R-xi)}{R^2+x^2}=\dfrac{Rx^2}{R^2+x^2}+\dfrac{R^2x}{R^2+x^2}i.$

$\because$ $z_1=z_2$,

$\therefore$ $\begin{cases}\dfrac{Rx^2}{R^2+x^2}=3, & (1)\\ \dfrac{R^2x}{R^2+x^2}=4. & (2)\end{cases}$

(1)÷(2)得： $\dfrac{x}{R}=\dfrac{3}{4}$,

即 $x=\dfrac{3}{4}R.$ (3)

将(3)代入(2)得：
$$\frac{\frac{3}{4}R^3}{\frac{25}{16}R^2}=4.$$

解得：
$$\begin{cases} R=\frac{25}{3}, \\ x=\frac{25}{4}. \end{cases}$$

习题 1-1

1. 写出复数的系统表.

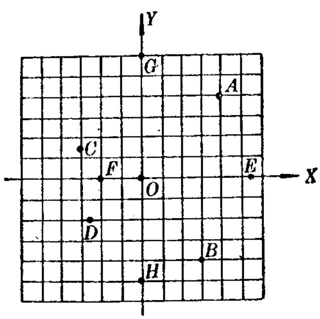
2. 如果 a、b 都是实数，在什么情形下 $a+bi$ 是实数？是纯虚数？各举一些例子.

3. 解方程：

(1) $2x^2+9=0$; (2) $3x^2-4x+4=0$;

(3) $x^2-\sqrt{2}\,x+1=0$; (4) $x^3+8=0$.

4. 写出下图中各点所表示的复数(方格每边等于1个单位长)：



(第 4 题)

5. 已知复数 $4-3i$, $-1+i$, $-5-12i$, $40+9i$, $-4i$.

(1) 用向量表示这些复数.

(2) 求各数的绝对值.

(3) 求各数的共轭复数，并用向量表示出来.

6. 求适合下列各方程的实数 x 和 y 的值：

(1) $(3x-4)+(2y+3)i=0$;

(2) $(x+y)-xyi=-5+24i$;

(3) $y+(2x^2-y^2)i=(-2-x)i+2x$.

7. 向量 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 分别用复数 $4+7i$ 和 $-2+9i$ 表示，求(1)表示向量 $\overrightarrow{BA}$ 的复数，(2)表示向量 $\overrightarrow{AB}$ 的复数.

8. 计算：

(1) $\left(\frac{2}{3}+i\right)+\left(1-\frac{2}{3}i\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}i\right)$;

(2) $(2x+3yi)-(3x-2yi)+(y-2xi)-3xi$.

9. 计算：

(1) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$;

(2) $(1-2i)(2+i)(3-4i)$.

10. 设 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，求证：

(1) $1+\omega+\omega^2=0$; (2) $\omega^3=1$.

11. 计算：

(1) $\frac{2}{\sqrt{2}\,i}$; (2) $\frac{1-2i}{3+4i}$.

12. 已知 $Z_1=\dfrac{2}{1-\dfrac{4}{3+5i}}$，$Z_2=R+2xi$，且 $Z_1=Z_2$，求实数 R 和 x 的值.

13. 已知交流电的复数电压 $\dot{U}=263$，复数阻抗 $Z=12.6-3.21j$，计算复数电流 $\dot{I}=\frac{\dot{U}}{Z}$ 和复数功率 $\dot{P}=\dot{U}I^*$ 的近似值(这里 I^* 表示 $\dot{I}$ 的共轭复数).

§1-5 复数的三角形式

形式为 $a+bi$ 的复数叫做复数的**代数形式**. 这种形式的复数，在进行加减运算时，非常方便. 但在进行乘除运算时，有时感到十分麻烦. 为了便于作乘除运算，现在我们来研究复数的另外一种

表达形式——三角形式.

设复数 $a+bi$ 用向量 $\overrightarrow{OM}$ 表示(图 1-7). r 是复数 $a+bi$ 的模数. 显然

$$r=\sqrt{a^2+b^2}. \qquad \text{(I)}$$

从 x 轴的正半轴绕 O 点旋转到向量 $\overrightarrow{OM}$ 所成的角 ϕ, 叫做复数 $a+bi$ 的**幅角**. 幅角 ϕ 的取值范围为

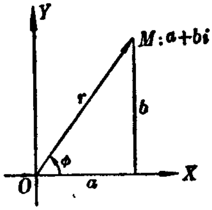


图 1-7

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\phi<\frac{3\pi}{2}^*.$$

幅角 ϕ 可以利用公式

$$\operatorname{tg}\phi=\frac{b}{a} \qquad \text{(II)}$$

来确定. 但必须同时考虑 a 和 b 的符号, 才能知道幅角 ϕ 的终边究竟在哪一象限.

由图 1-7 可以看出:

$$a=r\cos\phi,\ \ b=r\sin\phi,$$

所以 $\qquad a+bi=r\cos\phi+ir\sin\phi=r(\cos\phi+i\sin\phi).$

式子 $r(\cos\phi+i\sin\phi)$ 叫做复数的**三角形式**.

利用公式 (I)、(II) 可以把代数形式的复数 $a+bi$ 与三角形式的复数 $r(\cos\phi+i\sin\phi)$ 进行互化.

例 1 把下列复数化为三角形式:

(1) $\sqrt{3}+i$; (2) $-1+\sqrt{3}i$;

(3) $-1-i$; (4) $4-3i$.

解 (1) $r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2.$

---

* 幅角 ϕ 在一般数学书中取 $0\leqslant\phi<2\pi$, 电工学中取 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\phi<\frac{3\pi}{2}$.

$$\operatorname{tg}\phi=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

表示复数$\sqrt{3}+i$的点$(\sqrt{3},1)$在第Ⅰ象限内，$\phi=\frac{\pi}{6}$.

$$\therefore\qquad \sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

(2) $r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2.$

$$\operatorname{tg}\phi=\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3},$$

表示复数 $-1+\sqrt{3}i$ 的点 $(-1,\sqrt{3})$在第Ⅱ象限内(图1-8)，

$$\phi=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}.$$

$$\therefore\quad -1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

(3) $r=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}.$

$$\operatorname{tg}\phi=\frac{-1}{-1}=1,$$

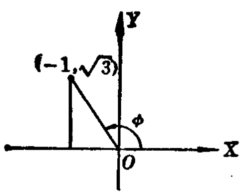


图 1-8

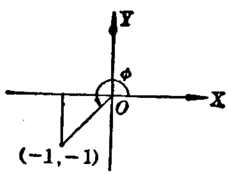


图 1-9

表示复数 $-1-i$ 的点. $(-1,-1)$在第Ⅲ象限内(图1-9)，

$$\phi=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}.$$

$$\therefore\qquad -1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

(4) $r=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5.$

$$\operatorname{tg}\phi=\frac{-3}{4}=-0.75,$$

表示复数 $4-3i$ 的点 $(4,\ -3)$ 在第Ⅳ象限内，

$$\phi=-36°52'.$$

$$\therefore\quad 4-3i=5[\cos(-36°52')+i\sin(-36°52')].$$

例 2 把复数 $\sqrt{2}(\cos 135°+i\sin 135°)$ 化为代数形式。

解

$$\begin{aligned}&\sqrt{2}(\cos 135°+i\sin 135°)\\=&\sqrt{2}(-\cos 45°+i\sin 45°)\\=&\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-1+i.\end{aligned}$$

例 3 作出 i、i^2、i^3、和 i^4 的向量图，并且用三角形式表示出来。

解 $\because\quad i^2=-1,\ i^3=i^2\cdot i=-i,$

$$i^4=i^3\cdot i=1.$$

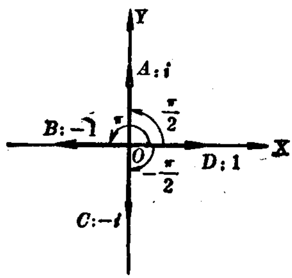


图 1-10

从图 1-10 可以看出：

$$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2};$$

$$i^2=-1=\cos\pi+i\sin\pi;$$

$$i^3=-i=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right);$$

$$i^4=1=\cos 0+i\sin 0.$$

§1-6 复数的三角形式的乘法和除法

把复数表示成三角形式再作乘法和除法的运算特别方便。

1. 乘法

设复数 $Z_1=r_1(\cos\phi_1+i\sin\phi_1),$

$$Z_2=r_2(\cos\phi_2+i\sin\phi_2),$$

那么，$Z_1\cdot Z_2=r_1(\cos\phi_1+i\sin\phi_1)\cdot r_2(\cos\phi_2+i\sin\phi_2)$

$$\begin{aligned}&=r_1r_2[(\cos\phi_1\cos\phi_2-\sin\phi_1\sin\phi_2)\\&+i(\sin\phi_1\cos\phi_2+\cos\phi_1\sin\phi_2)]\\&=r_1r_2[\cos(\phi_1+\phi_2)+i\sin(\phi_1+\phi_2)].\end{aligned}$$

即 $$\boldsymbol{Z_1Z_2=r_1r_2[\cos(\phi_1+\phi_2)+i\sin(\phi_1+\phi_2)]}.$$

这结果表明: 二复数的积的模数等于各因数的模数的积, 而积的幅角则等于各因数的幅角的和.

例1 计算:

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\cdot\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

解 $$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\cdot\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$=\sqrt{6}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$=\sqrt{3}(1+i).$$

上述二复数相乘的法则对于任意个复数相乘，仍然有效. 就是:

$$\begin{aligned}r_1(\cos\phi_1+i\sin\phi_1)\cdot r_2(\cos\phi_2+i\sin\phi_2)\cdots r_n(\cos\phi_n+i\sin\phi_n)\\=r_1r_2\cdots r_n[\cos(\phi_1+\phi_2+\cdots+\phi_n)\\+i\sin(\phi_1+\phi_2+\cdots+\phi_n)].\end{aligned}$$

推论: 在乘法法则中,

令 $$r_1=r_2=\cdots=r_n,\quad \phi_1=\phi_2=\cdots=\phi_n,$$

就可得到:

$$[r(\cos\phi+i\sin\phi)]^n=r^n(\cos n\phi+i\sin n\phi).$$

这结果表明：复数的 n 次幂（n 是正整数）的模数等于这个复数的模数的 n 次幂，而它的幅角等于这个复数的幅角的 n 倍.

这个公式叫做**棣美弗公式**.

例 2 计算 $(\sqrt{3}-i)^6$

解 把 $\sqrt{3}-i$ 化为三角形式，得

$$\sqrt{3}-i=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right].$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad(\sqrt{3}-i)^6&=\left\{2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]\right\}^6\\&=2^6[\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)]\\&=64(-1+0)\\&=-64.\end{aligned}$$

从上面关于复数的三角形式的乘法法则，可以说明复数乘法和向量的关系：求两个复数的积，可以把第一个复数相对应的向量的长乘以第二个复数的模数，然后把这个改变了长度的向量旋转一个角（正角按反时针方向旋转，负角按顺时针方向旋转），这个角等于第二个复数的幅角．最后所得的向量就和所求的积相对应（图1-11）.

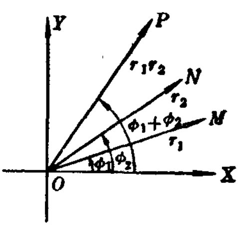


图 1-11

例 3 把和复数 $-1+i$ 相对应的向量按反时针方向旋转 $120°$ 角，求所得向量相对应的复数.

解 所求的复数就是复数 $-1+i$ 乘以一个复数的积，这个复数的模数是 1，幅角是 $120°$，所以所求的复数是：

$$(-1+i)\cdot1(\cos120°+i\sin120°)$$