高中数学

基础知识与例题分析

上册

北京师范大学出版社

高中数学

基础知识与例题分析

上册

乔家瑞等 编

北京师范大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

西安新华印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32 印张：13.875 字数：296千

1986年10月第1版 1986年10月第1次印刷

印数：1－50,000

统一书号：7243·457 定价：1.95元

前　言

为了满足高中数学教学的需要，我们编写了这本“高中数学基础知识与例题分析”。它是本社出版的“初中数学基础知识与例题分析”的续篇。本书是根据教育部颁发的中学数学基本要求和较高要求，以及全日制统编教材而编写的，以基本要求为主，带“*”号的内容为较高要求。全书按知识系统共分二十二章，每章包括基础知识、典型例题分析和练习题三部分。基础知识力求简明扼要，系统全面，例题分析给出了解题的思路、方法和技巧，练习题分为基本练习题与综合练习题，基本练习题主要是对基本知识进行训练，综合练习题可以培养读者分析问题和解决问题的能力，最后还安排了总复习题，并附有答案或提示。

本书可供高中学生在学习中使用，也可以作为毕业复习用书。本书还可以作为在职职工，自学青年的自学用书，数学教师的教学参考书。

本书由北京市部分重点中学的教师：刘绍贞（北京四中）、蒋佩锦（北京五中）、任中文（北京二十六中）、张鸿菊（北京师大附中）、陈俊辉（北京师大二附中）、储瑞年（北京师大实验中学）及北京教育学院崇文分院乔家瑞等编写，由任中文、乔家瑞审理全部原稿。

限于我们的水平，书中定有不妥之处，请读者批评指正。

编　者

1985.8.

目　录

第一部分　代　数

第二部分　平面三角

提示或答案

第一部分　代　　数

第一章　实数与式

一、实　　数

1．整数与分数统称有理数，有理数与无理数统称实数。有理数包括整数和分数（有限小数、无限循环小数），无理数是无限不循环小数。实数还可以做如下分类：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{正分数}\end{cases}\\\text{零}\\\text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}\\\text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\end{cases}$$

各个数集的符号表示如下：

实数集——R，有理数集——Q，

整数集——Z。

任何一个有理数都可以表示为$\frac{n}{m}$，这里m、n为互

质的整数，$m\neq 0$。此外，奇数、偶数可以表示为$2n-1$，$2n(n\in Z)$。

2. 数轴 规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴。

实数集与数轴上点集之间是一一对应的。在数轴上越往右边的点所对应的实数越大。

3. 实数的绝对值

$$|a|=\begin{cases} a & (a>0), \\ 0 & (a=0), \\ -a & (a<0). \end{cases}$$

$|a|$的几何意义是实数a在数轴上的对应点到原点的距离。在对字母进行讨论时，要注意分正数、零、负数三种情况。

4. 实数的运算 在实数集合内可以施行加、减、乘、除、乘方等运算，非负实数的n次方根和负实数的奇次方根有意义，但负实数的偶次方根无意义。

实数运算满足交换律、结合律和分配律。

二、代 数 式

1. 代数式 用运算（指加、减、乘、除，乘方、开方）符号把数或表示数的字母连结而成的式子叫做代数式。代数式的分类：

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\\ \text{分式}\end{cases}\\ \text{无理式}\end{cases}$$

2. 整式

（1）整式和它的四则运算　　（略）

（2）乘法公式，要熟练掌握以下七个公式：

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2;$$

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3;$$

$$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3.$$

特别要避免发生以下错误：$(a\pm b)^2=a^2\pm b^2$；$(a\pm b)(a^2\pm ab+b^2)=a^3\pm b^3$。

（3）多项式的因式分解

把一个多项式化成几个整式的积的形式叫做多项式的因式分解。

因式分解的结果与给出的数集有关，并且在给定的数集内做到不能再继续分解为止。例如

$$\begin{aligned} x^4-9 &= (x^2+3)(x^2-3) & \text{（在有理数集中）}\\ &= (x^2+3)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) & \text{（在实数集中）}\\ &= (x+\sqrt{3}i)(x-\sqrt{3}i)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) & \text{（在复数集中）}\end{aligned}$$

因式分解的主要方法有：

$$\text{对一般多项式}\begin{cases}\text{①提取公因式法}\\ \text{②乘法公式法}\\ \text{③分组分解法}\begin{cases}\text{适当分组}\\ \text{拆项分组}\\ \text{添减项分组}\end{cases}\end{cases}$$

$$\text{对二次三项式}\begin{cases}\text{①十字相乘法}\\ \text{②配　方　法}\\ \text{③求根公式法}\end{cases}$$

此外，当多项式可以表示为某种确定形式的乘积时，还可用待定系数法分解因式。配方法与待定系数法是两个重要的数学方法，要注意熟练掌握。

3. 分式

分式的基本性质：$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}(m\neq 0)$，分式的约分和通分是分式运算的根据和基础，要熟练准确的掌握。

4. 根式

（1）概念　如果$x^n=a(n\in N, n>1)$，那么x叫做a的n次方根。表示方根的代数式$\sqrt[n]{a}$叫做根式。其中n叫做根指数，a叫做被开方数．求一个数的方根运算叫做开方。

对方根的定义，要特别注意：

$\sqrt[n]{a}$要有意义。当n为偶数时，a为非负实数，当n为奇数时，a为实数．

当$\sqrt[n]{a}$有意义时，则$(\sqrt[n]{a})^n=a$。

对于$\sqrt[n]{a^n}$，则要视n的情况决定：

当n为偶数，$\sqrt[n]{a^n}=|a|$，

当n为奇数，$\sqrt[n]{a^n}=a$。

此外，还要分清最简根式，同次根式，同类根式。

具有以下三个条件的根式，叫做最简根式。

①被开方数的指数和根指数互质；

②被开方数的每一个因式的指数都小于根指数；

③被开方数不含分母。

根指数相同的根式叫做同次根式，根指数和被开方数都相同的最简根式叫做同类根式。

（2）算术根　正数a的正的n次方根，叫做a的n次算术根，记作$\sqrt[n]{a}$。当$n=2$时，特别有

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0),\\ -a & (a<0).\end{cases}$$

（3）根式的基本性质

当$a\geqslant 0$时，$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$　　$(m、n、p、\in N,>1)$。

（4）积、商、幂、方根的算术根

在$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$的条件下，

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\qquad (n\in N、n>1);$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\qquad (n\in N、n>1\text{ 且 }b\neq 0)$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}\qquad (m、n\in N,n>1)$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}\qquad (m、n\in N,m>1,n>1)$$

（5）根式的化简与运算（略）

三、指数式和对数式

1. 指数与对数的概念

（1）各种有理指数幂的定义

正整数指数幂$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdots\cdots a}_{n\text{个}}$　　$(n\in N)$

零指数幂 $a^0=1 \quad (a\neq 0)$；

负整数指数幂 $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n} \quad (n\in N, a\neq 0)$；

正分数指数幂 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m} \quad (a\geqslant 0, m、n\in N, n>1)$；

负分数指数幂 $a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \quad (a>0, m、n\in N, n>1)$。

（2）对数的定义

如果$a^b=N$（$a>0, a\neq 1$），那么b叫做以a为底的N的对数。记作$b=\log_a N$。

2.指数与对数的关系和比较

	指数		对数
互化	$a^b=N$	$\overset{\Longleftrightarrow}{a>0,\ a\neq 1}$	$b=\log_a N$
对数恒等式	$a^{\log_a N}=N$		
运算性质	① $a^p\cdot a^q=a^{p+q}$ ② $(a^p)^k=a^{kp}$ ③ $(a^p\cdot a^q)^k=a^{kp}\cdot a^{kq}$		$\log_a(m\cdot n)=\log_a m+\log_a n$ $\log_a m^k=k\log_a m$ $\log_a(m^\alpha\cdot n^\beta)=\alpha\log_a m+\beta\log_a n$
特殊值	$a^0=1 \qquad a^1=a$		$\log_a 1=0 \qquad \log_a a=1$

注：对数运算的实质是同底数幂运算中，指数的运算。

3.对数换底公式

$$\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}.$$

由换底公式得到的三个重要推论：

(1) $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$;　(2) $\log_a b\cdot\log_b c=\log_a c$;

(3) $\log_{a^k} b^n=\dfrac{n}{k}\log_a b$;　特别地 $\log_{a^\alpha} b^\alpha=\log_a b$.

即当底数和真数同时α次方（α为有理数）时，对数的值不变。例如$\log_{\sqrt{2}}4=\log_2 16$，$\log_{49}64=\log_7 8$，

$\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{27}=\log_3 27$等等。

4. 常用对数

以10为底的对数叫做常用对数，即$\log_{10}N$，简记为$\lg N$

一个正数A的常用对数可以写成两部份：

$$\lg A=\underbrace{k}_{\text{首数}}+\underbrace{\alpha}_{\text{尾数}}\qquad(k\in Z,\ 0\leqslant\alpha<1).$$

（1）首数　用科学记数法，A可以写成$a\times10^k$的形式（其中$1\leqslant a<10$，$k\in Z$），k就是正数A的常用对数的首数。

（2）尾数　只是小数点位置不同的数，它们的对数尾数相同。这是对数尾数的重要性质。

例1　回答下列问题：

(1) 化简①$\sqrt{-a-b+2\sqrt{ab}}$　$(a<0, b<0)$；

②$\sqrt{\lg^2 a-\lg a^2+1}$.

(2) 比较$\sqrt{3x-1-2x^2}$与$\lg\left(\dfrac{6x-2}{5}\right)$的大小。

(3) 已知$|\log_m 3-\log_m 2|=-(\log_m 3-\log_m 2)$，求实数$m$的取值范围。

解：（1）$\sqrt{-a-b+2\sqrt{ab}}=\sqrt{(\sqrt{-a}+\sqrt{-b})^2}$

$=\sqrt{-a}+\sqrt{-b}\qquad(a<0,b<0)$；

$\sqrt{\lg^2a-\lg a^2+1}=\sqrt{\lg^2a-2\lg a+1}$

$=|\lg a-1|=\begin{cases}\lg a-1 & (a\geqslant 10).\\ 1-\lg a & (0<a<10).\end{cases}$

（2）$\sqrt{3x-1-2x^2}$有意义，要求$3x-1-2x^2\geqslant 0$，

$\therefore\quad(2x-1)(x-1)\leqslant 0$，则$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$。

当$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$时，$\quad\frac{1}{5}\leqslant\frac{6x-2}{5}\leqslant\frac{4}{5}$，

$\therefore\quad\lg\left(\frac{6x-2}{5}\right)<0$，

又 $\sqrt{3x-1-2x^2}\geqslant 0$，

$\therefore\quad\sqrt{3x-1-2x^2}>\lg\left(\frac{6x-2}{5}\right)$。

（3）由绝对值的概念，有$-(\log_m 3-\log_m 2)\geqslant 0$，

$\therefore\quad\log_m 3\leqslant\log_m 2$。

根据对数函数的增减性，有$0<m<1$。

绝对值、算术根概念性强。特别是在综合应用中容易发生错误，其根本原因是对“用字母表示数”的认识不深。随着学习内容的深入，字母a的含义也不断深化，不能只根据外表判断符号。如例1的（1）中①$-a-b+2\sqrt{ab}$误为$-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$；②$|\lg a-1|$误为$\lg a-1$。（2）中的$\sqrt{3x-1-2x^2}$忘记了算术根有意义的要求，不去考虑x的取值范围，从而使问题无法下手。

例2 已知实数x、y、z满足$\frac{1}{2}|x-y|+\sqrt{2y+z}+z^2-z+\frac{1}{4}=0$，求$(z+y)^x$的值。

解：由条件 $\frac{1}{2}|x-y|+\sqrt{2y+z}+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=0$

又$|x-y|\geqslant 0$，$\sqrt{2y+z}\geqslant 0$，$\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0$

$$\therefore \quad \begin{cases} x-y=0, \\ 2y+z=0, \\ z-\frac{1}{2}=0. \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x=-\frac{1}{4}, \\ y=-\frac{1}{4}, \\ z=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

$\therefore \quad (z+y)^x=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)^{-1/4}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-1/4}=\sqrt{2}$.

此题强调了实数的一些重要性质：（1）绝对值、算术根，完全平方数都是非负数.（2）如果若干个非负数的和为零，则每个非负数均是零. 即若a、$b\in R$，且$a^2+b^2=0$，或$\sqrt{a}+|b|=0$，则$a=b=0$。

例3 试回答下列各式所确定的实数a、b或a、b、c之间的关系

（1） $ab=1$；（2） $a+b=0$；(3) $a^2=b^2$；

（4） $abc\neq 0$；（5） $(a-b)(b-c)(c-a)=0$；

(6) $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$.

解：（1）a、b互为倒数；（2）a、b互为相反数；（3）a、b的绝对值相等；（4）a、b、c都不为零；

（5）$a-b$，$b-c$、$c-a$三个数中至少有一个为零，即a、b、c中至少有两个相等；（6）$a=b=c$。

上述六个关系是非常基本而且重要的关系，在审题和理解题意中经常遇到，要能准确，熟练地运用。

例4 在实数集中，把下列各式分解因式：

（1）$36a^{3n+6}-54a^{2n+3}$；

（2）$6x^2+15ab-10ax-9bx$；

（3）a^3-2a^2+4a-3；

（4）x^4-13x^2+36；

（5）$(x^2+3x-2)(x^2+3x+4)-16$；

（6）$(1+a)^2(1+b^2)-(1+a^2)(1+b)^2$。

解：(1) $36a^{3n+6}-54a^{2n+3}=18a^{2n+3}(2a^{n+2}-3)$；

(2) $6x^2+15ab-10ax-9bx$

$=3x(2x-3b)-5a(2x-3b)$

$=(2x-3b)(3x-5a)$；

（3）a^3-2a^2+4a-3

$=a(a-1)^2+3(a-1)$

$=(a-1)(a^2-a+3)$；

(4) x^4-13x^2+36

$=(x^2-9)(x^2-4)$

$=(x+3)(x-3)(x+2)(x-2)$；

(5) $(x^2+3x-2)(x^2+3x+4)-16$.

$=(x^2+3x+1-3)(x^2+3x+1+3)-16$

$=(x^2+3x+1)^2-9-16$

$=(x^2+3x+1+5)(x^2+3x+1-5)$

$=(x-1)(x+4)(x^2+3x+6)$；

(6) $(1+a)^2(1+b^2)-(1+a^2)(1+b)^2$

$=[(1+a)^2-(1+b)^2]+[(1+a)^2b^2-a^2(1+b)^2]$

$=(a-b)(a+b+2)+(b-a)(2ab+a+b)$

$=(a-b)(a+b+2-2ab-a-b)$

$=2(a-b)(1-ab)$.

例 5 k是什么数值时，多项式$kx^2-2xy-3y^2+3x-5y+2$能够分解成两个一次因式。

解：把多项式整理为x的二次三项式

$kx^2-(2y-3)x-(3y^2+5y-2)$

$=kx^2-(2y-3)x-(3y-1)(y+2)$.

若多项式可分解成两个一次因式，可设为

$(ax-3y+1)(bx+y+2)$

$=abx^2+(a-3b)xy-3y^2+(2a+b)x-5y+2$.

由多项式恒等有如下关系式

$$\begin{cases} ab=k, & (1) \\ a-3b=-2, & (2) \\ 2a+b=3. & (3) \end{cases}$$

解（2）（3）组成的方程组，得 $\begin{cases} a=1, \\ b=1. \end{cases}$

代入(1)，得$k=1$.

即可以根据多项式恒等的性质，利用待定系数法求得解答，当$k=1$时，多项式$kx^2-2xy-3y^2+3x-5y+2$能够分解成两个一次因式$x-3y+1$和$x+y+2$的乘积。

熟练地进行因式分解，对于训练逆向思维，培养恒等变形的能力，是十分重要的．应着重掌握好提取公因式法，乘法公式法，十字相乘法，简单的分组分解法，还有配方法和

待定系数法。

例6 化简：

（1）$\dfrac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}$；

（2）$\sqrt{x+6\sqrt{x-9}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-9}}$；

（3）$\sqrt{\lg(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})}\times$

$\times\log_{2+\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})$。

解：（1）$\dfrac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}=\dfrac{a+b+a-b-2\sqrt{a^2-b^2}}{a+b-a+b}$

$$=\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}；$$

（2）$\sqrt{x+6\sqrt{x-9}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-9}}$

$=\left|\sqrt{x-9}+3\right|+\left|\sqrt{x-9}-3\right|$

$=\begin{cases}\sqrt{x-9}+3+\sqrt{x-9}-3=2\sqrt{x-9} & (x\geqslant 18), \\ \sqrt{x-9}+3+3-\sqrt{x-9}=6 & (9\leqslant x<18)；\end{cases}$

（3）$\sqrt{\lg(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})}$

$\times\log_{2+\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})$

$=\sqrt{\dfrac{1}{2}\lg(3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}+2\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2})}$

$\times\log_{2+\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^{-1})$

$=\sqrt{\dfrac{1}{2}\lg 10}\cdot(-1)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.