

中等學校用
三 S 立體幾何學
全一冊

譯者 仲光然
嚴幼芝
徐任吾

003
上海中華書局印行

民國二十三年四月發行
民國二十四年十月六版

中等學校用

三S立體幾何學(全一冊)

◎【定價銀九角】

譯者

仲光 然
嚴幼 芝
徐任 吾

出版者 新國民圖書社

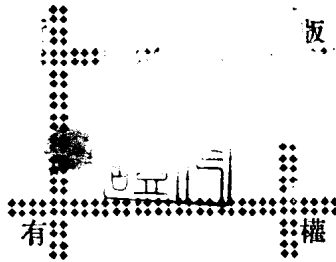
印刷者 中華書局

上海靜安寺路一四八六號

發行者 中華書局

上海棋盤街

發行所 各埠中華書局



三S平面幾何學

一冊 一元七角

中華書局發行

仲光然等譯

Schultze Sevenoak Schuyler 三氏所著之
Plane and Solid Geometry，其地位與二
十年前之溫德華氏幾何學相仿，在我國
銷行極廣。今將全書譯成華文，先出版
平面幾何學一冊，以供初高中學生教科
參攷及與原文對照之用。

新課程標準適用中學教科書審定

高中三角學

余介石編 一冊
六角五分

本書參考英、美、法、日各國三角學十餘種，并依據部頒課程標準及江蘇省高中算學進度表編成，曾在南京各中等學校試用多次，結果極佳。全書以角、函數、三角形三種基本觀念為中心，分為單元編製；材料豐富，而有彈性（有五分之一教材，可酌量省略）；理論精當，而甚明晰，誠為時下高中最適宜之良好課本。

高中解析幾何學

黃泰編 一冊
八角

本書遵照新課程標準編輯，供高級中學第三學年算學課程教學之用。內容以函數變跡為主，自一次、二次、高次以至超越函數，就種種變跡詳細討論，說理顯明，易教易學。對於形數的基本關係，本書中尤充分介紹，以為進修高等算學的階梯；並與代數、幾何、三角各分科注意聯絡，以期形成一貫的系統。書中所附習題，分配極為適宜。

中華書局出版

三 S 立體幾何學

目 錄

第六編 空間的直線及平面——多面角·····	頁 1
第七編 多面體 柱及錐·····	49
第八編 球·····	123
附 錄·····	177
中西名詞對照表·····	1—6

三 S 立體幾何學

第六編

空間的直線及平面——多面角

480. 定義. 空間幾何學或立體幾何學,研究不全在一平面內的圖形.

481. 定義. 過面內任意兩點的直線全在面內,則這個面叫做**平面**.

若通過幾個定點或幾條定直線的平面只能作一個,則這**平面**稱為被定點或定直線所**決定**.

幾何公理 A. 過不在一直線上的三點祇能有一平面.

幾何公理 B. 若二平面有一點共有,則必有第二點共有.

482. 定義. 若一直線和一平面雖任何延長而決不相遇,則這直線和平面叫做**互相平行**.

483. 定義. 若二平面雖任何延長而決不相遇,則

這二平面叫做**互相平行**。

【註】⁽¹⁾ 上述任何要素所決定的平面，在立體幾何學作圖中好像有具體的方法可作，實在用模型之外沒有別的法子。平常用直規及圓規所得的圖不過是一種表象，和平面作圖所得的完全不同。

命題 I. 定理

484. 可以決定一平面的：

- (1) 一直線及線外一點。
- (2) 二相交直線。
- (3) 二平行直線。

(1) 求證直線 AB 及線外一點 C 決定一平面。

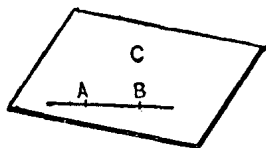
過線上二點 A, B 及 C 祇能作一個平面

(481, 幾何公理 A.)

AB 線在這面內。 (481)

(2) 求證相交二直線 AB 及 AC 決定一平面。

[學者自證之.]

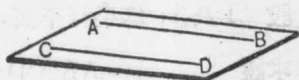


(1) 譯註：立體幾何學中的作圖題不能實際確實作在紙上，倘在推理上能作適合於所設的條件的圖形，就算圖已作就。在推理上認為可以作圖的基礎事項如下：

- (I) 作公理 A, § 484 (1), (2), (3) 所決定的平面，
- (II) 作以上各平面內的平面作圖。

(3) 求證二平行直線 AB 及 CD 決定一平面。

從定義知平行直線 AB 及 CD 在一平面內。



因 AB 及 C 點決定一平面，故二平行直線決定一平面。

485. 系. 二平面的相交處為直線。

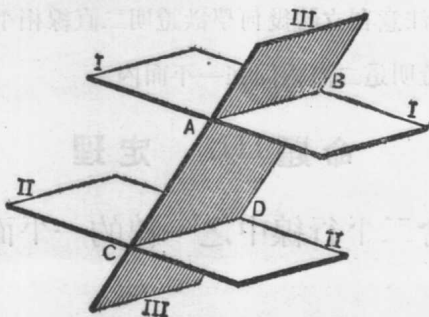
相交處不能含不在一直線上的三點，因過這三點，只能作一個平面。（481 幾何公理 B.）

習 題

1. 攝影者的照相機及測量者的經緯儀都用三足支持，何故？
2. 過不在一平面內四點中的三點能決定多少平面？

命題 II. 定理

486. 二平行平面與第三平面相交的交線互相平



行。

設 I 及 II 爲平行平面，各與第三平面 III 相交於 AB 及 CD。

求證 $AB \parallel CD$ 。

證 AB 與 CD 不能相遇，不然 I 面與 II 面須相遇。

AB 及 CD 在一平面內。

所以 $AB \parallel CD$ 。

487. 系。在平行平面間的平行線相等。

習 題

*1. 一平面和二平行面中之一平面相交者，必與其他一平面相交。

*2. 一直線和二平行平面中之一平面相交者，必與其他一平面相交。

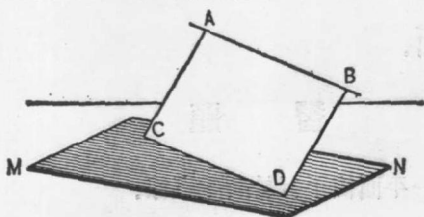
3. 在教室內指出命題 II 的例子。

4. 在命題 II 的圖中，若 $AC \parallel BD$ ，證明 $AB = CD$ 。

【註】學者須注意在立體幾何學欲證明二直線相平行只證明不相遇尙不足够，更須證明這二直線同在一平面內。

命題 III. 定理

488. 含二平行線中之一線的一平面必平行於其他一線。



設 $AB \parallel CD$, 又平面 MN 祇含 CD .

求證 平面 $MN \parallel AB$.

證 AB 與 CD 決定一平面, 與 MN 相交於 CD .

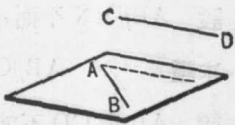
所以, 若 AB 遇 MN , 必遇 MN 於 CD .

但因 $AB \parallel CD$, 故這是不可能的。

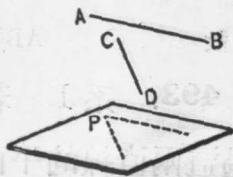
所以 平面 $MN \parallel AB$.

489. 【注意】 應用命題 III 可作一平面使平行於所設直線 AB . 其作法先作一平行於所設直線 AB 的 CD 線, 然後過 CD 作一平面。

490. 系 1. 過一所設直線可作一平面使平行於另一任何所設直線; 若二所設直線不相平行, 則只能作一個平面。



491. 系 2. 過一所設點可作一平面使平行於在空間的所設任意二直線; 若所設二直線不相平行, 則只



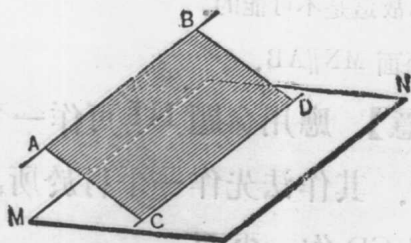
能作一個平面。

習題

過所設二點作一平面使平行於所設直線。

命題 IV. 定理

492. 過平行於一平面的直線的平面與這一平面的交線，必平行於這直線。



設 $AB \parallel MN$ 平面，又 BC 平面含 AB 且交 MN 於 CD 。

求證 $AB \parallel CD$ 。

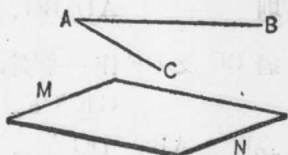
證 AB 與 CD 不能相遇，不然 AB 將與 MN 平面相遇。

AB 及 CD 在一平面內。

故 $AB \parallel CD$ 。

493. 系 1. 若兩相交直線皆平行於所設平面，則過這兩直線的平面必平行於所設平面。

設 AB 及 AC 都平行於 MN 。若 ABC 平面與 MN 相交，則交線必皆平行於 AB 及 AC ，這是不可能的。



494. 系 2. 若兩角的邊各各互相平行，則其平面必相平行。

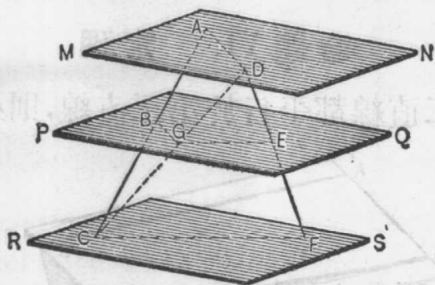
因 $AB \parallel A'B'$, ABC 平面平行於 $A'B'$,
同理 ABC 平面平行於 $B'C'$ 。



故 ABC 平面 $\parallel A'B'C'$ 平面。 (系 1.)

命題 V. 定理

495. 若二直線被許多平行平面所截，則相當的線分成比例。



設 平行平面 MN, PQ , 及 RS 被二直線截於 A, B, C , 及 D, E, F 。

求證 $AB:BC = DE:EF$ 。

證 作 DC , 又過 AC 及 DC 作一平面與平面 PQ 及 MN 相交於 BG 及 AD 。

則 $AD \parallel BG$. (486)

過 DC 及 DF 作一平面，同樣可得，

$GE \parallel CF$.

故 $\frac{AB}{BC} = \frac{DG}{GC}$ ，又 $\frac{DE}{EF} = \frac{DG}{GC}$. (何故?)

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$. (公理 1)

496. 系. 若從任意一點作許多直線被二平行平面所截，則相當的線分成比例。

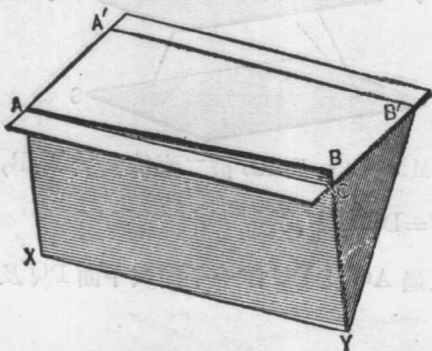
習 題

1. 若三個平行平面在一橫截線上，截相等線分，則在任何橫截線上，亦截成相等線分。

2. 在命題 V 的圖中，若 $BG=5$, $AD=15$, $DE=4$ ，求 EF 。

命題 VI. 定理

497. 若二直線都平行於第三直線，則必互相平行。



設 $AB \parallel XY$, 又 $A'B' \parallel XY$.

求證 $AB \parallel A'B'$.

證 過 AB 及 XY 作平面 AY , 又過 $A'B'$ 及 A 點作平面 $B'A$.

設平面 AY 及 $B'A$ 相交於 AC .

平面 $B'A \parallel XY$ (488)

故 $AC \parallel XY$ (492)

但 $AB \parallel XY$ (假設)

所以 AB 及 AC 必重合. (公理16)

AB 及 $A'B'$ 在一平面內.

但 AB 及 $A'B'$ 不能相遇. (公理16)

故 $AB \parallel A'B'$.

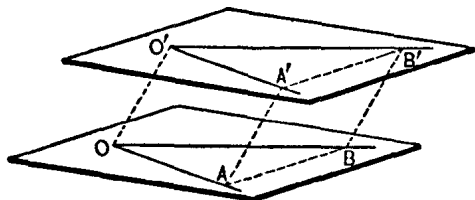
習 題

若一直線 AB 平行於平面 P , 又平行於另一直線 CD , 則平面 $P \parallel CD$.

【示意】 過 AB 作一平面和 P 相交於 XY 線.

命題 VII. 定理

498. 若不在一平面內的二角, 二邊各各平行且方



向亦同，則二角必相等。

設 $\angle AOB$ 角及 $\angle A'O'B'$ 角的邊各各平行，且方向亦同。

求證 $\angle AOB = \angle A'O'B'$ 。

證 取 $OA = O'A'$ ，又 $OB = O'B'$ 。

作 AA' ， BB' ， AB 及 $A'B'$ 。

AO' 是一平行四邊形。 (何故?)

BO' 是一平行四邊形。 (何故?)

故 AA' 等於且平行於 OO' ，

又 BB' 等於且平行於 OO' 。

故 AA' 等於且平行於 BB' 。 (公理 1.)(497)。

因之 $AA'B'B$ 是一平行四邊形，

又 $AB = A'B'$ 。

$\therefore \triangle AOB \cong \triangle A'O'B'$ (何故?)

$\therefore \angle O = \angle O'$ 。

499. 定義。一直線與一平面相交的交點叫做足。

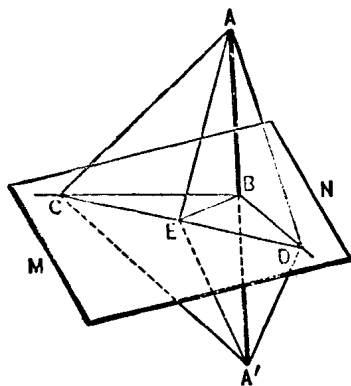
500. 定義。一直線與平面相交，若在平面上過其足的任何直線都和這直線垂直，則稱這直線垂直於平面。

501. 定義。一直線垂直於一平面，則稱這平面垂

直於這直線。

命題 VIII. 定理

502. 若一直線垂直於二相交直線於其交點，則這直線必垂直於這相交直線的平面。



設 BC 及 $BD \perp AB$ ，又平面 MN 含 BC 及 BD 。

求證 $AB \perp$ 平面 MN 。

證 在平面 MN 內過 B 作任意直線 BE 。

作 CD 遇 BE 於 E ，又延長 AB 至 A' ，使 $BA' = AB$ 。

作 AC, AE, AD, CA', EA' ，及 DA' 。

$$AC = A'C, AD = DA'. \quad (125)$$

$$CD = CD. \quad (\text{何故?})$$

$$\text{所以} \quad \triangle ACD \cong \triangle CDA'. \quad (\text{何故?})$$

$$\therefore \angle ACD = \angle A'CD,$$

$$\text{又} \quad \triangle ACE \cong \triangle A'CE. \quad (\text{何故?})$$

$$\therefore EA = EA'.$$

$$\text{則} \quad BE \perp AA'. \quad (79)$$

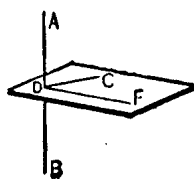
故 AB 垂直於在平面 MN 內過足的任何直線，即 $AB \perp$ 平面 MN 。

(500)

503. 系. 過一點作一平面使垂直於一直線。

I. 設直線 AB 及在直線 AB 上的一點 D 。過 AB 作二平面。在這兩平面內(圖上未畫出)作 $DC \perp AB$ 及 $DF \perp AB$ 。

平面 CDF 即所求之平面。



II. 設直線 AB 及線外一點 C 。作 $CD \perp AB$ 。過 AB 而不含 C 點作一平面。在這平面內作 $DF \perp AB$ 。CDF 即所求之平面。

習 題

1. 在命題 VIII 的圖內，若 $AD=5$ ， $AB=4$ ， $BC=5$ ， $\angle CBD=120^\circ$ ，又 $AB \perp$ 平面 MN ，求 CD 的長。
2. 若 $ABCD$ 為空間四邊形(即 A, B, C 及 D 不在一平面內)又 $AB=BC$ ， $CD=DA$ ，則平面角 A 等於平面角 C 。
3. 聯空間四邊形兩鄰邊中點的直線必等於且平行於其他二邊中