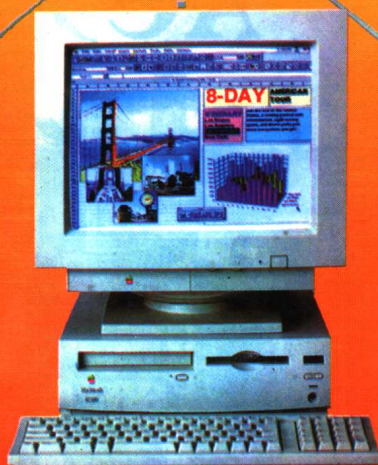
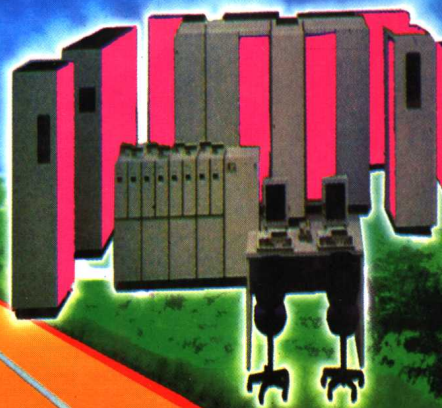


高等学校计算机系列丛书

高等数学

陈克西 季福弟 主编



重庆大学出版社

内 容 提 要

本书是根据全国高等院校工科数学教材编审委员会审定的《高等数学教学大纲》的要求编写的。

全书共 12 章,内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、重积分、曲线积分、曲面积分、无穷级数和常微分方程。各章节均有习题,书末附有习题答案。

本书表达准确、由浅入深。可作为高等工科院校各专业及成人教育、电视大学学生的教材,也可供其他专业学生使用。

高 等 数 学

陈克西 季福弟 主编

责任编辑 韩 洁

*

重庆大学出版社出版发行

新华书店经销

重庆电力印刷厂印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:26.75 字数:667千

1997年6月第1版 1997年6月第1次印刷

印数:1—6000

ISBN 7-5624-1351-7/O·144 定价:20.00元

序

面对知识爆炸,社会学家们几乎都开出了一个相同的药方:计算机。计算机也深孚众望,以其强大的功能,对人类作出了巨大的贡献,取得了叹观止矣的成就。自它1946年2月14日在美国费城诞生以来,至今已过“知天命”的年龄了。现在,计算机已是一个庞大的家族。如果说,它的成员占据了世界的每一个角落和每一个部门也并不过分,甚至找不到这样一个文明人,他的生活不直接或间接与计算机有关。目前,全世界计算机的总量已达数亿台,而且,现在正以每年几千万台的速度增长。

作为计算机在信息传递方面的应用,计算机加上网络,被认为是和能源、交通同等重要的基础设施。这种设施对信息的传递起着异常重要的作用。西方发达国家和我们国家对此都非常重视。例如,美国的信息高速公路计划,全球通讯的“铍”计划,我国也开始实行一系列“金”字头的国民经济管理信息化计划。这些计划中唱主角的设备便是计算机。计算机在各个方面的应用不胜枚举,我们每个人都自觉不自觉地处于计算机包围中。

计算机对社会生产来说是一个产业大户,对每个现代人来说是一种工具,对学生们来说,它是一个庞大的知识系统。面对计算机知识的膨胀,面对计算机及其应用产业的膨胀,计算机各个层次的从业人员的需要也在不断膨胀,计算机知识的教育也遍及从小学生到研究生的各个层次。

为了适应计算机教学的需要,重庆大学出版社近几年出版了大量的计算机教学用书,这一套教材就是一套适应专科层次的系列教材。我们将会看到,这一套教材以系列、配套、适用对路,便于教师和学生选用。如果再仔细研究一下,将会发现它的一系列编写特色:

1. 这些书的作者们是一些长期从事计算机教学和科研的教师,不少作者在以前都有大量计算机方面的著作出版。例如本系列书中的《Visual Fox Pro 中文版教程》的作者,十年前回国后最早将狐狸软件介绍到祖国大陆,这一本书已是他的第八本著作了。坚实的作者基础,是这套书成功的最根本的保证。

2. 计算机科学是发展速度惊人的科学,内容的先进性、新颖性、科学性是衡量计算机图书质量的重要标准,这一套书的作者们在这方面花了极大的功夫,力求让读者既掌握计算机的基础知识,又让读者了解最新的计算机信息。

3. 在内容的深度和知识结构上,从专科学生的培养目标出发,在理论上,从实际出发,满足本课程及后续课程的需要,而不刻意追求理论的深度。在知识结构上,考虑到全书结构的整体优化,而不过分强调单本书的系统性。这样,在学过这一套系列教材后,学生们就可在浩瀚的计算机知识中,建立起清晰的轮廓,就会知道这些知识的前因后果,就会了解这些知识的前接后续。使学生们能在今后的工作实践中得心应手。

4. 计算机是实践性很强的课程,仅靠坐而论道是学习不了这些知识的。所以从课程整体设置来讲,包括有最基本的操作技能的教材。对单本书来说,在技术基础课和专业课中,都安排有一定的上机实习或实验,这样可使学生既具备一定的理论知识以利今后发展和深造,又掌握实际的工作技能胜任今后的实际工作。

编写一套系列教材,这是一个巨大的工程。这一套书的作者们,重庆大学出版社的领导和编辑们,都为此付出了辛勤的劳动。作为计算机工作者,以此序赞赏他们的耕耘,弘扬他们的成绩。

周明凡

1997年6月15日

数学就是这样一种东西：她提醒你有无形的灵魂，她赋予她所发现的真理以生命；她唤起心神，澄净智慧；她给我们的内心思想添辉；她涤尽我们有生以来的蒙昧与无知。

Proclus

数学分析与自然界本身同样广阔。

Fourier

前 言

本书是根据全国高等院校工科数学教材编审委员会审定的《高等数学教学大纲》的要求，主要为高等工科院校计算机、电子、机械等各类专业的学生编写的，可作为高等数学课程的试用教材或教学参考书，也可供工程技术人员参考。

在本书的编写过程中，始终致力于教材质量的提高，吸收了编者在教学中积累的一些有益的经验。在全书内容的编排上，一方面要确保科学性原则的贯彻，另一方面考虑到读者对象的特点，还注意到方便在相邻课程和后续课程中的应用。基于此，对于基本概念的叙述力求深入浅出，清晰准确；对于基本理论的论证力求简明易懂，推导严谨；对于基本方法的介绍从比较、对照入手，力求阐明思维方法的本质和应用技巧；对于例题的选择力求典型充实，难易得体，既具有启发性，又具有广泛的应用性。

为了适应不同学校、不同专业学生的不同水平，在习题的选择上也做了不少努力。全书配有足够数量的各种类型的习题，每章按节设置了满足基本要求的习题，各章后面还配有具有一定难度或综合性的总习题。配置两类习题的目的是为了便于教师从中选出合适的题目供教学使用，也便于读者选用合适的习题以进行自我检查。书末附有习题答案。

各工科院校在使用本教材时，可依据专业的要求和学时的多少，对标有“*”的内容作适当处理。

本书由陈克西、季福弟主编，第一、二章由杨凤藻编写，第三、四、五、六章由陈克西编写，第七、八、九章由张浩编写，第十、十一、十二章由季福弟编写，全书由陈克西修改、定稿。

由于水平所限，不妥或谬误之处一定难免，恳请使用本教材的读者予以批评指正。

编 者

1997年5月

目 录

第一章 函数、极限与连续	1
第一节 函数	1
第二节 极限的概念	14
第三节 极限运算	23
第四节 极限存在准则 两个重要极限	28
第五节 无穷小量的比较	32
第六节 函数的连续性	34
总习题	41
第二章 导数与微分	44
第一节 导数的概念	44
第二节 函数的微分法	49
第三节 高阶导数	59
第四节 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数	61
第五节 微分及其在近似计算中的应用	67
总习题	72
第三章 中值定理与导数的应用	75
第一节 中值定理	75
第二节 罗比达法则	80
第三节 函数的增减性与极值	85
第四节 函数的最大值和最小值	91
第五节 曲线的凹向及拐点 函数作图	93
总习题	100
第四章 不定积分	102
第一节 不定积分的概念与性质	102
第二节 换元积分法	109
第三节 分部积分法	118
第四节 几种特殊类型函数的积分	122
第五节 积分表的使用	133
总习题	135
第五章 定积分	138

第一节	定积分的概念	138
第二节	定积分的性质	142
第三节	定积分与不定积分的联系	145
第四节	定积分的计算	149
第五节	定积分的近似计算	156
第六节	广义积分	160
	总习题	165
第六章	定积分的应用	167
第一节	定积分的元素法	167
第二节	定积分在几何方面的应用	168
第三节	定积分在物理方面的应用	177
	总习题	185
第七章	空间解析几何与向量代数	187
第一节	空间直角坐标系	187
第二节	向量及其坐标表示法	188
第三节	向量的数量积与向量积	192
第四节	平面及其方程	196
第五节	空间直线及其方程	200
第六节	二次曲面与空间曲线	203
	总习题	212
第八章	多元函数微分学	214
第一节	多元函数的概念 二元函数的极限和连续性	214
第二节	偏导数	218
第三节	全微分及其在近似计算中的应用	222
第四节	多元复合函数与隐函数的求导法则	226
* 第五节	方向导数与梯度	232
第六节	偏导数的应用	234
	总习题	241
第九章	重积分	242
第一节	二重积分的概念与性质	242
第二节	二重积分的计算方法	245
第三节	二重积分的应用	252
* 第四节	三重积分	256
	总习题	260

第十章 曲线积分与曲面积分	262
* 第一节 对弧长的曲线积分	262
第二节 对坐标的曲线积分.....	266
第三节 格林公式及其应用.....	273
* 第四节 曲面积分	280
总习题.....	291
第十一章 无穷级数	293
第一节 数项级数的概念和性质.....	293
第二节 正项级数及其审敛法.....	298
第三节 任意项级数.....	305
第四节 幂级数.....	309
第五节 函数的幂级数展开式.....	317
* 第六节 幂级数在近似计算中的应用	325
第七节 傅立叶级数.....	328
* 第八节 周期为 $2l$ 的周期函数的傅立叶级数	336
总习题.....	339
第十二章 常微分方程	342
第一节 微分方程的基本概念.....	342
第二节 一阶微分方程.....	345
第三节 一阶微分方程应用举例.....	353
第四节 可降阶的高阶微分方程.....	358
第五节 二阶常系数线性微分方程.....	362
总习题.....	376
附录一 积分表	377
附录二 习题参考答案	385

当一个人沉湎在分析运算中时,他就被这个方法的普遍性和它的不可估量的优越性引导着……。分析是如此地多产,只需把一些特殊的真理译成这个普遍的语言,就会看到从它们本身的表达中又出现众多新的出乎预料的真理。没有另外一种语言是如此优美……。

Laplace

第一章 函数、极限与连续

高等数学的主要内容是微积分,微积分的研究对象主要是函数,极限方法是研究函数的一种基本方法,本章将介绍函数的概念、函数的极限和函数的连续性等基本概念以及它们的一些性质。

第一节 函 数

一、函数及其表示法

1. 函数的概念 客观世界中的同一问题往往有几个不同的量在变化着,而且这几个量的变化不是孤立的,而是遵循着一定的变化规律而相互联系、相互依赖的,这种相依关系就是数学上所谓的函数关系。

定义 设有两个变量 x 和 y ,如果变量 x 在其变化范围内每取一个确定的值,变量 y 按照一定的规则总有确定的数值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记为 $y=f(x)$ 。并称 x 为自变量, y 为因变量。变量 x 的变化范围,称为函数 $y=f(x)$ 的**定义域**,记为 D 。




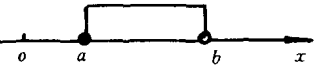
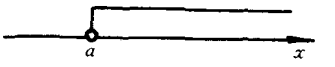
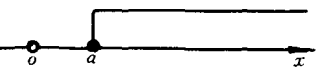
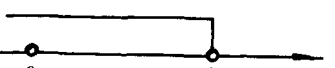

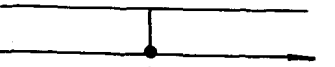
当 x 取 $x_0 \in D$ 时,与 x_0 相对应的 y 的值记为 y_0 或 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$,称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的值。当 x 遍取 D 内的所有值时,对应的函数值的全体的集合 $W=\{y=f(x), x \in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的**值域**。

函数记号 $f(x)$ 中的字母“ f ”反映自变量与因变量的对应规则,即函数关系。对应规则也常常用“ φ ”,“ g ”,“ h ”,“ F ”等表示,而函数也可记为 $y=\varphi(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$ 等。有时也可简记作 $y=y(x)$,此时等号左边的 y 表示函数值,右边的 y 表示对应规则。

在数学中,若不考虑函数关系的实际意义,只是抽象地研究用算式表达的函数,这时若无特别强调,函数的定义域就是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值。例如函数 $y=\frac{1}{x} + \sqrt{4-x^2}$ 的定义域是 $\{x|-2 \leq x \leq 2, \text{且 } x \neq 0\}$ 。

函数的定义域常用区间来表示,现将各种区间列表于下,其中 a 和 b 都是实数,且 $a < b$,符号 $-\infty$ 和 $+\infty$ 分别读作负无穷大和正无穷大,它们不是数。

表 1.1

记号	等价集合	名称	图形
(a, b)	$\{x a < x < b\}$	开区间	
$[a, b]$	$\{x a \leq x \leq b\}$	闭区间	
$(a, b]$	$\{x a < x \leq b\}$	半开区间	
$[a, b)$	$\{x a \leq x < b\}$	半开区间	
$(a, +\infty)$	$\{x x > a\}$	无限区间	
$[a, +\infty)$	$\{x x \geq a\}$	无限区间	
$(-\infty, b)$	$\{x x < b\}$	无限区间	
$(-\infty, b]$	$\{x x \leq b\}$	无限区间	
$(-\infty, +\infty)$	$\{x -\infty < x < +\infty\}$	无限区间	

邻域也是一个经常用到的实数集合。设 a 与 δ 是两个实数, 且 $\delta > 0$, 数集

$$\{x||x-a| < \delta\}$$

称为点 a 的 δ 邻域, 记作 $u(a, \delta)$ 。点 a 称为邻域中心, δ 称为邻域半径。

邻域 $u(a, \delta)$ 在数轴上是一个以 a 为中心, 2δ 为长度的开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 。

点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后, 称为点 a 的去心 δ 邻域, 记作 $u(\hat{a}, \delta)$, 即

$$u(\hat{a}, \delta) = \{x|0 < |x-a| < \delta\} = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)。$$

在平面直角坐标系中, 取自变量 x 在横轴上变化, 因变量 y 在纵轴上变化, 则平面点集 $\{(x, y)|y=f(x), x \in D\}$ 称为定义在 D 上的函数 $y=f(x)$ 的图形。

例 1 $y = \arccos(2+x^2)$

对任何实数 x , 都没有按给定的规则与之对应的 y 值, 而函数的定义域不能为空集, 故此

例不是函数关系。

例2 研究函数 $y=\lg x$ 与函数 $y=\frac{1}{2}\lg x^2$ 是不是相同的函数。

函数 $y=\lg x$ 的定义域是 $(0, +\infty)$, 而 $y=\frac{1}{2}\lg x^2$ 的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 如图 1.1 与图 1.2 所示。

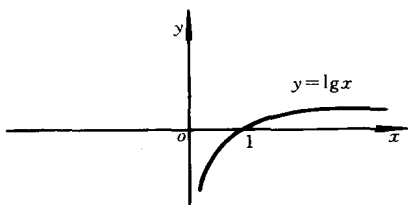


图 1.1

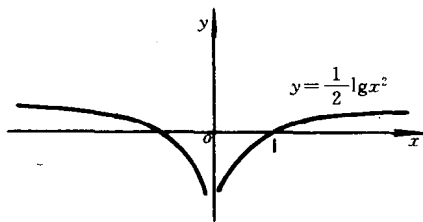


图 1.2

所以 $y=\lg x$ 与 $y=\frac{1}{2}\lg x^2$ 是定义在不同区间上的两个不同的函数。

例3 研究函数 $y=x$ 与函数 $y=\sqrt{x^2}$ 是否为相同的函数。

函数 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 都是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数, 但是当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, 函数 $y=x$ 的函数值小于零, 而函数 $y=\sqrt{x^2}$ 的函数值大于零, 如图 1.3 与图 1.4 所示。

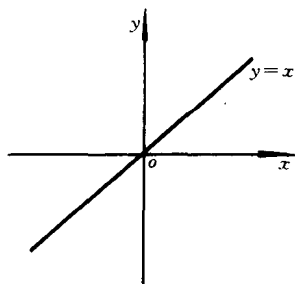


图 1.3

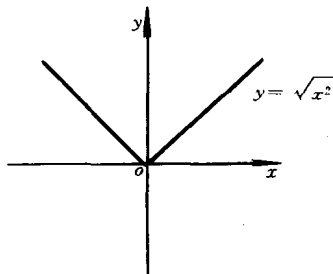


图 1.4

所以 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 是两个定义域相同, 函数关系不同的两个不同的函数。

由例2与例3可以看出, 两个函数相等的充要条件是当且仅当它们的定义域相等, 对应关系相同。

例4 求函数 $f(x)=\arcsin \frac{x-1}{5} + \sqrt{25-x^2}$ 的定义域, 并求 $f(0)$ 与 $f(1)$ 。

解 要使算式有意义, 必须

$$\left| \frac{x-1}{5} \right| \leq 1 \quad \text{且} \quad 25-x^2 \geq 0$$

$$\text{即} \quad |x-1| \leq 5 \quad \text{且} \quad |x| \leq 5$$

$$\text{即} \quad -4 \leq x \leq 6 \quad \text{且} \quad -5 \leq x \leq 5$$

因此有 $-4 \leq x \leq 5$

于是函数的定义域为 $[-4, 5]$ 。

因为 $0 \in [-4, 5], 1 \in [-4, 5]$

所以 $f(0) = -\arcsin \frac{1}{5} + 5, f(1) = 2\sqrt{6}$

在函数的定义中,如果自变量在定义域内任取一个数值时,对应的函数值总只有唯一的一个,这种函数称为单值函数;否则称为多值函数。例 2、例 3 和例 4 中的函数都是单值函数。

以后若无特别声明,所讲的函数都是单值函数。

2. 函数表示法 常用的函数表示法有公式法、表格法和图形式。

例 5 $y = \arccos \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$

这是用公式法表示的 y 是 x 的函数,它的定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 。

例 6 某城市一年里各月的电视机零售量(单位:百台)如表 1.2 所示。

表 1.2

月份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
零售量 S	10	15	7	8	8	7	5.5	7	8	8	9	9.5

表 1.2 表示了该城市电视机零售量 S 随月份 t 而变化的函数关系,它的定义域为

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

例 7 在气象观测站的百叶箱内气温自动记录仪把某一天的气温变化描绘在记录纸上,即图 1.5 所示的曲线。根据这个图就能知道,这一天内时间 t 从 0 点到 24 点气温 T 的变化情况。图 1.5 是用图象表示 T 是 t 的函数,其定义域为 $[0, 24]$, 值域为 $[15, 30]$ 。

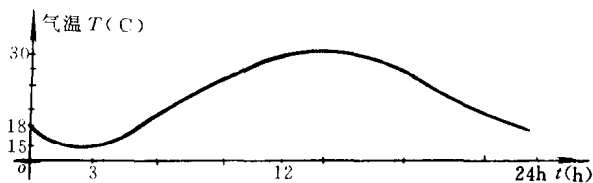


图 1.5

下面再举几个函数的例子。

例 8 函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \\ 0, & \text{当 } x = 0 \\ -1, & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$

称为符号函数,它的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $\{-1, 0, 1\}$, 如图 1.6 所示。对于任何实数 x , 下列关系成

$$\text{立: } x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$$

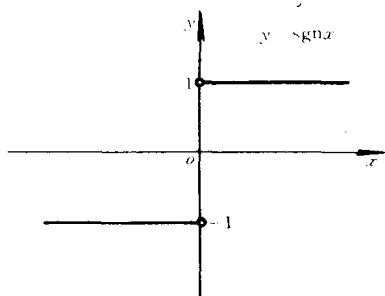


图 1.6

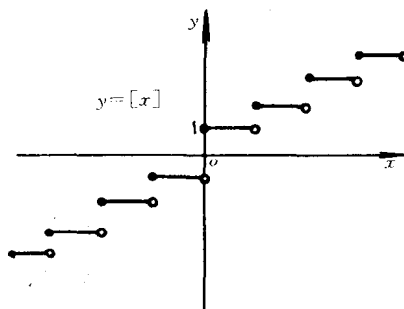


图 1.7

例 9 设 x 为任一实数, 函数 $y = [x]$ 称为取整函数, 对每个 x , 函数值是不超过 x 的最大整数。例如, $[4.87] = 4, [-2.1] = -3$ 等。它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为全体整数集 Z , 如图 1.7 所示。

例 10 求函数

$$y = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & \text{当 } |x| < 1 \\ x^2 - 1, & \text{当 } 1 < |x| \leq 2 \end{cases}$$

的定义域, 并求 $f(0), f(\frac{3}{2})$, 作出函数图象。

解 函数的定义域为 $\{x \mid |x| < 1\} \cup \{x \mid 1 < |x| \leq 2\}$, 即 $[-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 2]$ 。

$f(0) = \sqrt{1-0^2} = 1, f(\frac{3}{2}) = (\frac{3}{2})^2 - 1 = \frac{5}{4}$ 。如图 1.8 所示。

从例 8、例 9 和例 10 看到, 有时一个函数要用几个式子表示, 这种在定义域的不同区间内, 对应法则用不同式子表示的函数称为分段函数。应特别注意, 分段函数是用几个式子合起来表示的一个函数, 而不是表示几个函数。其定义域是每个式子自变量取值范围的并集, 如例 10。

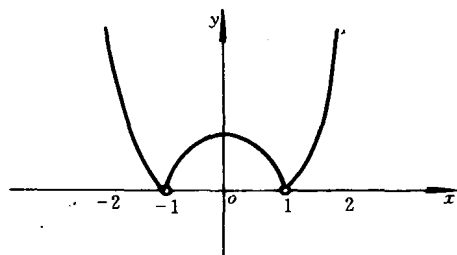


图 1.8

二、建立函数关系举例

为了解决实际问题, 一般先要建立函数关系。为此, 先要确定自变量和因变量, 再根据问题本身, 寻找自变量和因变量之间所满足的等式, 再将因变量表示为自变量的函数, 这就是要求的函数关系。下面举几个建立函数关系的例子。

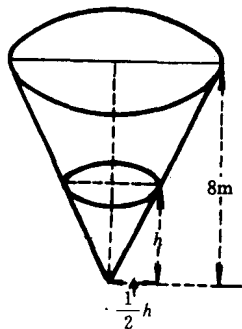


图 1.9

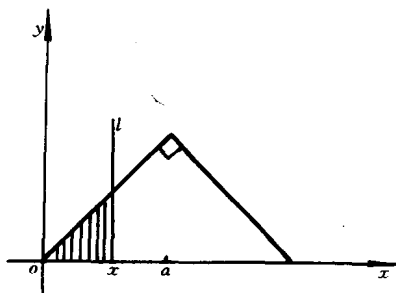


图 1.10

例 11 有一个倒立的圆锥形蓄水器, 口径与深度都是 8m。如果以每分钟 6m^3 的速度往容器里注水, 求容器内水深与注水时间的关系。

解 设注水时间为 t , 即 $t=0$ 时开始注水。当时间经过 t 分钟时, 注入的水为 $6t$ 立方米。设此时容器内水深为 h 米, 则水面半径为 $\frac{1}{2}h$ 米, 如图 1.9 所示。由题设, 有

$$6t = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}h\right)^2h$$

解之得 $h = 3\sqrt{\frac{72t}{\pi}}$

这就是水深 h 与注水时间 t 的函数关系。由于容器高为 8m, 因此水深 h 的最大值为 8m, 故函数的定义域为 $\{t | 0 \leq t \leq \frac{64}{9}\pi\}$, 值域为 $[0, 8]$ 。

例 12 设有一等腰直角三角形, 见图 1.10, 有一直线 l 开始位置与 y 轴重合, 以匀速 v ($v > 0$) 沿 x 轴正向平移, 求任一时刻 t 直线 l 所扫过的三角形内部的面积 (图 1.10 中阴影部分的面积)。

解 设在 t 时刻直线 l 所扫过的三角形内部的面积为 S 。并设在时刻 t 直线 l 与 x 轴的交点为 x , 则 $x = vt$ 。

从图 1.10 可见, 当 $0 \leq x \leq a$ 时, 即 $0 \leq t \leq \frac{1}{v}a$ 时, $S = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}v^2t^2$,

当 $a < x \leq 2a$ 时, 即 $\frac{1}{v}a < t \leq \frac{1}{v} \cdot 2a$ 时, $S = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}[a + (2a - x)](x - a) = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}(3a - vt)(vt - a)$

所以
$$S = \begin{cases} \frac{1}{2}v^2t^2, & \text{当 } 0 \leq t \leq \frac{1}{v}a, \\ \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}(3a - vt)(vt - a), & \text{当 } \frac{1}{v}a < t \leq \frac{1}{v} \cdot 2a \end{cases}$$

这就是面积 S 与时间 t 的函数关系, 它是一个分段函数, 其定义域为 $[0, \frac{2}{v}a]$, 值域为 $[0, a^2]$ 。

三、函数的基本性态

1. 函数的有界性 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $X \subset D$, 如果存在正数 M , 使得对一切 $x \in X$ 所对应的函数值都满足不等式

$$|f(x)| \leq M$$

则称 $f(x)$ 在 X 内是有界函数。若这样的正数 M 不存在, 则称 $f(x)$ 在 X 内是无界函数。

例如, 例 11 和例 12 都是在定义域内的有界函数。函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在开区间 $(0, 1)$ 内是无界函数, 而在 $[a, b]$ ($a > 0, b > a$) 内是有界函数, 界 M 可取 $\frac{1}{a}$ 或大于 $\frac{1}{a}$ 的任意实数。

2. 函数的单调性 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $(a, b) \subset D$, 若在 (a, b) 内的任意两点 x_1 与 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内为单调递增函数。

同样可以定义在 $(-\infty, +\infty)$ 内的单调递增或单调递减函数。

单调递增函数与单调递减函数统称为单调函数。

单调递增函数的图象是沿横轴正向上升的曲线 (图 1.11); 单调递减函数的图象是沿横轴的正向下降的曲线 (图 1.12)。

3. 函数的奇偶性 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称。如果对于任意的 $x \in D$ (从而

$-x \in D$)恒有

$$f(-x) = f(x)$$

则称函数 $f(x)$ 为**偶函数**；如果对任意的 $x \in D$ ，恒有

$$f(-x) = -f(x)$$

则称函数 $f(x)$ 为**奇函数**。

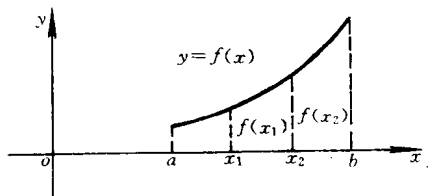


图 1.11

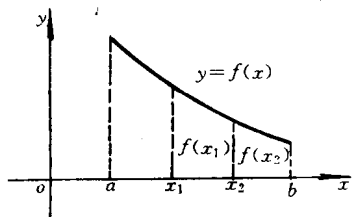


图 1.12

例如, $x^2 + 1$, $\sqrt{1-x^2}$, $\cos x$ 都是偶函数, x^3 , $\operatorname{tg} x$, $\frac{1}{x}$ 都是奇函数。偶函数的图象关于 y 轴对称(图 1.13); 奇函数的图象关于原点对称(图 1.14)。

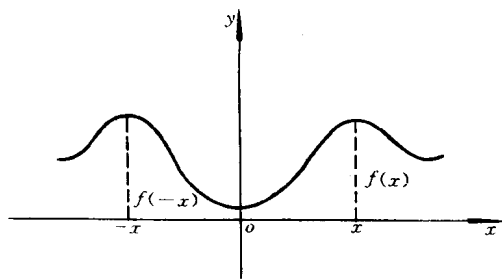


图 1.13

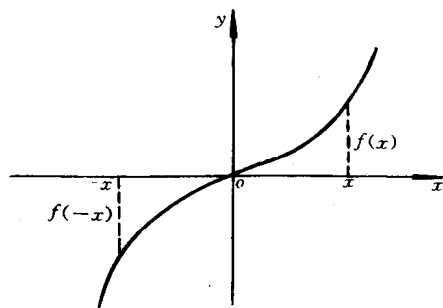


图 1.14

4. 函数的周期性 对于定义域为 D 的函数 $f(x)$ ，如果存在正数 T ，使得对一切 $x \in D$ 有 $(x+T) \in D$ ，且有

$$f(x+T) = f(x)$$

则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**。称 T 为 $f(x)$ 的周期，通常又是把满足此条件的最小正数称为 $f(x)$ 的**周期**。

例如, $\sin x$, $\cos x$ 是以 2π 为周期的函数, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ 是以 π 为周期的函数。

周期函数在其定义域的每个长度为 T 的区间内具有相同的图象。因此, 只要作出一个周期内的图象, 将其沿 x 轴的正负两方向平移, 就可得到函数在其它周期内的图象。

四、初等函数

1. 反函数 一个函数有两个变量, 一个为自变量, 一个为因变量。在实际问题中, 谁是自变量, 谁是因变量要看问题而定。例如半径为 r 的球的体积 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, 这里半径 r 是自变量, V 为因变量。反之, 如果要从体积 V 来确定球的半径 r 时, 有:

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

这是自变量为 V , 因变量为 r 的函数。称它为 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ 的反函数。

一般地, 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 W , 如果对任意的一个 $y \in W$, D 中总有唯一的 x 满足 $y=f(x)$, 则 x 成为 y 的函数, 称该函数为 $y=f(x)$ 的反函数, 记为 $x=f^{-1}(y)$ 。

习惯上, 用 x 代表自变量, y 代表因变量, 因此函数 $y=f(x)$ (称为直接函数) 的反函数常记为 $y=f^{-1}(x)$ 。

由定义, 函数 $y=f(x)$ 的定义域与值域分别是其反函数的值域和定义域。

值得注意的是: 在同一坐标系下, 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 表示同一条曲线; 而 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称。

如果函数 $y=f(x)$ 是单值、单调函数, 则它一定有反函数。

2. 复合函数 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$, 其定义域为 D ; 而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$, 其值域为 W , 如果 $D \cap W \neq \emptyset$, 则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**。 x 称为自变量, y 称为因变量, u 称为**中间变量**。

例如, 函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 可看作由 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=1-x^2$ 复合而成。这是因为 $y=\sqrt{u}$ 的定义域 $[0, +\infty)$ 与 $u=1-x^2$ 的值域 $(-\infty, 1)$ 的交集非空。

必须注意, 并不是任意两个函数都可以复合成一个复合函数, 例如 $y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 就不可能复合成一个复合函数, 这是因为 $y=\arcsin u$ 的定义域 $[-1, 1]$ 与 $u=2+x^2$ 的值域 $(2, +\infty)$ 的交集为空集。

复合函数也可以由两个以上的函数复合构成。例如 $y=\sin^2 \sqrt{1-x^2}$ 可以看作由 $y=u^2$, $u=\sin v$, $v=\sqrt{w}$, $w=1-x^2$ 四个函数复合而成, 其中 u, v, w 都是中间变量。

例 13 设 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 试求 $f\{f[f(x)]\}$ 。

解 因为

$$f[f(x)] = \frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

所以

$$f\{f[f(x)]\} = f\left(\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\right) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$$

例 14 设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| = 1 \\ -1, & |x| > 1 \end{cases} \quad g(x) = e^x$$

求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$ 。

解

$$f[g(x)] = f(e^x) = \begin{cases} 1, & e^x < 1 \\ 0, & e^x = 1 \\ -1, & e^x > 1 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}$$

$$g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e, & |x| < 1 \\ 1, & |x| = 1 \\ e^{-1}, & |x| > 1 \end{cases}$$

3. 初等函数 在中学时期学过的常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这六类函数统称为**基本初等函数**。为便于后面的应用,将它们的主要性质归纳如下。

(一)常值函数 $y=C$

它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,图象是平行于 x 轴,且在 y 轴上的截距为 C 的一条直线,如图 1.15 所示。

(二)指数函数 $y=a^x (a>0, \text{且 } a \neq 1)$

它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,值域为 $(0, +\infty)$,其图象总在 x 轴上方,且通过点 $(0,1)$,当 $a>1$ 时,函数单调递增,如图 1.16 所示;当 $0<a<1$ 时,函数单调递减,如图 1.17 所示。

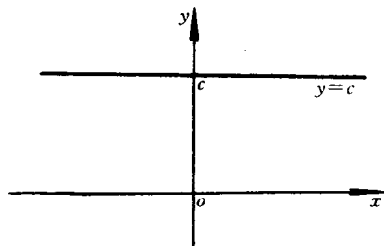


图 1.15

(三)对数函数 $y=\log_a x (a>0, \text{且 } a \neq 1)$

它的定义域为 $(0, +\infty)$,值域为 $(-\infty, +\infty)$,其图象总通过点 $(1,0)$ 。当 $a>1$ 时,函数单调递增,如图 1.16 所示;当 $0<a<1$ 时,函数单调递减,如图 1.17 所示。对数函数与指数函数互为反函数。

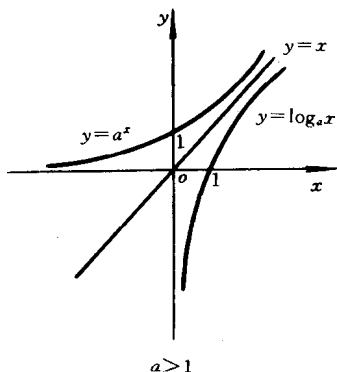


图 1.16

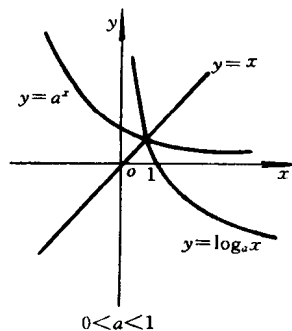


图 1.17

(四)幂函数 $y=x^\alpha$ (α 为常数)

幂函数的定义域要看 α 是什么数而定,例如当 $\alpha=\frac{1}{3}$ 时,其定义域为 $(-\infty, +\infty)$,而当 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时,它的定义域为 $[0, +\infty)$ 。但不论 α 为何值,它在 $(0, +\infty)$ 内总有定义,并且图象总通过点 $(1,1)$ 。

例如 幂函数 $y=x^2$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,它是偶函数;它的反函数的一个单值分支