高等学校电子信息科学与工程专业教材

随机信号分析基础

（第二版）

王永德　王　军　编著

-43

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

高等学校电子信息科学与工程专业教材

随机信号分析基础(第二版)

王永德　王　军　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京・BE

内 容 简 介

本书主要从工程应用的角度讨论随机信号(随机过程)的理论分析和实验研究方法。全书共八章,内容包括:随机信号两种统计特性的描述方法,重点介绍数字特征,如均值、方差、相关函数、相干函数、功率谱密度、高阶谱、谱相关理论等的表述和实验测定(估计)方法;随机信号通过线性、非线性系统统计特性的变化;以及在通信、电子系统中常见的一些典型随机信号,如白噪声、窄带随机信号、高斯随机过程、马尔可夫过程等。全书是以连续时间随机信号和离散时间随机信号(随机序列)两条线展开讨论的,内容丰富、概念清楚、系统性强、理论联系实际,反映了本学科的一些新进展。书中列举了大量例题和一些有用的 Matlab 分析应用程序举例,每章末附有大量习题供练习,书末给出了部分习题解供参考。

本书可作为理工科高校电子信息类专业高年级本科生教材及研究生参考书,也可供从事通信、电子及其相关专业科技开发的工程技术人员继续教育使用。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

随机信号分析基础(第二版)/王永德等编著.—北京:电子工业出版社,2003.6
高等学校电子信息科学与工程专业教材
ISBN 7-5053-8252-7

Ⅰ.随… Ⅱ.王… Ⅲ.随机信号-信号分析-高等学校-教材 Ⅳ.TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 047756 号

责任编辑:王 颖
印　　刷:北京牛山世兴印刷厂
出版发行:电子工业出版社 http://www.phei.com.cn
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036
经　　销:各地新华书店
开　　本:787×980 1/16 印张:16.25 字数:394.4 千字
版　　次:2003 年 6 月第 2 版 2003 年 6 月第 1 次印刷
印　　数:5000 册 定价:23.00 元

凡购买电子工业出版社的图书,如有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系。
联系电话:(010)68279077

前　　言

本书主要为电子信息类专业本科生、研究生学习随机过程(信号)分析的基本方法而编写的一本教材。但是,本书的核心内容、基本概念和分析方法对于其他需要接触到随机信号统计分析的专业同样是重要的。

《信号与系统》与《随机信号分析基础》是电子信息类专业两门主要的专业基础课。前者主要以分析确定性的信号与系统为主要内容。后者则以分析统计信号以及与系统的相互作用为主要内容。

《随机信号分析基础》一课一般是在大学本科三年级以后开出,在本课之前,所接触的大多数课程都是建立在因果律或说确定性的基础上,因而我们的思维方法也往往是这样的,对具体的函数形式、波形、必然结果感兴趣。初学这门课程时,往往会感到这门学科不可靠、模糊、难懂,为此在讲授时有必要对本课程特点与学习方法做一些介绍。学习、理解掌握这门课程必须从它的特点出发,采用不同的学习方法才能对本门课有较好的把握。归纳起来本门课有以下三个特点:

(1)统计的概念:由于对随机过程(信号)的分析来讲,我们往往不是对一个实验结果(一个实现或一个具体的函数波形)感兴趣,而是关心大量实验结果的某些平均量(统计特性),因而随机过程(信号)的描述方式以及推演方式都应以统计特性为出发点。这样,尽管从个别的现实看不出什么规律性的东西,但从统计的角度却表现出了一定的规律性。这就是统计规律性,是本门学科一个最根本的概述,从一开始就必须加以注意。

(2)模型的概念:本课程重点研究一般化(抽象化)的系统、干扰和信号。因而对它们往往仅给出它们的系统函数(模型)和数学模型,而不讨论具体的系统,更不会局限于一些具体的电路系统上。举出一些具体的电路系统例子也只是用于说明一般的带普遍性的问题和处理方法。

(3)物理概念:本门课是电子信息类学科有关专业的一门专业基础课程,而不是一门数学课。概率论与数理统计、随机过程理论等只是处理本门学科有关问题的一种数学工具,或说是一种解决问题的手段。因而学习本门课程除了注意处理问题的方法外,更重要的是对一些数学推演的结果和结论的物理意义有深入的理解。对一些十分复杂的数学推演中间步骤不要死记硬背,更不必深究其数学的严密性,而重点掌握处理问题的思路与方法。这也是我们将课程命名为随机信号分析基础的原因,尽管在本书中随机信号与随机过程是同义语。

因而在学习方法上,应重点突出抓住上述三个概念,学习时既要理论联系实际,又要学会建立数学模型的抽象思维方法。本门课程虽属基础理论性课程,但要真正掌握上述三个概念,能够应用它解决实际问题,必须演算大量的习题。因而本书选编了大量的习题,除每章指定必

做题以外，其他题也可根据自己的情况加以选做。

另外，利用计算机为工具，对特定随机过程采集的实验数据，或者直接由计算机模拟实际过程产生的数据进行统计分析是研究随机过程的重要方法。因而在本教材第二版中我们也选编了部分基于 Matlab 的典型应用程序和上机操作的习题，相信这些内容对初学者掌握用现代分析手段去理解、分析和研究随机信号是会有所帮助的。

本书第二版仍以连续随机信号和离散随机信号（随机序列）两条线并行的讨论方式，进一步增加了离散随机信号（随机序列）的内容。

由于考虑到某些学生先前未学概率论的相关知识，本书第二版在第 1 章对此给出了概括性的介绍。除了在第一版中有关现代谱估值、高价谱等内容外，在第 4、5 章进一步增添一些与实际应用有关的、近年来发展较快的新内容，如谱相关理论、相干函数用于系统辨识等内容。基于希尔伯特变换的重要性，在第 6 章中我们改用它来分析讨论窄带过程的性质。在第 7 章中补充了与伏特拉级数密切相关的齐次系统和多项式系统的概念，使分析非线性系统的伏特拉级数的引出比较自然。第 8 章中全面改编了马尔科夫过程一节，使其更加贴近通信与信号处理的应用。另外，在第二版中还增添了部分习题并给出了部分习题的参考解答。

在本书第二版的编写过程中，四川大学研究生徐自励在撰写部分习题解中做了大量工作，另外，还得到四川大学电子信息学院从事过本课教学工作的师生的宝贵意见和大力支持，在此一并表示感谢。

由于编者水平有限，难免有不少谬误和疏漏，恳请同行给予批评指正。

本课建议学时为 54～72 学时。

编著者
王永德　王军
2003 年 4 月

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　　录

第 1 章　概率论简介

本章专为未学过概率论或相关课程的读者而设置,它可以作为学习随机信号分析的基础。对于学过概率论的读者,则跳过它,直接进入第 2 章。

1.1　概率的基本概念

概率的概念与我们日常生活中某件事出现的机会,或说几率密切相关。把一个事件(结果)的概率同该事件出现的相对频率联系起来,是直观而易于理解的。例如,假定我们做一个实验(如一个骰子的滚动),可能有 6 种不同的结果 $A_1, A_2, \cdots, A_6$。把实验重复 N 次并记录每一事件出现的次数,分别用 $n_1, n_2, \cdots, n_6$ 表示,则它们出现的相对频率即为 $n_1/N, n_2/N, \cdots, n_6/N$。在 N 趋于无穷大的极限情况下,这些比率就趋近于事件出现的真实概率。即

$$\lim_{N \to \infty} \frac{n_i}{N} = P(A_i), i = 1,2,\cdots,N \tag{1.1.1}$$

因此,概率是在 0 ~ 1 之间并包括 0 和 1 在内的一个数,实际上,这样的概率不可能绝对准确地求得。

实验的全部可能结果的集合记为实验的样本空间。一个事件可以是样本空间的一个元素,也可以是一些可能结果的集合。两种情况中,事件出现或不出现由实验结果确定。我们用括号来表示事件,例如,$\{A\}$ 是样本空间的子集,其元素具有 A 的特性。

对任何事件 $\{A\}$,都存在事件 $\{非 A\}$,记为 $\{\overline{A}\}$ 事件。事件 $\{A 或 \overline{A}\}$ 为全部可能结果的集合(必然事件)。事件 $\{A 与 \overline{A}\}$ 是没有元素的集合(零事件)。事件 $\{A 或 B\}$ 指的是,或者 $\{A\}$ 出现,或者 $\{B\}$ 出现,或者二者同时出现。事件 $\{A 与 B\}$ 指的是 $\{A\}$ 和 $\{B\}$ 同时出现。以掷骰子为例,假设出现偶数点为事件 $\{A\}$,则其元素为 $\{2,4,6\}$,而 $\{B\}$ 则为 $\{1,3,5\}$ 组成。因而上述结论不难理解。相对频率定义的直接结果是,必然事件和零事件的概率各自为 1 和 0。如果事件 $\{A\}$ 和 $\{B\}$ 互不相容(即一个出现了,另一个就不可能出现),则对事件 $\{A\}$ 或 $\{B\}$,我们得到概率 $P(A 或 B) = P(A) + P(B)$。

假定进行两个实验,其可能结果分别记为 $A_i(i = 1,2,\cdots)$ 和 $B_j(j = 1,2,\cdots)$,则定义联合事件为 $\{A_i 和 B_j\}$。像单一事件的情况那样,用一个概率与之对应,把这一联合事件的概率表示为 $P(A_i, B_j)$。如果这些 A_i 和 B_j 是完备的,即不可能有其他的事件,则

$$\begin{cases} \sum\limits_i \sum\limits_j P(A_i, B_j) = 1 \\ \sum\limits_i P(A_i, B_j) = P(B_j), \sum\limits_j P(A_i, B_j) = P(A_i) \end{cases} \tag{1.1.2}$$

1.2 条件概率和统计独立

条件概率所涉及的是一事件在另一事件出现后的知识。在事件$\{A\}$出现后,事件$\{B\}$出现的概率用$P(B|A)$表示,在给定$\{A\}$时$\{B\}$的条件概率定义为

$$P(B|A) = P(A,B)/P(A) \tag{1.2.1}$$

这里假定$P(A) \neq 0$。类似地,在$\{B\}$出现的条件下,$\{A\}$出现的概率为

$$P(A|B) = P(A,B)/P(B), P(B) \neq 0 \tag{1.2.2}$$

如果实验由互不相容且又完备的结果$B_i(i = 1,2,\cdots)$组成,则

$$\sum_i P(B_i|A) = 1$$

如果对于两个事件$\{A\}$和$\{B\}$求得$P(A \mid B) = P(A)$,则由条件概率定义可以导出

$$P(A,B) = P(A)P(B) \tag{1.2.3}$$

还可以得到$P(B \mid A) = P(B)$。上式表明,其中一个事件的出现并未提供另一事件出现概率的任何信息,这样的两个事件称为是统计独立的。

若三个事件$\{A_1\}$、$\{A_2\}$和$\{A_3\}$是统计独立的,则它们必须满足下面的关系:

$$\begin{cases} P(A_1,A_2) = P(A_1)P(A_2) \\ P(A_1,A_3) = P(A_1)P(A_3) \\ P(A_2,A_3) = P(A_2)P(A_3) \\ P(A_1,A_2,A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \end{cases} \tag{1.2.4}$$

若有三个以上事件是独立的,那么一次取二个,三个,四个事件等的概率都必须等于这些单独事件概率的乘积。

1.3 概率分布函数

我们定义随机变量或随机变数为样本空间的实值函数,即实验结果的实值函数。例如掷骰子,出现的点数是随机变量或者随机变数,点数的任意函数也是随机变量。倘若随机变量的取值数目(样本空间)是有限或者可数无穷的①,即称之为离散随机变量,否则是连续随机变量。

假定一个随机变量可以取比如说六个可能值x_i中的任何一个,这里$x_6 > x_5 > x_4 > x_3 > x_2 > x_1$,则相应的概率记为$P(x_i)$或者$P(X = x_i)$,如图1.1所示。这样的例子适合于研究随机变量取值小于或等于某值(比如x_3)的概率,在这种情况下,$P(X \leqslant x_3) = P(x_1) +$

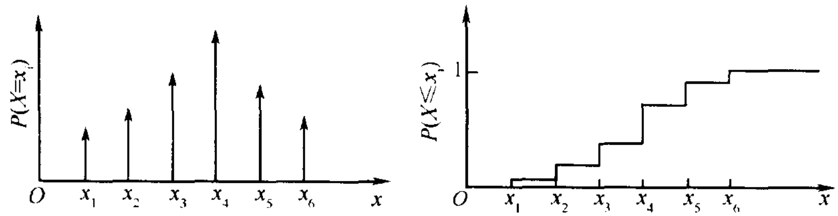
① 若一数集能与正整数集合一一对应关系,则该数集是可数的。

在本书中,一般用大写字母表示随机变量,用相应的小写字母表示样本空间的元素。但是用不同的符号来区分它们有时是很烦琐的,所以在以后各章中,如果文中的说明比较清楚就只用一个符号。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

$P(x_2)+P(x_3)$。用 $P(X\leqslant x)$ 定义 x 的函数称为随机变量 X 的概率分布函数(也叫分布函数或累积分布函数),图 1.1 也给出了前例的累积分布函数。结果 $\{X\leqslant x\}$ 就是通常概率意义上的一个事件,所以累积分布函数必须满足前面所讨论的性质,特别是 $P(X<-\infty)=0$ 和 $P(X<\infty)=1$。同样,X 落在间隔 $x_i<X\leqslant x_j$ 的概率是 $P(X\leqslant x_j)-P(X\leqslant x_i)=P(x_i<X\leqslant x_j)$。通常也把分布函数记为 $F_X(x)$,即有

$$F_X(x)=P(X\leqslant x) \tag{1.3.1}$$



(a) 代表离散概率的冲激函数 (b) 累积分布函数

图 1.1 离散随机变量的概率函数

上面的讨论不难外推到两个随机变量(二元分布)或更多随机变量(多元分布)的情况。对于两个随机变量 X 和 Y(它们可以是连续的,也可以是离散的),下面的公式显然成立:

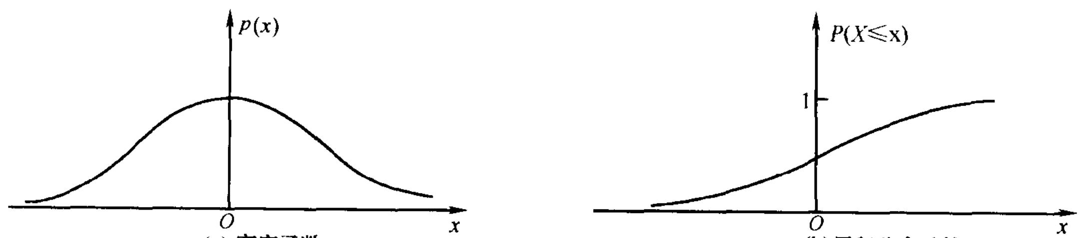
$$\begin{cases} P(X\leqslant-\infty,Y\leqslant y)=0,P(X\leqslant x,Y\leqslant-\infty)=0,P(X\leqslant\infty,Y\leqslant\infty)=1 \\ P(X\leqslant x,Y\leqslant\infty)=P(X\leqslant x),P(X\leqslant\infty,Y\leqslant y)=P(Y\leqslant y) \end{cases} \tag{1.3.2}$$

1.4 连续随机变量

考虑一个随机变量 X,它具有图 1.2 所示的连续累积分布函数,这是连续随机变量的一个例子,这种随机变量取值的数目是不可数的。例如,样本空间可以是整个实数轴。如果累积分布函数的导数存在,定义这个导数为连续随机变量的概率密度函数(或者简称密度函数)。用 $p(x)$ 表示随机变量 x 的概率密度函数,有

$$p(x)=\frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}P(X\leqslant x)}{\mathrm{d}x} \tag{1.4.1}$$

注意,密度函数的定义必须包括它取值范围的说明。



(a) 密度函数 (b)累积分布函数

图 1.2 连续随机变量的概率函数

如果函数 $P(X \leqslant x)$ 是定积分形式，则可以用微积分中莱伯尼兹(Leibnitz)法则来求微分。

若 $g(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(t,x)\mathrm{d}t$，式中 $a(x)$，$b(x)$ 是 x 的可微函数，$f(t,x)$ 和 $\partial f(t,x)/\partial x$ 对 x 和 t 都是连续的，则

$$\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}=\int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\mathrm{d}t + f[b(x),x]\frac{\partial b(x)}{\partial x} - f[a(x),x]\frac{\partial a(x)}{\partial x}$$

因为累积分布函数是非降的，所以 $p(x) \geqslant 0$。图 1.2 为概率密度函数的一个例子。利用狄拉克 δ 函数(冲激函数)，也可以把离散随机变量的概率密度函数定义为累积分布函数的导数。δ 函数在间断点出现，如图 1.1 所示。对于这个例子，密度函数可以表示为

$$p(x)=\sum_{i=1}^{6} P(x)\delta(x-x_i)$$

也可以列成一个表，用所谓分布列的形式表示，见表 1.1。

表 1.1　密度函数的分布列表示方法

状态 x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
概率 $P(X=x_i)$	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	$P(X=x_3)$	$P(X=x_4)$	$P(X=x_5)$	$P(X=x_6)$

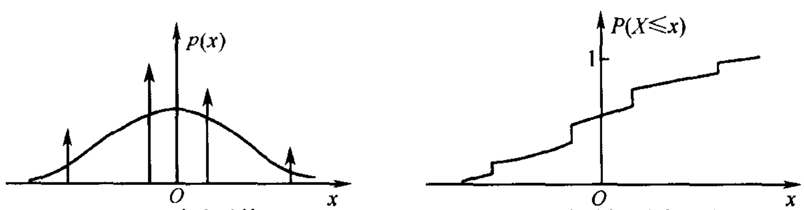
通常，随机变量可以是混合类型的，其累积分布函数由阶跃的间断部分和处处连续的部分组成，这类随机变量的例子如图 1.3 所示。

从概率密度函数定义直接得出

$$P(X \leqslant a)=\int_{-\infty}^{a} p(x)\mathrm{d}x \tag{1.4.2}$$

量 $p(x)\mathrm{d}x$ 可以解释为随机变量落在 x 和 $x+\mathrm{d}x$ 之间的概率。随机变量落在区间 $a \leqslant X < b$ 的概率为

$$P(a < X \leqslant b)=\int_{a}^{b} p(x)\mathrm{d}x \tag{1.4.3}$$



(a) 密度函数　　(b) 累积分布函数

图 1.3　混合随机变量的概率函数

对连续随机变量来说，它落在一个区间的概率随这个区间的减小而趋于零。用 $a+\varepsilon$ 来代替上式中的 b，并让 ε 趋于零，就不难看出这一结果。

对于两个随机变量 X 和 Y，联合概率密度函数记为 $p(x,y)$，定义为

$$p(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} P(X \leqslant x, Y \leqslant y) \tag{1.4.4}$$

由此可得[①]

$$\begin{cases} P(X \leqslant a, Y \leqslant b) = \int_{-\infty}^{b} \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{a} p(x,y) \mathrm{d}x \\ P(X \leqslant a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{a} p(x,y) \mathrm{d}x \\ P(Y \leqslant b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{b} p(x,y) \mathrm{d}y \end{cases} \tag{1.4.5}$$

同理可证

$$p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y) \mathrm{d}y \tag{1.4.6}$$

以及

$$p(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y) \mathrm{d}x \tag{1.4.7}$$

用这种方法引出的概率密度函数有时叫做边缘密度函数，这也就是由高维概率密度函数求低维概率密度函数通用的方法。

给定随机变量 X 后，变量 Y 的条件概率密度函数定义为

$$p(y|x) = p(x,y)/p(x), \qquad p(x) \neq 0 \tag{1.4.8}$$

于是

$$P(Y \leqslant b | x) = \int_{-\infty}^{b} p(y|x) \mathrm{d}y \tag{1.4.9}$$

应解释为给定 $\{X = x\}$ 后，$\{Y \leqslant b\}$ 的概率。条件概率密度函数的定义可以扩展到给定一组随机变量 $\{X_j, j = 1,\cdots,m\}$ 的情况下另一组随机变量 $\{Y_i, i = 1,2,\cdots,n\}$ 的联合概率。这样，

$$p(y_1,\cdots,y_n | x_1,\cdots,x_m) = \frac{p(y_1,\cdots,y_n | x_1,\cdots,x_m)}{p(x_1,\cdots,x_m)} \tag{1.4.10}$$

统计独立的条件同样可以用概率密度函数来表述：对 $x,y,\cdots,z$ 的所有取值，当满足

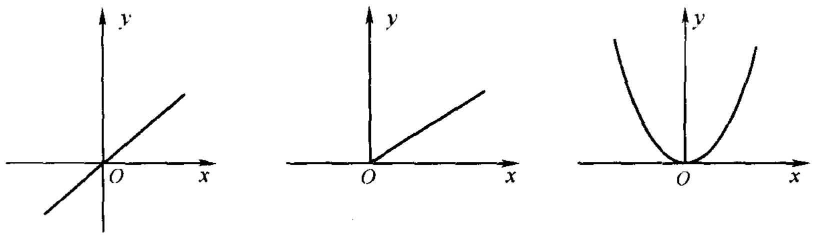
$$p(x,y,\cdots,z) = p(x)p(y),\cdots,p(z) \tag{1.4.11}$$

① 按照普通习惯，用 $p(\cdot)$ 表示 X、Y 各自的概率密度函数，也表示 X、Y 的联合概率密度函数，即使它们有不同的函数形式，但却可用宗量来加以区分。如果这一点在文中不够清楚，则要用脚标来区别不同的函数形式。

而且也只有满足这个条件时,随机变量 $X, Y, \cdots, Z$ 才是统计独立的。

1.5 随机变量的函数

一个或多个随机变量的函数,经常在随机信号分析、检测理论以及同概率论和统计数学有关的其他学科中出现。一个随机变量的函数 $Y = g(X)$ 是这样表述的:观察由实验得到的实数 x,然后完成由 $y = g(x)$ 定义的算术运算。典型例子如图 1.4 所示。这也可以推广到多个随机变量函数的情形。例如 $Y = g(X,Z)$,即可由观察一对实数值 x 和 z 并完成 $y = g(x,z)$ 的函数映射来表述,求和 $y = x + z$ 便是一例。



$y=bx$, $-\infty<x<\infty$ (a) 线性变换

$y=\begin{cases} kx & x\geqslant 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$ (b) 半波整流

$y=x^2$, $-\infty<x<\infty$ (c) 平方律

图 1.4 随机变量的函数

为了说明求随机变量函数统计量的直接方法。考察图 1.4(a) 的情形,这只是一个按比例变化的线性函数 $y = bx$。假定 X 的概率密度函数已知, 求 Y 的密度函数。

由于 $\{Y \leqslant y\}$ 的概率等于 $\{X \leqslant y/b\}$ 的概率,即有 $P_Y(Y \leqslant y) = P_X(X \leqslant y/b)$。由概率密度函数定义直接得到

$$p_Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P_X(X \leqslant y/b)$$

由于分布函数是非降的,所以导数不能为负,应用莱伯尼兹法则可以证明

$$p_Y(y) = \frac{1}{|b|}p_X(x = y/b)$$

式中,$|\cdot|$ 表示绝对值。Y 的取值范围是 X 的取值范围乘以 b。

例 1.1 若上述情况下 X 的密度函数是指数的(换句话说,X 按指数分布),即 $p_X(x) = \mathrm{e}^{-x}(x \geqslant 0)$,则可以直接得出

$$p_Y(y) = \frac{1}{|b|}\mathrm{e}^{-y/b}, \begin{cases} 若\ b > 0, & 则\ y > 0 \\ 若\ b < 0, & 则\ y \leqslant 0 \end{cases}$$

X 的密度函数以及 $b = 2$ 时 Y 的密度函数如图 1.5 所示。

例 1.2 设密度函数 $p_X(x)$ 和前例相同,求 $Y = X + a$ 时 Y 的密度函数。

解:应用直接方法,

$$P_Y(Y \leqslant y) = P_X[X \leqslant (y-a)]$$

因为

$$p_Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P_Y(Y \leqslant y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P_X[X \leqslant (y-a)]$$

所以

$$p_Y(y) = p_X(x = y-a) = \mathrm{e}^{-(y-a)}, y > a$$

图 1.6 表示了这种情况。

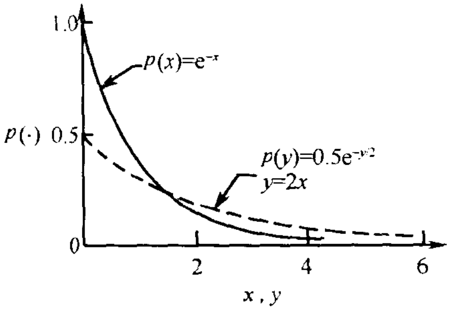


图 1.5　例 1.1 的密度函数

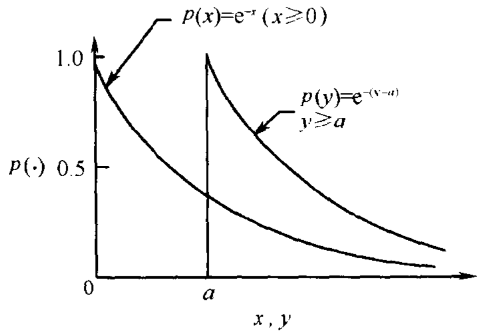


图 1.6　例 1.2 的密度函数

一般情况,若 $y = g(x)$,先假设 $g(x)$ 为单调函数情况,其反函数为 $x = f(y)$,则

$$p_Y(y) = \left|\frac{\mathrm{d}f(y)}{\mathrm{d}y}\right| p_X[x = f(y)] \tag{1.5.1}$$

下面讨论的问题虽然复杂些,但却包含了上述简单情形的同样原理,把一个或多个随机变量变换(或者说映射)成另一组随机变量,则多维随机变量落在样本空间一个给定区域内的概率,与变换后的多维随机变量落在新的样本空间中相应区域内的概率应该相同。

假定有一组随机变量,如 $X_1, X_2, \cdots, X_N$,其联合概率密度函数是已知的,记为 $p_X(x_1, x_2, \cdots, x_N)$,想求一组新的随机变量 $Y_1, Y_2 \cdots Y_N$ 的联合概率密度函数 $p_Y(y_1, y_2, \cdots, y_N)$,$Y$ 同 X 的函数关系为

$$\begin{cases} Y_1 = g_1(X_1, X_2, \cdots, X_N) \\ \vdots \\ Y_N = g_N(X_1, X_2, \cdots, X_N) \end{cases} \tag{1.5.2}$$

例如,对 $N = 2$ 的简单情况

$$Y_1 = X_1 + X_2, \qquad Y_2 = X_1 - X_2$$

暂时假定新变量 Y_i 的个数 N 等于旧变量 X_i 的个数，新随机变量为旧随机变量的单值连续函数，具有处处连续的偏导数，而且旧变量也可以表示为新变量的单值连续(反)函数，即

$$\begin{cases} X_1 = f_1(Y_1, Y_2, \cdots, Y_N) \\ \vdots \\ X_N = f_N(Y_1, Y_2, \cdots, Y_N) \end{cases} \tag{1.5.3}$$

用前面的例子，反函数为

$$X_1 = \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2), X_2 = \frac{1}{2}(Y_1 - Y_2)$$

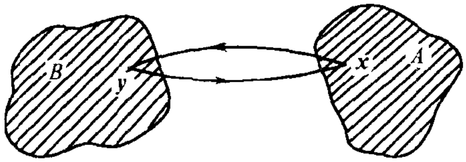


图 1.7　空间 A 一一对应地映射成空间 B 的说明

因此，$X_i(i = 1,2,\cdots,N)$ 样本空间中的每一个点，对应于而且只对应于 $Y_i(i = 1,2,\cdots,N)$ 样本空间的一个点，即旧变量和新变量之间有一一对应的映射关系。

假定一个特殊样点集包含在 X 域的范围 A 内，由于 $\{X_i\}$ 和 $\{Y_i\}$ 之间的函数关系，所以范围 A 映射成 Y 域内的范围 B，正如图 1.7 所示的那样，则样点 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ 落入 A 的概率与样点 $y_1, y_2, \cdots y_N$，落入范围 B 的概率相同。图中 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 分别表示多维变量 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ 和 $y_1, y_2, \cdots, y_N$。所以

$$\underbrace{\int\cdots\int}_{A} p_X(x_1, x_2, \cdots, x_N)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_N = \underbrace{\int\cdots\int}_{B} p_Y(y_1, y_2, \cdots, y_N)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_N \tag{1.5.4}$$

式中，$p_X(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 是 $X_i(i = 1,2,\cdots,N)$ 的联合概率密度函数，是已知的；$p_Y(y_1, y_2, \cdots, y_N)$ 是 Y_i 的联合概率密度函数，是待求的。

在等式左端积分中采用多元函数积分中变换变量的标准方法，得到

$$\begin{aligned} &\underbrace{\int\cdots\int}_{A} p_X(x_1, x_2, \cdots, x_N)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_N \\ &= \underbrace{\int\cdots\int}_{B} p_X\{(x_1 = f_1(y_1, y_2, \cdots, y_N), \cdots, x_N \\ &= f_N(y_1, y_2, \cdots, y_N)\}|J|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_N \end{aligned}$$

式中，$|J|$ 是变换的雅可比(Jacobian)式的绝对值。雅可比式是下列矩阵的行列式，定义为

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com