数 学 分 析
（上 册）
郑宪祖 王仲春 秦 伟
田学正 辛发元 刘夫孔 王利民
陕西科学技术出版社出版
（责任编辑 赵生久）
（西安北大街131号）
陕西省新华书店发行 国营五二三厂印刷
开本850×1168 1/32 印张15.875 字数395,000
1984年11月第1版 1984年11月第1次印刷
印数1—8,200
统一书号：7202·94 定价：3.00元

# 前　言

本书是甘肃省教育厅高教局组织人力编写的，由西北师院郑宪祖教授主编。参加编写的有西北师院王仲春、甘肃教育学院蔡伟、兰州师专田学正、庆阳师专辛发元、天水师专刘夫孔、张掖师专王利民。

本书供师范专科学校数学专业使用，也可作教师进修学院、业余大学、函授大学数学专业的教材和中学数学教师的自修用书。

本书分上、下两册，每册包括教材正文、习题课教材与教学参考两部分。

在编写中尽量注意了教材的科学性和系统性，又根据师专教学的实际，精选内容，着重加强一元函数部分，在叙述上尽量作到深入浅出、通俗易懂、便于自学。

习题课教材与教学参考主要包括各章的“基本原理、方法评注”和“典型例题分析”两部分。评注部分供教师和学有余力的同学参考，典型例题分析可供习题课选用。

本教材的初稿曾在甘肃省几所师专使用过，并根据使用情况作了修改。

本书在编写和出版过程中得到了西北师院、甘肃教育学院、兰州师专、庆阳师专、天水师专、张掖师专和陕西科学技术出版社的大力支持，西北师院丁传松副教授对本教材提出了宝贵的意见，西北师院赵更吉同志也作了部分工作，在此一并表示感谢。

由于我们水平有限，疏漏之处在所难免，恳请读者对本书的缺点错误给予批评指正。

编　者

# 目　录

## 第一篇　分析基础



## 第二篇　一元函数微分学

## 第二篇　一元函数微分学

## 第三篇　一元函数积分学

# 第一篇　分析基础

## 第一章　函数

数学分析是在实数范围内，用极限的方法，研究函数性质的一门课程。

函数不但在数学中处于非常重要的地位，而且在其它自然科学、工程技术、甚至社会科学中都被广泛的应用。因而掌握函数概念对今后的学习是十分重要的。

### §1.1 集　合

为了比较全面、深刻地了解函数概念，本节对集合作一简单的介绍。

#### 一　集合的概念

集合也称作集，它是现代数学中一个最基本的重要概念。它的方法、记号几乎渗透到数学的各个分支。

德国著名数学家、集合论的奠基人康托尔（C•cantor，1845—1918）在提出这个概念时，把“集合”看作我们的感觉或思维中确定的能够互相区分的对象的整体。每一个确定的对象称做这个集合的元素。

例如，某校数学系一年级甲班学生的全体就是一个集合。该班的每一个同学就是这个集合的一个元素。再如，直线$2x+3y-4=0$上所有的点的全体；自然数的全体；$x^2-7x+12=0$所有实根的全体等等都是集合。

由以上几个例子可以看出：集合的元素可以是学生、点或数等等，如果集合中的所有元素都是数，就称为数的集合或数集。

本书中我们常用的全体自然数的集合、全体整数的集合、全体有理数的集合、全体实数的集合分别用$N$、$Z$、$Q$、$R$表示。

由于$x^2+1=0$没有实根，那么$x^2+1=0$所有实根的集合中，没有元素。称这种集合为空集，用$\phi$表示。

某一个班全体女同学，也是一个集合。全体女同学的集合称作该班全体同学的集合的子集。

一般地可以给出如下定义。

**定义1** 设$A$、$B$是两个集合，如果$x\in A\Rightarrow x\in B$，称$A$是$B$的子集，或者说$A$包含在$B$内（也称$B$包含着$A$）。记作$A\subseteq B$。如果至少存在着一个元素$b$，$b\in B$，但$b\notin A$，就说$A$是$B$的真子集，记作$A\subset B$。如$N$是$Q$的真子集，记作$N\subset Q$。

**定义2** 如果$A\subseteq B$，而且$B\subseteq A$，称$A$和$B$是相等的集合，记作$A=B$。

例如方程$x^2-7x+12=0$的根的集合与3、4两个元素构成的集合是相等的集合。

## 二 集合的表示法

**1 列举法** 把集合中的元素，按任何顺序一一列举出来写在花括号内，这种表示集合的方法叫列举法。用列举法表示集合，必须保证集合的元素不重、不漏。

**例1** 由a、$b$、$c$、$d$四个元素组成的集合$A$可表示为$A=\{a、b、c、d\}$或$A=\{a、c、b、d\}$等等。

**例2** 由$x^2-7x+12=0$的根所组成的集合$A$，可表示为$A=\{3，4\}$。

**2 构造式法**

今后，我们说到一个集合 $E$ 时，总是指具有某个共同性质 $P$ 的元素的全体，记为：

$$E=\{x \mid P(x)\}$$

例如用 $A=\{x \mid x^2-7x+12=0\}$ 表示 $x^2-7x+12=0$ 全体根的集合；用 $A=\{x \mid x^2+1=0,\ x\in R\}$ 表示 $x^2+1=0$ 全体实根的集合。

这种表示集合的方法称作构造式法或描述法。

## 三 集合的运算

常用的集合的运算有：并、交、差、补。

**定义 3** 设有集合 $A$, $B$. 如果集合 $M$ 是 $A$ 和 $B$ 的所有元素构成的集合，即

$$M=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\},$$

则称 $M$ 是 $A$, $B$ 的并集或并，记作

$$M=A\cup B.$$

如 $A=\{a, b, c\}$, $B=\{b, c, d\}$,

那么 $A\cup B=\{a, b, c, d\}$.

**定义 4** 设有集合 $A$, $B$. 如果集合 $M$ 是 $A$, $B$ 的所有共同元素构成的集合，即

$$M=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\},$$

就说 $M$ 是 $A$, $B$ 的交集或交，记作

$$M=A\cap B.$$

**定义 5** 设有集合 $A$, $B$. 如果集合 $M$ 是由属于 $B$ 但不属于 $A$ 的所有元素构成的集合，即

$$M=\{x \mid x\in B \text{ 且 } x\notin A\},$$

则称 $M$ 为 $B$ 与 $A$ 的差集或差. 记作

$$M=B\setminus A.$$

如果 $A\subset B$. 也把差集 $B\setminus A$ 称作集合 $A$ 关于集合 $B$ 的补集或余集. (见图1-1)

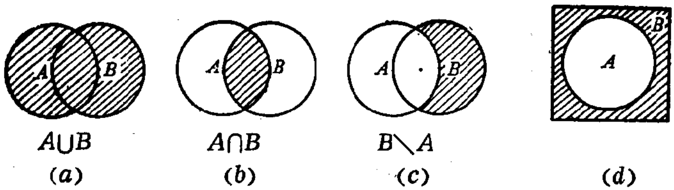


图 1—1

## 习　题

1　设集合 $A=\{a, b, c, d\}$，求出 $A$ 的一切子集。

2　证明　$A\cup B\supseteq A$，$A\cap B\subseteq A$

3　用数学归纳法证明若集合 $A$ 有 $n$ 个元素，则它的所有子集的个数是 $2^n$ 个。

4　证明集合运算满足：

(1) $A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$　（交换律）。

(2) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，$A\cap(B\cap D)=(A\cap B)\cap D$（结合律）。

(3) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$（分配律）。

(4) $T\setminus(A\cap B)=(T\setminus A)\cup(T\setminus B)$；$T\setminus(A\cup B)=(T\setminus A)\cap(T\setminus B)$。

# §1.2　实数集

为了研究函数性质的需要，首先我们讨论实数集的基本性质。

## 一　实数的基本性质

在实数集 $R$ 上定义了加法与乘法两种运算，分别满足以下性质：

**1　对于加法和乘法的运算性质**

(1) 对于加法来说

(i) 结合律成立. 即对任何实数 $x$, $y$, $z$, 都有

$$(x+y)+z=x+(y+z).$$

(ii) 交换律成立。对任何实数 $x$, $y$, 都有

$$x+y=y+x.$$

(iii) $R$ 中存在唯一的数 0, 使得对任何实数 $x$, 都有

$$x+0=x.$$

(iv) 对任何实数 $x$, 存在实数 $(-x)$, 称做 $x$ 的相反数, 使得

$$x+(-x)=0.$$

(2) 对乘法来说

(i) 结合律成立。对任何实数 $x$, $y$, $z$, 都有

$$(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z).$$

(ii) 交换律成立。对任何实数 $x$, $y$, 都有

$$x\cdot y=y\cdot x.$$

(iii) $R$ 中存在唯一的数 1, 使得对任何实数 $x$, 都有

$$x\cdot 1=x.$$

(iv) 对每一个非零实数 $x$, 都存在实数 $x^{-1}$, 称做 $x$ 的倒数, 使得

$$x\cdot x^{-1}=1.$$

(3) 对加法和乘法来说

分配律成立。对任何实数 $x$, $y$, $z$, 都有

$$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z.$$

以上性质说明实数集关于加法和乘法运算构成一个"域"[1], 我们称它为实数域。

## 2 实数集的序（大小）关系

[1]如果在集合 $E$ 中定义了"加法"和"乘法", 并且满足上述性质, 这个集合就称做"域".

实数集 $R$ 对于大小关系（“$<$”）满足下列关系：

(1) 三岐性．对于任意二实数 $x$，$y$，有且仅有下列三种关系之一成立：

$$x<y,\ x=y,\ x>y.$$

(2) 传递性．$x,y,z\in R$，若 $x<y$，$y<z$，就有 $x<z$.

(3) 单调性．$x$，$y\in R$，若 $x<y$，则对任何实数 $z$，总有 $x+z<y+z$.

(4) 乘法单调性．$x$，$y\in R$，若 $x<y$，则对任何正实数 $z$，总有 $xz<yz$[1]

这四条性质说明实数域 $R$ 是个有序域．

**3 实数集 R 具有阿基米德（Archimedes）性质**

对任何两个正实数 $x$，$y$，必存在自然数 $n$，使得

$$nx>y \text{ 或 } \frac{y}{n}<x.$$

这个性质是测量的理论根据，它的证明将在第三章给出．

**4 实数集 R 的连续性**

我们知道，自然数集 $N$ 是有间隔的，即在任何一个自然数 $n$ 和它的后继自然数 $n+1$ 之间，再无任何自然数．在自然数集 $N$ 的基础上建立的有理数集 $Q$ 却是稠密的，即任何两个不同的有理数之间，必有无限多个有理数，但是，有理数集 $Q$ 本身还是有空隙的，就是说有理数集 $Q$ 和数轴上的点不能建立一一对应关系．在有理数集 $Q$ 的基础上建立的实数集 $R$ 则不但稠密，而且无空隙，也就是说，它可以和一条连续不断的数轴上的点建立一一对应关系．所以，我们说实数集 $R$ 是一个连续的系统，简称连续统，或者说，有理数集 $Q$ 不完备，而实数集 $R$ 是完备的．

为了方便起见，今后把“实数 $x$”与“数轴上的点 $P(x)$”

---

[1] 由此可以推证，若 $x<y$，$z<0$，总有 $xz>yz$.

不加区别.

以上简要地讲了实数集 $R$ 的四条基本性质，这四条性质揭示了实数集 $R$ 的本质特征. 它可以概括为一句话：实数集 $R$ 是一个完备的阿基米德有序域.

## 二 绝对值不等式

**定义1** 对任何 $x \in R$，称

$$|x| = \max\{x, -x\}^{[1]}$$

为 $x$ 的绝对值.

请同学们自己验证，这个定义和中学数学中绝对值的定义是等价的.

由这个定义可以直接得到

$\forall^{[2]} x \in R$，有 $x \leqslant |x|$；$-x \leqslant |x|$ 或 $x \geqslant -|x|$，故

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x|.$$

绝对值有以下的性质：

(1) $\forall x \in R$ 都有

$|x| \geqslant 0$；当且仅当 $x = 0$ 时 $|x| = 0$.

(2) $\forall x \in R$，$\forall y \in R$，都有

$|xy| = |x||y|$，特别地，$|-x| = |x|$.

(3) $\forall x \in R$，$\forall y \in R$，都有所谓三角不等式成立：

$|x+y| \leqslant |x| + |y|$.

既然实数集 $R$ 与数轴上的点可以建立一一对应，因此，数轴上任意两点 $x$ 与 $y$ 之间的距离 $d(x,y)$，就可以用对应的坐标 $x$ 与 $y$ 之差的绝对值来表示，即 $d(x,y) = |x-y|$，这样就可以用绝对值来描述直线上的点之间的距离关系.

---

[1] "max" 是拉丁文 "maximum" 的缩写，意思是 "最大的". 如 $\max\{1, -1, 0\} = 1$.

[2] 记号 "$\forall$" 表示 "每一个"，"所有的"，"任意的"，它叫做 "全称量词".

由定义 1 直接可以推出 $d(x,y)$ 的基本性质：

（1）非负性。对任何实数 $x$，$y$，都有

$d(x,y)\geqslant 0$；当且仅当 $x=y$ 时 $d(x,y)=0$。

（2）对称性。对任何实数 $x$，$y$，都有

$d(x,y)=d(y,x)$。

（3）三角不等式。对任何实数 $x$，$y$，$z$，都有

$d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$。

以上三条性质虽然简单，但它们反映了直线上点之间距离的本质属性。在今后的学习中还有更普遍的意义。

## 三　邻域

在点的距离概念的基础上，我们引入邻域的概念。

**定义 2**　设 $x_0\in R$，$\delta\in R^+$（$R^+$表示正实数集），数集 $\{x \mid x\in R$ 且 $|x-x_0|<\delta\}=\{x \mid x\in R,\ x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$ 称为以 $x_0$ 为中心，$\delta$ 为半径的邻域，或称点 $x_0$ 的 $\delta$ 邻域，记作 $U(x_0,\delta)$。

将数集 $\{x \mid x\in R,\ 0<|x-x_0|<\delta\}$，即 $U(x_0,\delta)-\{x_0\}$ 称为以 $x_0$ 为中心，$\delta$ 为半径的空心邻域，记作 $U^0(x_0,\delta)$。

如果不需要指出半径的大小，就把邻域和空心邻域分别记做 $U(x_0)$ 和 $U^0(x_0)$。

邻域是数学分析中的一个重要的概念，它是下面我们建立收敛、极限、连续等概念的基本工具。

## 习　题

1　解下列不等式：

（1）$|2-3x|\leqslant 3$；　　（2）$|3x+2|>2$；

（3）$1\leqslant|4x+5|\leqslant 3$；　　（4）$|x(x-1)|<0.1$；

（5）$\left|\frac{1}{n}\right|<\varepsilon\ (\varepsilon>0)$；　　（6）$\left|\frac{1}{x}\right|>\varepsilon$；

(7) $\left|2^{\sqrt{n}}\right|>E\ (E>0)$； (8) $\ln(\ln n)>E$.

2 证明下列等式：对任意 $x, y, z\in R$，有

(1) $\max\{x,y\}=\dfrac{x+y+|x-y|}{2}$；

(2) $\min\{x,y\}=\dfrac{x+y-|x-y|}{2}$；[1]

并据此来表达 $\max\{x,y,z\}$ 及 $\min\{x,y,z\}$ .

(3) $||x|-|y||\leqslant|x\pm y|$

3 化简

(1) $\left(\dfrac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\dfrac{x-|x|}{2}\right)^2$；

(2) $\sqrt{x^2-2xy+y^2}$；

(3) $\sqrt{x^2-2|x||y|+y^2}$.

4 应用三角不等式证明：

(1) 当 $|x+1|<\dfrac{1}{2}$ 时，$|x-2|<\dfrac{7}{2}$；

(2) 当 $|x-1|\leqslant1$ 时，$|x^2-1|\leqslant3|x-1|$；

(3) 当 $|x-x_0|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 且 $|y-y_0|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 时，$|(x+y)-(x_0+y_0)|<\varepsilon$ .

5 证明贝努利 (Bernoulli) 不等式：

$$(1+x)^n\geqslant1+nx \quad (x>-1),$$

其中 $n$ 是自然数。等式当且仅当 $x=0$ 时成立。

6 当 $|x-x_0|<\min\left(\dfrac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)},\ 1\right)$，$|y-y_0|<\dfrac{\varepsilon}{2(|x_0|+1)}$ 时，证明

$$|xy-x_0y_0|<\varepsilon.$$

## §1.3 关系与函数

本节我们应用集合论的方法叙述函数概念。为此，先引入

[1] "min" 是拉丁文 "minimum" 的缩写，意思是 "最小"，"最小的"。

一个特殊的集合——“关系”.

## 一 关系

### 1 序偶

在坐标平面上的每一个确定的点 $P$，都对应着一个有序数对 $(a,b)$，称作点 $P$ 的坐标. 在这里，我们不仅考虑两个坐标的数值，而且要考虑它们排列的顺序，即当 $a\neq b$ 时，$(a,b)\neq(b,a)$. 这种有序数对，也称作序偶. 一般地可给出以下的定义.

**定义 1** 设 $a$，$b$ 是两个元素，将 $a$，$b$ 按一定的前后顺序排成一个有序的元素组 $(a,b)$，称 $(a,b)$ 为一个序偶.

当 $a\neq b$ 时，$(a,b)$，$(b,a)$ 是两个不同的序偶. 由此可知，对于序偶 $(a_1,b_1)$，$(a_2,b_2)$，当且仅当 $a_1=a_2$，$b_1=b_2$ 时，$(a_1,b_1)$ 和 $(a_2,b_2)$ 才是相等的. 即 $(a_1,b_1)=(a_2,b_2)\Longleftrightarrow a_1=a_2$，$b_1=b_2$.

### 2 笛卡尔直积

**定义 2** 设 $A$ 与 $B$ 是任意两个非空集合，由 $A,B$ 的所有元素组成的一切“序偶”的集合，$\{(x,y)|\ x\in A,\ y\in B\}$，称为 $A$ 与 $B$ 的笛卡尔直积集合简，称笛卡尔直积，记为 $A\times B$.

**例 1** 设 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$，$B=\{b_1,b_2\}$，则

$A\times B=\{(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_1),(a_3,b_2)\}$.

**例 2** 设 $A=R$，$B=\{1\}$，则

$A\times B=\{(x,1)\ |\ x\in R\}$,

$B\times A=\{(1,y)|\ y\in R\}$.

从几何意义可知，这里 $A\times B$ 表示平面上的直线 $y=1$，而 $B\times A$ 表示平面上的直线 $x=1$，由此可见，集的直积不满足交换律，即一般的

$$A \times B \neq B \times A.$$

**例 3** 设 $A=R$，$B=R$，则

$$A \times B = R \times R = R^2 = \{(x,y) \mid x \in R,\ y \in R\}.$$

如果我们在平面上建立了直角坐标系，让 $A$ 对应 $x$ 轴，（即 $A$ 中每个元素和 $x$ 轴上的点一一对应），$B$ 对应 $y$ 轴，那么 $R^2$ 有明显的几何意义，它表示整个平面。

**例 4** 设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{4,5\}$，$C=\{(1,4),(2,5),(1,5),(2,4),(3,4)\}$；$D=\{(1,4),(3,5),(1,5),(1,2)\}$，那么 $A \times B=\{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$。显然 $C \neq A \times B$。因为 $(3,5) \in A \times B$，但 $(3,5) \notin C$。又因 $(1,2) \in D$，但 $(1,2) \notin A \times B$，所以 $D \neq A \times B$。

如果 $A$ 有 $m$ 个元素，$B$ 有 $n$ 个元素则 $A \times B$ 应有 $m \times n$ 个元素。

值得注意的是，$A$，$B$ 不一定是数集，可以是任何元素的集合。

### 3 关系

在客观世界中，存在着形形色色的"关系"。如人与人之间的"师生"关系，"同学"关系；在经济活动中"借方与贷方"关系；生产活动中"产品成本与价格"的关系；数的"大于"、"小于"、"等于"关系，点与集合的"属于"关系，集合与集合的包含关系等等。

数学本身就是研究数量关系与空间形式的科学，因此"关系"是数学中又一重要的基本概念。

为了给出"关系"一个精确的定义，先看两个例子。

**例 5** 已知集合 $A=\{2,4,5\}$，那么

$$M=A^2=\{(2,4),(2,5),(4,5),(4,2),(5,2),(5,4),(2,2),(4,4),(5,5)\}$$

我们观察 $M$ 的三个子集：

$$M_1=\{(2,4),(2,5),(4,5)\},$$