

代数与几何

上册



上海人民出版社

代 数 与 几 何

上 册



上海人民出版社

内 容 提 要

本书是上海师范大学数学系为工农兵学员编写的教材,试图在体系上进行改革。

全书共十章。上册五章:实数和点,三角函数,二元一次方程和直线,三元一次方程和平面,二次方程、二次曲线和二次曲面。下册五章:几种常用曲线,基本函数,概率初步,复数,变换。

本书可供理工科大学工农兵学员、中学数学教师参考。

目 录

前 言

第一章 实数和点	1
第一节 数与度量	1
一、整数、分数、无理数(1) 二、记数法(3)	
第二节 数与有向线段	4
一、有向线段、正负数(4) 二、数轴、实数集(5) 三、数的大小比较(7)	
第三节 数的运算	8
一、加法(8) 二、减法(9) 三、乘法(11) 四、除法(13)	
五、乘方和开方(14) 六、不可公度线段与无理数(20)	
第四节 式的运算	22
一、整式(22) 二、分式(30) 三、根式(33)	
第五节 数对与平面上的向量	39
一、向量的概念(39) 二、向量的加法和减法(40) 三、向量的分解、直角坐标系(42)	
四、平面上两点间的距离(44)	
第二章 三角函数	46
第一节 变量与函数	46
一、常量和变量(46) 二、函数概念(46)	
第二节 三角函数	51
一、角的概念和度量(51) 二、三角函数的概念(53) 三、任意角三角函数值的求法(60)	
四、复角的三角函数(63)	
第三节 解三角形	73
一、解直角三角形(73) 二、解斜三角形(77)	
第四节 测量	90
一、小平板仪测量(90) 二、水准测量(99)	

第三章 二元一次方程和直线107

第一节 一元一次方程107

- 一、方程的概念(107) 二、一元一次方程的解法(108) 三、可
化为一元一次方程的分式方程(111) 四、定比分点公式(113)

第二节 直线的方程119

- 一、二元一次方程(119) 二、直线的一般式方程(120) 三、直
线的法线式方程(125) 四、直线的参数方程(133)

第三节 二元一次方程组137

- 一、二元一次方程组的概念(137) 二、二元一次方程组的解法
(138) 三、平面上两条直线的位置关系(143) 四、直线型经
验公式(147)

第四节 直线束152

- 一、三直线共点的条件(152) 二、三阶行列式的概念(152)
三、三阶行列式的性质(153) 四、直线束(161)

第五节 一次不等式165

- 一、不等式的概念(165) 二、一元一次不等式(166) 三、一
元一次不等式组(167) 四、二元一次不等式(172) 五、二元
一次不等式组(175)

第六节 变换和矩阵181

- 一、坐标变换(181) 二、线性变换(189) 三、矩阵(190)

第四章 三元一次方程和平面197

第一节 空间直角坐标系和空间向量197

- 一、空间直角坐标系(197) 二、向量的坐标(200)

第二节 空间向量的运算205

- 一、向量的和、数与向量的积(205) 二、向量的分解(207)
三、两个向量的数量积(210) 四、两个向量的向量积(213)
五、三个向量的混合积(217)

第三节 平面的方程220

- 一、平面位置的确定(220) 二、平面的一般式方程(221)
三、平面的法线式方程(225) 四、两个平面的位置关系(227)

第四节 空间直线的方程234

- 一、空间直线的方程(234) 二、空间直线与平面的位置关系(238)

三、空间两直线的位置关系 (240)	
第五节 三元一次方程组	246
一、三元一次方程组的概念 (246)	
二、三元一次方程组的解法 (247)	
三、三元一次方程组解的几何意义及平面束方程 (257)	
第六节 课题讨论: 有关铣刀端齿加工计算	262
第五章 二次方程、二次曲线和二次曲面	271
第一节 二次函数	271
一、二次函数的概念 (271)	
二、二次函数的图象 (271)	
第二节 一元二次方程	278
一、一元二次方程的概念 (278)	
二、一元二次方程的解法 (279)	
三、一元二次方程根的判别式 (286)	
四、可化为一元二次方程来解的方程 (287)	
第三节 一元二次不等式	292
第四节 二次曲线	297
一、圆 (298)	
二、椭圆 (304)	
三、双曲线 (314)	
四、抛物线 (322)	
五、圆锥曲线的内在联系 (328)	
第五节 二元二次方程的图形	334
一、 $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ 型方程的化简 (334)	
二、 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ 型方程的化简 (336)	
三、一般二元二次方程的讨论 (338)	
四、圆锥曲线的切线 (345)	
第六节 二元二次方程组	352
一、由一个二元一次方程和一个二元二次方程所组成的方程组 (353)	
二、由两个二元二次方程所组成的方程组 (357)	
第七节 二次曲面及其标准方程	362
一、椭球面 (362)	
二、单叶双曲面 (366)	
三、双叶双曲面 (369)	
四、椭圆抛物面 (371)	
五、双曲抛物面 (373)	
六、二次锥面 (375)	
七、二次柱面 (376)	

第一章 实数和点

第一节 数与度量

一、整数、分数、无理数

恩格斯指出：“和其他一切科学一样，数学是从人的需要中产生的：是从丈量土地和测量容积，从计算时间和制造器皿产生的。”

在生产斗争和科学实验中，经常需要度量各种各样的量，例如长度、面积、体积、重量等等。在度量的实践过程中，产生和扩展了数的概念。现在我们就从度量线段的长度来阐明它。

给定两线段 AB 和 CD ，如果取 AB 为一个单位，以此来量 CD ，分别出现下面几种情况：

1. 量了 m 次，恰好量尽而无余，就得一个整数 m (图 1-1)。

2. 量了若干次，还有一段小于 AB 的线段剩余。再把单位 AB 分成 n 个相等部分，每一部分叫做一个部分单位。用这个部

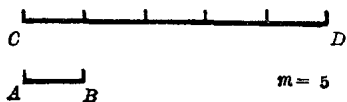


图 1-1

分单位去量 CD ，量了 m 次，恰好量尽而无余，这样就得到一个分子分母都是整数的分数 $\frac{m}{n}$ 。如果用这样的部分单位去量，还是量不尽，改换部分单位再量，量尽了，同样可以得到一个分数。 m 大于 n 或小于 n 视 CD 比 AB 长或短而定(图 1-2)。

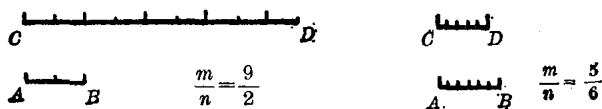


图 1-2

通过线段的度量, 就可以得到不同的分数如 $\frac{9}{2}, \frac{5}{6}, \dots$. 以分母去除分子, 就分别化为有限十进小数 4.5, 循环十进小数 $0.8\dot{3}$, $\dots$.

反过来, 每一个有限十进小数和循环十进小数, 都可以化为分数. 例如:

$$\begin{aligned} 4.5 &= \frac{45}{10} = \frac{9}{2}; \\ 0.8\dot{3} &= \frac{90 \times 0.8\dot{3}}{90} = \frac{(100-10) \times 0.8\dot{3}}{90} \\ &= \frac{(83.3333\dots) - (8.3333\dots)}{90} = \frac{75}{90} = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

前面的两种情况是以 AB 去度量 CD , CD 被 AB 量尽或者 CD 被 AB 的部分单位所量尽. 我们说, 线段 AB 和线段 CD 是可公度的. 得到的整数和分数都叫做有理数.

3. 如果 AB 的任何部分单位永远不能量尽 CD , 我们说, 线段 AB 和 CD 是不可公度的. 度量的结果就不能用有理数来表示. 这样就需要一种新的数. 它既不是有限十进小数, 也不是循环十进小数, 所以只能是无限不循环小数, 称为无理数.

用线段 AB 度量线段 CD 所得到的数 k (有理数或无理数), 叫做线段 CD 和线段 AB 的比, 记作 $\frac{CD}{AB} = k$, 如果以 AB 为单位, CD 的长度为 k , 就记作 $CD = k$.

人们在长期实践中, 经过科学的抽象, 把数理解为某个量 (如长度、面积、体积、重量等) 对另一个被取作单位的量的比.

值得注意的是, 在实际度量时, 无论所用的仪器多么精密, 方法多么完善, 我们只能量出线段长度的近似值, 它们总是用一个有限十进小数来表示的. 例如在工厂里, 工人老师傅最常用的量具之一游标卡尺, 可以测量工件的长度、宽度、内径、外径、孔距等. 但亦只能度量到一定的精确度.

不可公度的量，要用无限不循环小数来表示。但是这样的小数不可能完整无缺地记录下来，所以往往用有理数来表示它们的近似值。

二、记 数 法

我们通常所用的数是十进位制的。这是来源于人们用两手的十个手指来计数的实践。所谓十进位制是以位置值和逢十进位为基础的。一个数码在不同的位置上所表示的值叫做这个数码的位置值，这里用的“十”叫做进位制的基数。例如 213 和 321 同样是三个数码 1, 2, 3 记的一个数，由于数字所在的位置不同，它所表示的值也不同。例如 2 在第一个数里是“二百”，而在第二个数里是“二十”，即

$$213 = 200 + 10 + 3 = 2 \times 10^2 + 1 \times 10 + 3;$$

$$321 = 300 + 20 + 1 = 3 \times 10^2 + 2 \times 10 + 1.$$

十进位制记数法只要十个符号(数码) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 就可以记任何一个数。

在电子计算机里，经常采用二进位制。它以“二”为进位制的基数，只用两个数码 0 和 1，就可以记任何一个数。二进位制是逢二进一的，记下来的数都出现 10, 101, 110, 10101 等等形式。但是这样的数在十进位制里也可能出现，因此，必要时用括号并加注进位基数，以示区别。例如 101 在十进位制里记作 $(101)_{10}$ ，而在二进位制里记作 $(101)_2$ 。实际上

$$(101)_2 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1 = (5)_{10}.$$

由此可见，同样一个数“五”，在十进位制里用一个数码“5”表示，而在二进位制里要用三个数码 1, 0, 1 来记。一般地说，基数小的进位制需要的数码少，但是写出来的数的位数就多；基数大的进位制需要的数码多，写出来的数的位数就少。在实际应用中，应根据不同的需要，采用不同的进位制。

电子计算机由电路的状态来反映数。任何电路只有通与断两种情况。我们以 1 表示通, 以 0 表示断, 这样采用二进位制就显得非常方便了。

习 题

1. 怎样把一个给定的线段(1)四等分? (2)五等分?

2. 把下列分数化为十进小数:

(1) $\frac{1}{5}$; (2) $\frac{1}{2}$; (3) $\frac{1}{20}$; (4) $\frac{1}{3}$; (5) $\frac{1}{6}$; (6) $\frac{1}{7}$.

3. 把下列小数化为分数:

(1) 0.65; (2) 0.618; (3) $0.\dot{3}$; (4) $0.2\dot{6}$; (5) $0.\dot{3}1\dot{6}$.

4. 给定一个角为单位, 用它来度量角, 可以出现几种情况?

第二节 数与有向线段

一、有向线段、正负数

列宁说:“自然界的(也包括精神的和社会的)一切现象和过程具有矛盾着的、相互排斥的、对立的倾向。”在现实世界中, 温度的上升与下降, 牛头刨床刀具的前进与后退, 金属的膨胀与收缩等等, 这些都是具有相反意义相互对立的趋向的表现。但是在第一节里所讲的数, 只能表达它们中的一面, 而不能反映它们相互对立的一面。实践告诉我们, 只用这些数, 不足以反映客观现实, 还得要用新的数。

这类具有相反意义的量, 都可以用规定了起点和终点的有向



图 1-3

线段来表示。我们把以 A 为起点, B 为终点的有向线段用 AB 表示(图 1-3)。

那么 BA 就是与 AB 等长而反向的线段。要正确反映有向线段 AB , 必须既要说明 AB

的长度, 又要指明 AB 的方向。我们常用 $|AB|$ 表示 AB 的长度。

它可以用一个第一节里所讲过的数来表示, 记作

$$|AB| = k \text{ (有理数或无理数).}$$

因为 AB 与 BA 是等长的, 所以

$$|AB| = |BA| = k.$$

但是它们的方向是相反的, 所以不能说 $AB = BA$. 我们常用正与负来区别相反的意义. 如果我们规定 AB 的方向为正, 那么 BA 的方向必然为负. 我们可以在数 k 前加一个“+”(正)号来表示 AB 的值, 即 $AB = +k$; 在数 k 前加一个“-”(负)号来表示 BA 的值, 即 $BA = -k$. 带有“+”号的数(如 $+k$)叫做正数, 带有“-”号的数(如 $-k$)叫做负数. $+k$ 与 $-k$ 互称为相反数. 为了简便起见, 通常正数前面的“+”号可以省略不写(即 $+k$ 简写为 k).

从这里可以看到:“矛盾着的各方面, 不能孤立地存在.” 正数与负数是一对矛盾. 没有正, 也无所谓负, 相反地, 没有负, 也无所谓正.

根据上面的讨论, 就有:

(a) 从 $AB = k$ 和 $BA = -k$, 可以得到 $BA = -AB$.

(b) 从 $|AB| = |BA| = k$, 可以得到 $|k| = |-k| = k$.

我们常称 $|a|$ 为 a 的绝对值. 关于绝对值, 我们有:

(a) 正数的绝对值就是这个数本身;

(b) 负数的绝对值是和它相反的数.

二、数轴、实数集

形和数是刻划同一事物的两个侧面. 一个数常可以用直线上的点来表示.

画一条直线, 选定一个方向为这直线的正方向(在水平直线上, 一般取从左到右为正方向), 并用箭头表示. 在这直线上任取一个定点, 叫做原点, 表示数 0, 再任取一个适当的单位长度. 这样

规定了方向, 原点和单位长度的直线叫做数轴.

如图 1-4, 在数轴上, 以原点为起点沿着轴的正向(负向), 作任意一条有向线段 $OP(OP')$, 它的长度为 k , 它的方向是正(负)的, 就有一个确定的正(负)数 $+k(-k)$ 和它对应. 把这个数记在 $OP(OP')$ 的终点 $P(P')$ 上. 这个数 $+k(-k)$ 叫做点 $P(P')$ 在轴上的坐标. 一个坐标为 a 的点 P 常用符号 $P(a)$ 来表示.

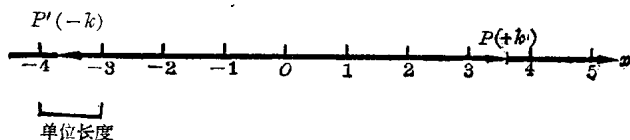


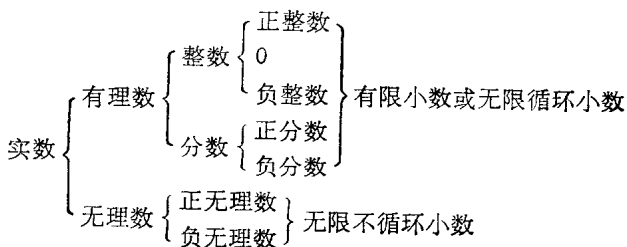
图 1-4

数 0 既不是正又不是负, 是唯一的中性数. 零是具有确定内容的, 例如摄氏 0° , 并不是表示没有温度, 而是表示在通常情况下水结成冰的一个确定的温度. 从数轴上我们可以知道, 零是一个特定的点, 它是所有数轴上的点所依存、与之有关并由之决定的一点. 它一经选定, 始终是全部运算的中心点. 为了讲法上一致起见, 我们规定:

0 的绝对值是 0, 0 的相反数是 0.

这样, 在数轴上每一点都有唯一的数与它对应; 反过来, 对每一个数在数轴上总有唯一的点与它对应. 这就是说, 数轴上的点与数具有一一对应的关系.

有理数和无理数的全体叫做实数集, 现在我们归纳列表如下:



数轴上点的全体叫做数轴上的点集。由上可知，数轴上的点集与实数集之间具有一一对应的关系。今后在本章中所讲的数都是指实数而言。

三、数的大小比较

从数轴上观察，一点 P 从原点逐渐向右移动，所得到的有向线段逐渐伸长，我们说点 P 所表示的数就由小到大。把这个法则推广到整个数轴上去：数轴上任意两点 P 与 P' ，如果 P 在 P' 的右侧，点 P 所表示的数大于点 P' 所表示的数（或 P' 在 P 的左侧，点 P' 所表示的数小于点 P 所表示的数）。由此得出：

正数大于 0，也大于一切负数；

负数小于 0，也小于一切正数；

两个负数，绝对值大的数较小，绝对值小的数较大。

我们常用符号“ $>$ ”表示“大于”，符号“ $<$ ”表示“小于”，例如：

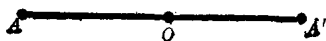
$$4 > 0, -4 < 0, 4 > -4, -4 < 4.$$

现在我们可以用式子来表示数 a 的绝对值的意义：

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0); \\ -a & (a < 0). \end{cases}$$

习 题

1. 举一些要用正负数来表示的量。
2. 在线段 AO 的延长线上，从 O 起截取线段 $OA' = OA$ ，这样决定的点 A' 称为点 A 关于点 O 的对称点。这样从点 A 变换到它的对称点 A' ，叫做关于点 O 的对称变换。



(第 2 题)

在坐标轴上，作下列各点关于原点对称的点：

$$P(2), P(-3), P(0), P\left(-\frac{1}{2}\right), P\left(\frac{1}{4}\right).$$

3. 旋转是这样一种运动：被运动的图形上每一点，绕一个称为旋转中心的定点，沿一定方向转动一个角度。这个角度叫做转幅。



(第3题)

在平面上关于一点的对称变换，能不能用一个旋转变换来代替？

第三节 数的运算

一、加法

两个数 a 和 b ，可以用两个有向线段来表示(规定自左到右为正向)，它们的长度是 $|a|$ 和 $|b|$ ，它们的方向是相同或相反，视数 a 和 b 是同号或异号而定。那么 $a+b$ 就有如图 1-5 中的四种情况：

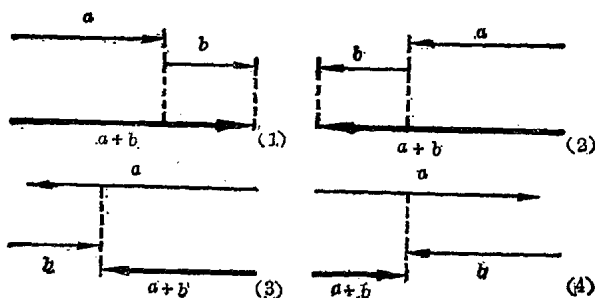


图 1-5

和 $a+b$ 刻画了一个位移，就是一点沿着 a 的方向移一段距离 $|a|$ ，再沿着 b 的方向移一段距离 $|b|$ 的结果。因此表示 $a+b$ 的有向线段是以点移动的起点到终点的线段。

考察图 1-5 中的(1)，(2)，容易看出，同号两数相加，和的符号与加数的符号相同，和的绝对值等于加数的绝对值的和。

考察图 1-5 中的(3)，(4)，容易看出，异号两数相加，和的符号

与绝对值较大的加数符号相同, 和的绝对值等于加数绝对值的差.

$$\text{显然} \quad a + (-a) = (-a) + a = 0,$$

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

在直线上任取三点 A, B 和 C , 依这三点的位置的关系而论, 共有如图 1-6 中的六种情况:

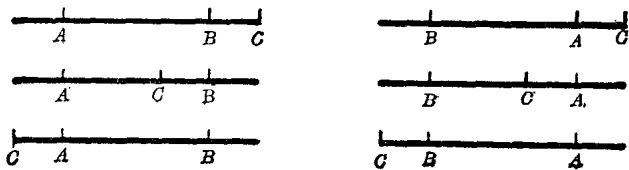


图 1-6

但是根据有向线段的加法, 都有

$$AB + BC = AC.$$

在数轴上, 一点 $P(a)$ 移动一段距离 $|b|$ 的位移, 向左还是向右, 视 b 为正数还是负数而定. 又, 假使 $P_1(a)$ 在 $P_2(a')$ 的右边, 那么 $P'_1(a+x)$ 仍在 $P'_2(a'+x)$ 的右边, 这里 x 是任意一个数. 就是

(a) 当 b 是正数时, $a+b > a$; 当 b 是负数时, $a+b < a$.

(b) 当 $a > a'$ 时, 就有 $a+x > a'+x$.

显然, 当 $a = a'$ 时, $a+x = a'+x$.

二、减 法

从一个数 a 减去一个数 b , 就是求一个数 x , 使 $b+x=a$, 记作

$$x = a - b.$$

如图 1-7, 以起点相同的两个有向线段来表示 a 和 b , 从有向线段的加法来看, $b+x=a$. 将 b 反向得 $-b$, 再从加法来看, 就有 $(-b)+a=x$.

$$\therefore a - b = x = a + (-b).$$

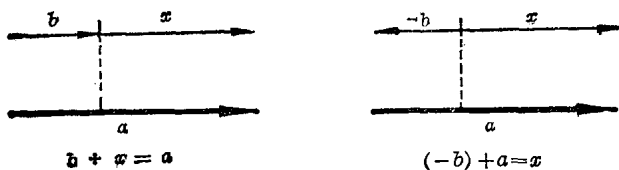


图 1-7

就是，减去一个数，等于加上这个数的相反数。

$a - b = a + (-b)$ 这个式子从左边到右边，就是减法向加法转化。反之，从右到左，就是加法向减法转化。加法和减法辩证地统一起来了。例如，下列正、负数的和：

$$(+4) + (-5) + (+9) + (-3)$$

可以简记为 $4 - 5 + 9 - 3$ 。

一般地说，正数、负数与零的和叫做代数和。

应用有向线段的加法 $AB + BC = AC$ ，与加减法的互化 $a + (-b) = a - b$ ，就可以用一个数来表示数轴上任一有向线段。



图 1-8

如图 1-8，在数轴上任取一条有向线段 P_1P_2 。设 P_1 的坐标是 x_1 ， P_2 的坐标是 x_2 ，那么

$$P_1P_2 = P_1O + OP_2 = -OP_1 + OP_2 = (-x_1) + x_2 = x_2 - x_1.$$

例如， $x_1 = 2$ ， $x_2 = 5$ ； $x_2 - x_1 = 3$ ，所以 P_1P_2 与轴的方向相同，而 $|P_1P_2| = 3$ 。

$x_1 = 3$ ， $x_2 = -4$ ； $x_2 - x_1 = -7$ ，所以 P_1P_2 与轴的方向相反，而 $|P_1P_2| = 7$ 。

这就是说，数轴上任意一条有向线段的数量，等于它的终点的坐标减去起点坐标所得的差。

三、乘 法

某水池进行放水,现在水位在水位线 0 处(图 1-9),已知水位每小时下降 2 厘米. 那么 3 小时以后, 水位应在 -6 厘米处, 3 小时以前, 水位应在 +6 厘米处. 规定上升为正, 下降为负. 列成算式就是:

$$(-2) \times (+3) = -6,$$

$$(-2) \times (-3) = +6.$$

如果水池进水, 水位每小时上升 2 厘米, 那么 3 小时以后和以前分别有:

$$(+2) \times (+3) = +6,$$

$$(+2) \times (-3) = -6.$$

如果水位不变, 既不上升又不下降, 那么水位仍在水位线 0 处,

$$0 \times (+3) = 0, \quad 0 \times (-3) = 0.$$

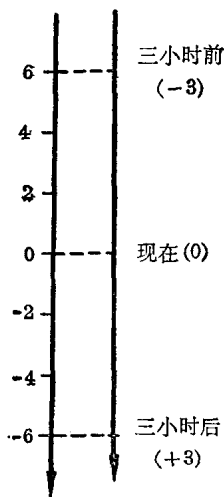


图 1-9

考察上面的结果可以知道, 两数相乘, 积的绝对值等于这两个数的绝对值的积, 两数同号时积取正号, 两数异号时积取负号. 零与任何数相乘, 积为零.

反映到数轴上, ab 之积就刻画了一个伸长或缩短的变形. 数轴上每一个数 a 乘一个正数 b , 就是把数轴上对应于 a 的有向线段伸长或缩短到原来的 $|b|$ 倍, 视 $|b| > 1$ 或 $|b| < 1$ 而定, 如图 1-10 和图 1-11 所示.

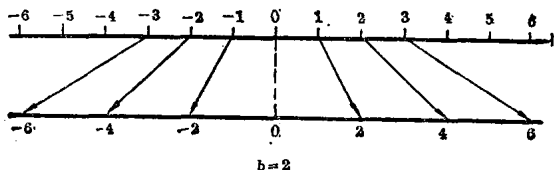


图 1-10