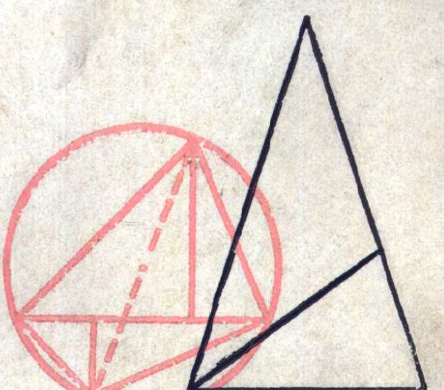
几何解题与思路分析

兰纪正　朱恩宽　编
魏　庚　人　校



陕西科学技术出版社

几何解题与思路分析

兰纪正　朱恩宽　编

魏庚人　校

陕 西 科 学 技 术 出 版 社

几何解题与思路分析

兰纪正　朱恩宽编

魏庚人　校

陕西科学技术出版社出版

（西安北大街131号）

陕西省新华书店发行　　陕西省印刷厂印刷

•

787×1092毫米　1/32　印张 17.5　字数　373,000字

1982年12月第1版　　1982年12月第1次印刷

印数1—21,000

书号：7202·23　　定价：1.50元

前　言

为适应目前中学数学教学的需要，根据新编中学数学教学大纲，结合初等几何的特点，便于读者掌握几何基本知识，提高证明、解题的基本技能，我们编写了这本书。本书按问题的不同类型加以选编，内容包括证明题、计算题、轨迹与作图，尽量做到深入浅出，系统、完整。

在解题过程中，许多问题我们加了分析，便于找出证明或解题的思路和方法，帮助读者掌握同一类型问题的解题规律，提高分析问题和解决问题的能力，巩固几何基本知识。对个别难度较大的问题，我们还加了*。

魏庚人教授对本书作了审查，并提出了许多宝贵意见；林光歆等三同志为本书绘制了全部插图，在此一并表示感谢。

由于我们水平有限，经验不足，错误和不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

一九八〇年五月

于陕西师范大学

目　录

平面几何

立体几何

平　面　几　何

第一章　基本知识

本章内容包括全等三角形，线段、角的相等与不等，线段的垂直与平行，共点线与共线点．这些对以后几个单元来说，都是基本的知识．本章结合各类问题叙述了解题方法，这些方法不但适用于解决本章的问题，也适用于解决以后各章的问题．

一　证题法例举

几何证题的方法，一般可分为直接证法与间接证法．间接证法又包括反证法与同一法．

如果要证明一个命题，就得把公理、在此之前的定理以及本命题的题设一起作为根据，推出题断，这种证明方法叫做直接证法．

如果要证明一个命题，应用直接证法有困难，可用另外一种证法．首先假设题断不真，把否定题断作为已知条件；另外，将公理、以前的定理以及本命题的题设，一起作为根据进行逻辑推导，如果推导出的结果与某公理、或某定理、或本题题设相矛盾，就说明假设题断不真，是不对的，从而题断成立．这种方法叫做反证法（在逻辑上是用逆否命题代替

了原命题，二者是等价命题．同真、同伪．）．

最后一种证明方法叫同一法，先根据题断作出要求的图形，然后，证明这个图形就是在题设条件之下的图形．

现在，对这三种证题方法分别举例说明．

例1 求证 由三角形任意一顶点到垂心的距离，等于外心到此顶点对边距离的二倍（图1—1）．

分析 设H为△ABC的垂心，AH、CH、BH是各顶点和垂心的连线．点O为外心，L为BC的中点．需要证明 $\frac{1}{2}AH=OL$，假若结论成立，则OL一定等于以AH为底的△ACH的边AC、HC中点的连线．

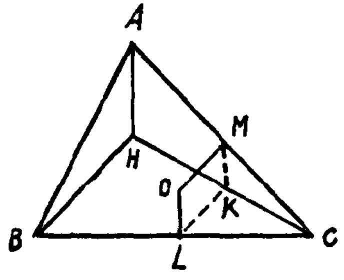


图1—1

证明 （直接证法）

设 AC、HC的中点分别为M、K，则MK∥AH，且

$MK=\frac{1}{2}AH.$

又∵ AH∥OL，

故 MK∥OL，

但 BH∥OM∥LK（∵ BH、OM都垂直AC），

故 OLKM为平行四边形，

∴ $OL=MK=\frac{1}{2}AH.$

例2 若四边形中有一双对边中点的连线等于另一双对边的半和，则这双对边必互相平行（图1—2）．

证明 在四边形ABCD中，E、F分别是AD、BC的中

点，$EF=\frac{1}{2}(AB+DC)$．要求证$AB\parallel DC$。

我们用反证法。

假设AB不平行于DC，连接AC，设G为AC之中点，连接EG、GF，则$EG\parallel DC$，$GF\parallel AB$，从而E、G、F不能在一直线上。

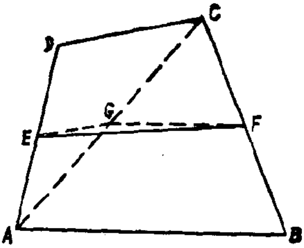


图1—2

故　$EF<EG+GF$，

但　$EG=\frac{1}{2}DC$，$GF=\frac{1}{2}AB$，

故　$EF<\frac{1}{2}(AB+DC)$，

此式与已知条件矛盾，

故　$AB\parallel DC$。

例3　四边形PQRS的边PQ、QR、RS、SP各有一点为A、B、C、D，已知ABCD是平行四边形，而且它的对角线和PQRS的对角线（共四条）都交于一点O，试证PQRS也是平行四边形（图1—3）．

证明　（反证法）假设PQRS不是平行四边形，它的对角线就不能互相平分，即OP、OR及OQ、OS两对线段中至少有一对不相等．设$OP<OR$，$OQ\leqslant OS$。

在线段OR、OS上分别取$OR'=OP$，$OS'=OQ$．则$R'S'$与OC的交点C'就要落在△ORS的内部，所以$OC'<OC$，但可证$OC'=OA$，故$OA<OC$。

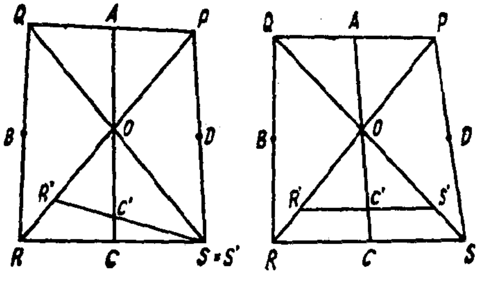


图1—3

但ABCD是平行四边形，AC应当被点O平分，故OA=OC。这样，OA<OC与OA=OC矛盾，说明PR、QS必须互相平分，即PQRS一定是平行四边形。

例4 以正方形一边为底向形内作一等腰三角形，若它的底角等于15°，则将它的顶与正方形另两个顶点连接时，必构成一个正三角形（图1—4）。

证明 （同一法）E是正方形ABCD内部一点，∠ECD = ∠EDC = 15°.求证△EAB是正三角形。

以AB为边向正方形ABCD内作一正三角形E′AB，连接E′C、E′D。

可证得△BCE′是等腰三角形，它的顶角∠CBE′= 90° - 60° = 30°，底角∠BCE′ $= 90° - \frac{1}{2}$∠CBE′ = 75°。

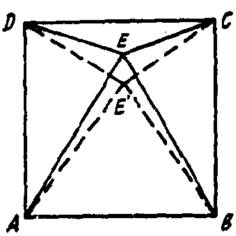


图1—4

故 ∠E′CD = 90° - 75° = 15°，

同理可证 ∠E′DC = 15°。

由上式可见E′与E是同一点，故△EAB是正三角形。

以上，我们举了四个例子，用以说明直接证法与间接

证法的具体应用，想要熟练的运用这些证法，必须多作练习题。

二　线段的相等及其和、差、倍、分

1　求证 由等腰三角形顶点向两底角的平分线所作的垂线相等（图1—5）。

证明　设BD、CE分别为∠B、∠C的平分线，且AP⊥CE，AQ⊥BD。求证AP＝AQ。

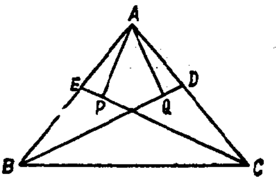


图1—5

∵　∠B＝∠C，

故∠ABQ＝∠ACP，

且　∠APC＝∠AQB＝90°（已知），

　　AB＝AC（已知），

故　△ABQ≅△ACP，

∴　AP＝AQ。

2　在直角三角形ABC中，直角C的平分线CD和斜边AB的中垂线MD相交于点D，求证MD＝MA（图1—6）。

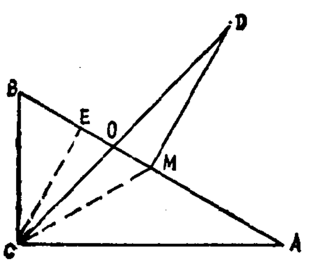


图1—6

分析　在△ABC中，∠C＝90°，连接CM，则CM＝MA（点M为AB的中点），从而将MD＝MA转化成证明CM＝MD，或者证明△CDM为等腰三角形。

证明　作CE⊥AB，

则　∠BCE＋∠CBE＝90°，

且 $\angle A+\angle CBE=90^\circ$,

$\therefore$ $\angle BCE=\angle A=\angle ACM$.

但CD为$\angle ACB$的平分线，故$\angle ECD=\angle DCM$,

又 $CE /\!/ MD$, $\therefore$ $\angle ECD=\angle MDC$,

从而$\angle DCM=\angle MDC$.

$\therefore$ $MD=CM=MA$.

3 在$\triangle ABC$中，$\angle C-\angle B=90^\circ$，$\angle A$的内外平分线交BC及其延长线于M、N，求证$AM=AN$（图1—7）.

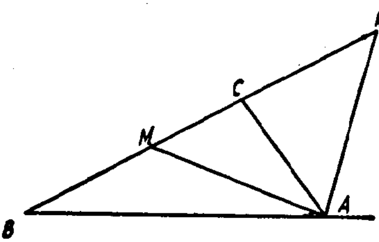


图1—7

证明 $\because$ $\angle AMN=\angle B+\frac{1}{2}\angle A$(外角定理)，

又$\angle A=90^\circ-2\angle B$（由已知条件得），由上二式得 $\angle AMN=45^\circ$,

又 $AM\perp AN$,

$\therefore$ $\angle ANM=45^\circ$,

故 $AM=AN$.

4 在四边形ABCD中，$AD=BC$，M为对角线BD的中点，P、Q分别为边AB、CD的中点，求证$PM=QM$(图1—8).

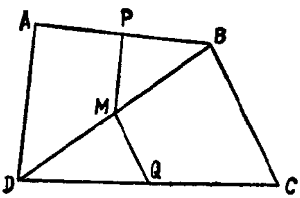


图1—8

证明 $\because$ P、M、Q分别为AB、BD、DC的中点，

故 $PM=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC$

$=QM$,

$\therefore$ $PM=QM$.

5　在△ABC中，AD为∠A的平分线，DE∥CA且交AB于E，又EF∥BC交AC于F，求证AE＝FC（图1—9）。

证明　∵　CDEF为平行四边形，故FC＝ED。

又　∠DAE＝∠CAD＝∠ADE（∵　DE∥CA），

故　AE＝ED＝FC，

即　AE＝FC。

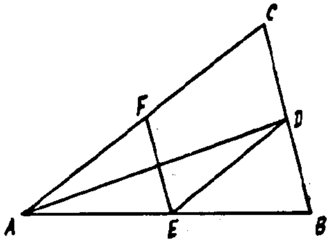


图1—9

6　设CD、CE分别为直角△ABC斜边AB上的高和中线，∠BCD与∠ACD之比为3∶1，求证CD＝DE（图1—10）。

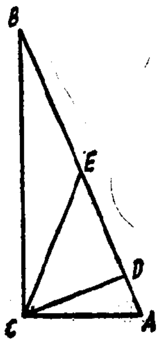


图1—10

证明　∵　CD⊥AB，

要证CD＝DE，只需证明∠CED＝∠ECD＝45°即可。

∵　∠BCD∶∠ACD＝3∶1，

∴　$\angle ACD=\dfrac{45^\circ}{2}$，

但　$\angle B=\angle ACD=\dfrac{45^\circ}{2}$，

故　∠CED＝2∠B＝45°，

∴　∠ECD＝45°，从而CD＝DE。

7　由△ABC的顶点B向∠A的平分线作垂线BD，由D作DE∥CA交AB于E，则AE＝EB（图1—11）。

分析　∵　DE∥CA，

只要能证明DE和边BC的交点为BC的中点；或者点D为某一三角形一边之中点时，问题就解决了。

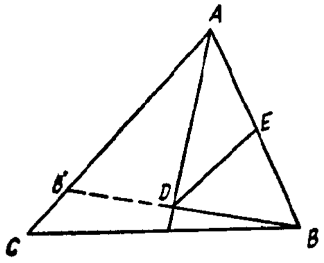


图 1—11

证明 延长BD交AC于B′，可证△ADB≌△ADB′。故D为△ABB′的底边BB′的中点，又DE∥B′A，故E为AB的中点。

8 设O为平行四边形ABCD的对角线AC的中点，过点O作直线交AB、CD于E、F，又交AD、CB的延长线于G、H，则EH＝GF（图1—12）。

证明 ∵ △COH≌△AOG (a.s.a)，

故OH＝OG，

又△COF≌△AOE，

∴ OE＝OF，

EH＝GF。

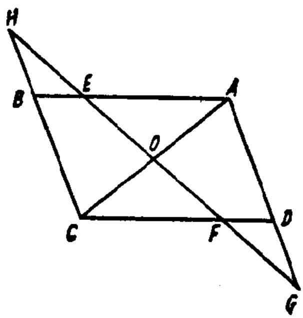


图 1—12

9 正三角形ABC两底角的平分线交于点O，由O作OD∥AB，OE∥AC，分别交BC于D、E，求证BD＝DE＝EC（图1—13）。

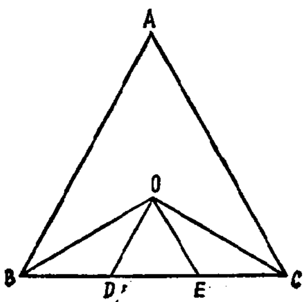


图 1—13

证明 由已知条件可以证明△OED为正三角形，且△OBD与△OCE为等腰三角形。

故 BD＝DO＝OE＝DE＝EC，

即　BD＝DE＝EC。

10　设ABCD为平行四边形，E、F分别为BC、CD之中点，试证AE、AF三等分对角线BD（图1—14）。

证明　连接AC交BD于O，AE、AF分别交BD于G、H，BO＝DO，在△ABC和△ACD中，G与H分别为其中线的交点，故BG＝DH＝2GO＝2HO（∵OB＝OD），故BG＝GH＝HD。

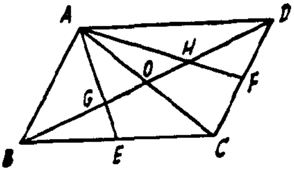


图1—14

11　由线段AB的两端点分别向一直线作垂线，垂足分别为A′、B′，则A′、B′和AB的中点O的连接线相等（图1—15）。

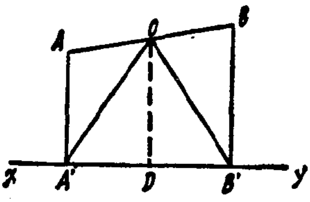


图1—15

证明　作OD⊥A′B′，

则　D为A′B′的中点，

∴　△A′DO≌△B′DO。

故　A′O＝B′O。

12　设线段AB的中点为M，从AB上另一点C向直线AB的一侧作线段CD，N为CD的中点；P为BD的中点；Q为MN的中点，求证PQ的延长线平分线段AC（图1—16）。

分析　延长PQ交AC于E，现在要求证点E为AC的中点。

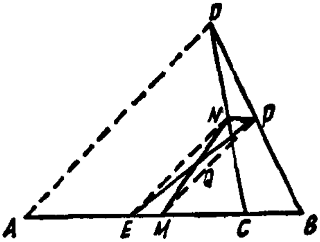


图1—16

已知N为DC的中点，若连接AD、EN，又点E、N就是△ADC两边上的点，当EN∥AD时，E就是AC的中点，因此只需证明EN∥AD即可。

证明 连接MP，又NP∥CB，

即NP∥EM，又知QN = QM，

∴△QNP≌△QME，QP = QE，

从而EMPN为平行四边形。

∴ EN∥MP，又∵MP∥AD。

∴ EN∥AD。

又 N为CD的中点，

故 E为AC的中点，

即 PQ的延长线平分线段AC。

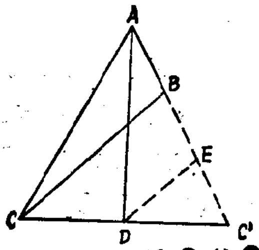


图1—17

13 在△ABC中，AC = 3AB，由C作∠BAC平分线的垂线，其垂足为D，则BC二等分AD（图1—17）。

证明 延长CD和AB的延长线交于C′，又AD为∠BAC的平分线，故CD = DC′，AC = AC′，即D为CC′的中点。作DE∥BC，E为BC′的中点；但已知AC = 3AB，故在△ADE中，B为AE的中点；CB∥DE，故BC平分AD。

14 在△ABC的边AB及AC的延长线上，各取一点D、E，使$AD = AE = \frac{1}{2}(AB + AC)$，则DE二等分BC（图1—18）。

证明 由C作CC′∥ED，又AD = AE（已知），

故　$EC=DC'$，只要D为BC'的中点，即可证得$BD=EC$。则问题就可得到解决。

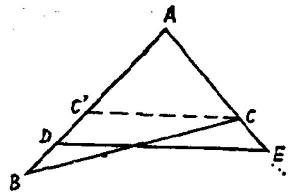


图1—18

由已知条件可得$AE-AC=AB-AD$，即$BD=EC$，$EC=BD=DC'$，D为BC'的中点，故DE必过BC的中点（∵　$DE\parallel C'C$），即DE二等分BC。

15　在正方形ABCD的一边AD的延长线上取点E、F，使$DE=DA$，$DF=DB$，连接BF分别交CD、CE于H、G，求证

1）$EF=EG$；2）$DG=HG$（图1—19）。

证明　1)．要求证$EF=EG$，只需求证$\angle EFG=\angle EGF$。但BCED为平行四边形，故$\angle EGF=\angle BGC=\angle DBG=\angle DFB$，∵$AF\parallel BC$。

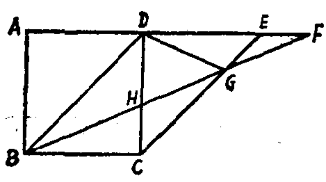


图1—19

∴　$EF=EG$。

2）要求证$DG=HG$，即证$\angle HDG=\angle DHG$，

但$\angle DFG=\frac{45^\circ}{2}$，

$\angle BHC=\frac{3}{4}90^\circ$，又$CD=CG$（$\angle GBC=\angle BGC=\frac{45^\circ}{2}$），

故$\angle CDG=\frac{3}{4}90^\circ$，从而，$\angle DHG=\angle HDG$，$DG=HG$。

16　设ABCD为正方形，$CE\parallel BD$且$BD=DE$，延长ED