論几种数学物理微分方程

A. H. 克雷洛夫著

高等教育出版社

論几种数学物理微分方程

A. H. 克雷洛夫著

徐 子 豪 譯

叶彦謙 黃克欧校

高 等 教 育 出 版 社

本书系根据苏联国立技术理論书籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的 A. Н. 克雷洛夫（А. Н. Крылов）院士著“論（工程問題上有用的）几种数学物理微分方程”（О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах）1950 年第五版譯出。原著对十九世紀上半期在数学物理方面的理論研究作了比較詳尽的叙述，同时又着重于具体問題的解法，对于工程师，高等工业学校的教师和学生，特别是对于設有“工程数学”这一类課程的班級，很有参考价值。本书并可与原著者的“近似計算講义”（呂茂烈、季文美譯，本社出版）互相配合学习。

原书經苏联高等教育部审定为高等学校的教学参考书。

論几种数学物理微分方程

A. Н. 克雷洛夫著

徐子豪譯

叶彥謙　黄克欧校

高等教育出版社出版 北京宣武門内承恩寺7号

（北京市书刊出版业营业許可証出字第054号）

人民教育印刷厂印刷　新华书店发行

統一书号 13010·595　开本 787×1092 1/16　印張 22 7/8

字数 488000　印数 0001—7000　定价（6）¥2.10

1959 年 6 月第 1 版　1959 年 6 月北京第 1 次印刷

第五版序言

“論(工程問題中应用的)几种数学物理微分方程”一书乃已故阿·尼·克雷洛夫院士所著。第一版在1913年印出于海洋学院学报。有如他在該版的序言中所写的，本书的內容是根据他在1912年对海洋学院听众讲課的講稿所編成的。第二版及第三版于1931—1933年在苏联科学院的科学技术文献丛刊中出現，与第一版比較，这两版补充了克萊洛夫关于特征方程的数值解及一系列技术問題上的例子，第四版发表于作者故世后1948年出版的全集中，全集这时是由苏联科学院印行的，在这一版中关于理論問題的一些个别地方，曾作了些不重要的修改，并且驗算了表格。

現在的第五版是第四版的重版。

克雷洛夫的书在1913年并且直到現代是数学物理方面这样一本唯一的厚本教科书，其中一方面，对于十九世紀前半叶数学物理中的經典著作有充分的叙述，而在另一方面，对于数学物理方法在具体重要技术問題上的实际应用又予以极大的注意。在这些問題中彈性体系的强迫振动，特别是共振現象，占中心位置。

书中基本的研究方法是应用福里哀方法，或如克雷洛夫所云“泊松第二法”，此法由克雷洛夫推广于强迫振动的情形。1905年克雷洛夫所发表的关于有常截面的樞軸的强迫振动的論文就是这方面的重要著作。这篇著作的內容在增加了一些补充材料以后已叙述于本书的第七章。这同一方法于第八章中又被用来研究空圓柱体的强迫徑向振动。在一切情形下对加于彈性系統上的强迫力的影响作了深刻的定性研究。

第一章中詳細討論了由二阶綫性常微分方程所描述的强迫振动，并討論与此有关的各种紀录仪器的构造問題。

早在1905年的著作中克雷洛夫已注意到下列事实，卽强迫力可不滿足自由振动的边界条件，因而应用上述福里哀方法的結果，問題的答案只可用收斂得很慢的級数来表达——特别是在基本区間的两端附近，如此便自然地产生了改善福里哀級数及其类似的級数的收斂性的問題。为了解决这問題，克雷洛夫指出了非常簡单而巧妙的方法，此法的基础是从級数的和中分出若干初等函数，使福里哀級数中那些滿足标增大时减小得很慢的系数归于消灭。这个方法叙述于本书第六章中。

我們还要指出，在第一章中克雷洛夫給出計算特征方程根的新的簡单方法。首先叙述这問題的历史，这問題是和拉格朗日，拉普拉斯，勒浮尔及夏可皮諸人的名字联系着的。展开这(由行列式等于零而給出的)特征方程时，主要困难在于未知数(所求頻率)出現于行列式的对角綫元素中。克雷洛夫指出一个方法，用这方法可将該未知数集中于行列式的一列，这方法所根据的計算，与产生特征方程的微分方程組化为一个高阶微分方程的所用的計算相类似。因为有了克雷洛夫这个研究，我們出現了一系列处理同一問題的著作。在魯金，赫

洛多夫斯基和甘特馬赫耳的著作中，有克雷洛夫方法的代数分析，在达尼列夫斯基的著作中，又給出了展开特征方程的新的代数方法。

克雷洛夫在他所执笔的契比雪夫演講集的序言中介紹工程师閱讀这演講集时，曾說契比雪夫并沒有打算要以无可指摘的严密来叙述他的教程，而只滿足于“合理的严密，使能避免錯誤而显示結論的不可动搖性”。这些話也充分表征着本书的体裁。

院士斯米尔諾夫

第一版序言

按照1909年的規定,海洋学院工程系的修学年限增加到三年，并且在第三年的教学計划中包括有选修的数学課。

这选修課的講授,由学院会議决定由我担任。这課程所选定的題目,就是叙述在工程問題中所遇到的数学物理微分方程的求积分法。

我在1912年秋季的一学期中每周三小时的講課稿就成为本书的內容。

在第一章中我給听众复习普通課程中已学过的关于常系数綫性常微分方程求积分法的理論,詳細地談到二阶微分方程和討論它在不同情况下的解;这里闡明了在所有工程应用上很重要的共振現象。然后我轉到高阶方程，指出求它們的解的記号方法。这个方法在英国的教科书中和航海工程师所常参閱的一般英文文献中，已广泛地使用。在討論具有若干个自由度体系的微小振动的一般理論后,我在章末举了一些工程性質的例子,这些例子与本章中討論过的那些形式的方程及与共振現象有关。

在第二章中我叙述具常系数及高阶偏导数的綫性微分方程在关于无限介質的初始条件下求积分的勾犀方法。这一章乃我根据已故的柯尔金教授于1891年对聚集在薩达烏斯基教授寓所的学生所作的演講而編成。这些演講当时我曾仔細地記录下来并加以校閱。在这一章中尽可能精确地重复我所永不忘怀的导师的模范的叙述。他曾为了我們海洋学院辛勤地工作了这么多年。

这一章內所討論的問題，在研究电振动的傳播和无綫电时可找到許多应用。这些应用我沒有提到,因为本学院在这方面有专門的課程。

在第三章我考慮了在有限介質的边界条件下常系数綫性偏微分方程求积分的泊松第一法,这里我开始也复述柯尔金教授給我講解的这个方法,然后举一系列的例子，这些例子主要从刊載在法国"工艺学校"杂志第十九卷的泊松的研究报告中取来。

在第四章中我叙述对有限介質求同样方程的积分的福里哀方法或泊松第二法，且用确定弦和樞軸的自由振动的經典例子来解释这方法。

在第五章中,我作了积分留数理論的簡短叙述,并依照勾犀的研究报告指出这理論对于常微分方程和偏微分方程求积分法的应用，以及对于展开函数为类似于福里哀級数的級数之应用；这些級数已在第四章中遇到过而在該处它們收斂性的条件不能論証。勾犀方法旣給出这些条件,又提供了按照与超越方程的根有关的函数展成級数时确定系数的一般方法。因此,这一章就成为前章在理論上的自然的补充。

在第六章中我先不用勾犀理論而討論福里哀級数及其相似級数的收斂条件，然后指出加速这类級数收斂性的方法。这种方法可应用于許多相当普遍的場合，它不仅給出在应用上方便地利用这种級数的可能性,只須取改变后的級数的极少数(3—5)几項就可以得到所

希望的准确度，且常常可把所設級数的和表示为有限个間断函数之和的形状。这方法更給出求这种福里哀級数所表示的函数的导数的可能性，当这些級数不容許逐項微分时。这个方法我沒有在任何教科书和文献中遇見过，但是由于它的簡单和明显，我不敢断定它是我所首創的。

在第七章中我叙述具最后項的常系数綫性偏微分方程求积分的一般方法，我所依据的方法就是我 1905 年在“Mathematische Annalen”中所发表的“Ueber die erzwungenen Schwingungen von gleichförmigen elastischen Stäben”，这篇文章中所提出的方法。我应用这个方法研究弦，樞軸和梁的强迫振动，研究指示器的理論，研究軸的振动和諸如此类的实际性的問題。我解釋其中的共振現象和分析“小时間內”力的作用的情形，所有这些問題的解既可用級数的形式写出，也可用表示这些級数之和的間断函数的形式写出。

在第八章中我討論彈性空圓柱体的强迫徑向振动，为的是給出一个有变系数的方程的例，并使学院的听众熟悉貝塞尔函数的一些最簡单的性質。我所以选擇这个問題，是因为它在設計武器时有实际的意义，又因为象布力克中将这样精通这門业务的人曾向我提出过。

从以上本书內容的概述中，可以看出我主要地是遵循着“先輩作者”如福里哀，泊松，勾犀等所叙述的方法，他們主要的目的在于求解，而不在于其論証的完全严格，也不拟在一般情形下或在一定的必要的限制下証明解的存在。据我看来这一部分只有数学的意味，同时，凡想了解这些問題的人可在 B. A. 史其克洛夫院士的著作中找到它們的論証。这著作一部分印成俄文，一部分則印成了法文。

为了工程上的应用要驗証所得的解时，借助于我在第六章內所提出的方法和在第七章中所举的一系列說明的例子，就可以办到。

在我的課程中我沒有談到两个或三个变数的拉普拉斯方程，因为这个方程在本院所授的电学課程和地磁学理論課程中会討論的。若要应用这方程于研究液体的流动，那我只能簡单地复述茹可夫斯基教授的著作，这个我劝听众在原著中去研究它們。

最后，在最近几年为了解决数学物理的問題，哥廷根的希尔柏教授发展了“积分方程”的特殊的方法，这个方法我在課程中也沒有触及，因为它可在克涅塞耳教授的著作“积分方程”(Die Integral gleichungen)中找到，这是完全符合教学目的的著作。

显然象数学物理方程的求积分法这样范圍广泛的課題，不可能在任何一个課程中作概括无遺的討論，我的任务也不在这方面，我所抱的目的是向听众介紹偉大学者的著作，以后再給出許多在他們实用上可能遇到的問題的解法范例，并說明那些普通称为“共振”現象的重要性与普遍性。

在現代工业发展的时期，为一般高等学校編写这样的教程是絕对必要的，但除了霍尔特的“工程振动学”(Die Technische Schwingungslehre)这本性质較淺的优良的书以外，我不知还有什么这样的教程。因鉴于本教程乃是为了达到所拟定的目标而作的第一次尝試，所以它得到本学院院长的許可并根据学院会議的决議刊印在本学院的“学报”中。

最后学院的印刷局使本书成为印书艺术中的一个模范，我应对它表示深深的感謝，特别

要感謝的是印刷局的校对員維达雪夫斯基，他不仅仔細地对待了校对工作，而且屢次使我注意到原文中的錯誤和不清楚的地方。

克雷洛夫

第二版序言

本书第一版构成了“海洋学院学报”的第二期，于1913年共印了五百册。这一期的“学报”很快就銷完，后来便成为稀有的文献。

鉴于本书所討論的問題在广义的技术中具有直接的应用，并能满足我国建設及許多高等学校特别是技术学校的需要，学院的編审出版委員会决議刊行第二版，并囑我在书中作了适当的补充。

这些补充几乎等于原书三分之一的篇幅，包括§§16—20决定物質体系微小振动頻率方程的数值解；§§83—85一种优异的器示压容图的分析；§§88—94电纜中电流的傳播；§§95—103在发射时炮的縱振动；§§104—114船的振蕩，此外除在仔細审閱时作了些必要的修正以外，原文沒有变动。伊格南托夫斯基教授給我提出一系列必要的修正意見，他在讀过此书的第一版时，即檢驗了所有的計算和結果，并改正了他所发現的刊誤和錯誤，他在得悉准备此书再版时，即将这些改正通知了我。

我必需对伊格南托夫斯基教授表示特别的感謝。

学院出版局和印刷局在刊印本书时，充分表現了他們一貫謹愼与仔細的工作作风。

为了使此书較为紧縮，此版采用比較小的鉛字，而为了使讀时清楚和明显，鉛字又是重新鑄造的，是从未用过的，用較小的鉛字排复杂的数学方程有很大的困难，因此需要該学院印刷所排字工作同志的高度熟練才能来克服困难，而使本书在形式上并不逊于著名的巴黎戈叶—維涅耳印刷所出版的数学刊物。

学院有經驗的校对者夏布列維基同志担任了校对工作，他在校样的边緣上塡写了很多純粹是排版技术方面的指示。他对印字的正确和排印的形式都予以同样的仔細注意。

在我对学院的出版局与印刷局表示深深感謝时，我請求排印的工作同志們和夏布列維基同志接受我对他們的辛苦工作的特别感謝。这工作的完成，不仅需要极高度的細心和技巧，并且还需要他們对于工作的眞摯的热爱。这热爱才是这項工作成功的确实保証。

1931年12月　克雷洛夫

目　录

第一章　常系数綫性常微分方程

§1. 具最后項的二阶微分方程。它的一般积分　我們从考虑二阶綫性常微分方程

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2h\frac{dy}{dt}+k^2y=f(t) \tag{1}$$

开始，用撇号表示导数，此式就可写为

$$y''+2hy'+k^2y=f(t). \tag{1'}$$

在此方程中，系数 h 与 k 将当作給定的常数，$f(t)$ 为自变量 t 的給定的函数。

在許多技术問題中时常会遇到这种方程，其中某些方程我們将詳細地討論；同时与我們有关的其他方程，大部分也可化为这种方程来求积分。

与方程(1)对应的不具最后項的方程为

$$u''+2hu'+k^2u=0. \tag{2}$$

作代换 $u=e^{-ht}v$，此式化为

$$v''+(k^2-h^2)v=0. \tag{3}$$

用同样的代換

$$y=e^{-ht}z$$

可将方程(1)化为下面的形状

$$z''+(k^2-h^2)z=e^{ht}f(t). \tag{4}$$

若 $k^2-h^2>0$，令 $k^2-h^2=n_1^2$，方程(3)的一般积分可写为

$$v=C_1\cos n_1t+C_2\sin n_1t; \tag{5}$$

因此，方程(2)的一般积分就是

$$u=e^{-ht}[C_1\cos n_1t+C_2\sin n_1t]. \tag{6}$$

为书写簡短起見，令

$$e^{ht}f(t)=F(t),$$

为了要找方程

$$z''+n_1^2z=F(t) \tag{4}$$

的特解 z，采用改变任意常数法，設

$$Z=A\cos n_1t+B\sin n_1t, \tag{7}$$

卽得下面用以确定 A' 与 B' 的两个方程，其中 A' 与 B' 看作 t 的函数，

$$A'\cos n_1t+B'\sin n_1t=0, \tag{*}$$

$$-n_1A'\sin n_1t+n_1B'\cos n_1t=F(t),$$

由此推出

$$A'=-\frac{1}{n_1}F(t)\sin n_1t \text{ 及 } B'=\frac{1}{n_1}F(t)\cos n_1t;$$

即

$$A=-\frac{1}{n_1}\int_a^t F(t)\sin n_1 t\,dt;\quad B=\frac{1}{n_1}\int_a^t F(t)\cos n_1 t\,dt,$$

其中 a 为任意給定的常数，以后可以处理它，使計算变簡单一些。

为避免混淆起見，在积分号下，写 ξ 以代 t，即得

$$Z=\frac{1}{n_1}\sin n_1 t\int_a^t F(\xi)\cos n_1\xi\,d\xi-\frac{1}{n_1}\cos n_1 t\int_a^t F(\xi)\sin n_1\xi\,d\xi, \tag{7'}$$

也可写成另一种形式：

$$Z=\frac{1}{n_1}\int_a^t F(\xi)\sin n_1(t-\xi)\,d\xi, \tag{7''}$$

因此，方程(4)的一般积分就是

$$z=C_1\cos n_1 t+C_2\sin n_1 t+\frac{1}{n_1}\int_a^t F(\xi)\sin n_1(t-\xi)d\xi, \tag{8}$$

由此推出方程(1)的一般积分

$$y=e^{-ht}(C_1\cos n_1 t+C_2\sin n_1 t)+\frac{1}{n_1}e^{-ht}\int_a^t e^{h\xi}f(\xi)\sin n_1(t-\xi)d\xi, \tag{9}$$

其中 $n_1^2=k^2-h^2$,

且 $k^2-h^2>0$.

若 $k^2-h^2<0$，令

$$k^2-h^2=-n_2^2 \text{ 或 } h^2-k^2=n_2^2,$$

即得方程(3)的一般积分为

$$v=C_1e^{n_2t}+C_2e^{-n_2t} \tag{10}$$

的形式，从而方程(2)的一般积分为

$$u=e^{-ht}(C_1e^{n_2t}+C_2e^{-n_2t})=C_1e^{(n_2-h)t}+C_2e^{-(n_2+h)t}. \tag{11}$$

代替方程(7)，現在应設

$$Z=Ae^{n_2t}+Be^{-n_2t}$$

而代替方程組(*)，应有：

$$A'e^{n_2t}+B'e^{-n_2t}=0$$

$$n_2A'e^{n_2t}-n_2B'e^{-n_2t}=F(t),$$

由此推出

$$A'=\frac{1}{2n_2}e^{-n_2t}F(t),\qquad B'=-\frac{1}{2n_2}e^{n_2t}F(t)dt,$$

$$A=\frac{1}{2n_2}\int_a^t e^{-n_2t}F(t)dt,\quad B=-\frac{1}{2n_2}\int_a^t e^{n_2t}F(t)dt$$

及

$$Z=\frac{1}{2n_2}\int_a^t e^{n_2(t-\xi)}F(\xi)d\xi-\frac{1}{2n_2}\int_a^t e^{-n_2(t-\xi)}F(\xi)d\xi, \tag{12}$$

至此,便可立刻写出方程(1)的一般积分。

最后,若

$$k^2-h^2=0,$$

则方程(3)具有

$$v''=0$$

的形式,它的一般积分是

$$v=C_1t+C_2,$$

因此方程(2)的一般积分是

$$u=e^{-ht}(C_1t+C_2).$$

然后容易算出

$$Z=\int_a^t(t-\xi)F(\xi)d\xi. \tag{13}$$

而方程(1)的一般积分,就可写成这样的形式:

$$y=e^{-ht}(C_1t+C_2)+e^{-ht}\int_a^t e^{h\xi}(t-\xi)f(\xi)d\xi. \tag{14}$$

§2. 用未定系数法求前述形式的微分方程的特解 在公式(7′),(8),(9),(12),(14)中$f(\xi)$与$F(\xi)$可为任意函数,这些公式,仍旧正确,但在很多情况中,求方程(4)与(1)的特解,可以不利用这些一般的公式而采用未定系数法;这方法可适用于当函数$f(t)$或$F(t)$是形如

$$e^{\mu t}(a+bt+ct^2+\cdots\cdots+pt^l)$$

的諸項之和的一切場合,其中μ既可为实常数,也可为复数常数。因此我們所考慮的情形,也就包括这样一些情形,卽当方程的右边具有象下面形狀諸項的情形:

$$(a+bt+\cdots\cdots+pt^l)\sin\alpha t;\quad (a_1+b_1t+\cdots\cdots+p_1t^l)\cos\alpha t;$$

或者

$$e^{\beta t}(a+bt+\cdots\cdots+pt^l)\sin\alpha t;\quad e^{\beta t}(a_1+b_1t+\cdots\cdots+p_1t^l)\cos\alpha t;$$

或者在$\mu=0$时,方程右边是

$$a+bt+ct^2+\cdots\cdots+pt^l$$

形式各項的情形。

在所有这些情形下,需要找和方程右边同样形式的特解,换言之,要找可以写为形如

$$e^{\mu t}(A+Bt+Ct^2+\cdots\cdots+Pt^l)$$

的諸項之和的特解,其中$A,B,C,\cdots\cdots,P$是未定系数。要决定这些系数,只須把上述形式的解,代入原方程,而使左右两边恒等就成了。

这里必需注意到,若任何一項中的指数μ是給定的綫性方程的"特征"方程之根,就是

說 μ 是方程

$$\gamma^2+2h\gamma+k^2=0$$

之根，則代替函数 $A+Bt+\cdots\cdots+Pt^l$，必需取

$$t(A+Bt+\cdots\cdots+Pt^l),$$

就是，对应于这一項的特解，要按照下面形式来求

$$e^{\mu t}[At+Bt^2+\cdots\cdots+Pt^{l+1}];$$

如果特征方程有等根，而 μ 等于这个根，則需要找下面形式的解

$$e^{\mu t}[At^2+Bt^3+\cdots\cdots+Pt^{l+2}].$$

当方程的右边有

$$(a+bt+\cdots\cdots+pt^l)\sin\alpha t$$

形式的項时，則記得，依照尤拉公式

$$\sin\alpha t=\frac{e^{\alpha t\sqrt{-1}}-e^{-\alpha t\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\quad 及\quad \cos\alpha t=\frac{e^{\alpha t\sqrt{-1}}+e^{-\alpha t\sqrt{-1}}}{2}.$$

就是說 $\sin\alpha t$ 項的出現，相当于出現一对指数函数 $e^{\alpha t\sqrt{-1}}$ 与 $e^{-\alpha t\sqrt{-1}}$，就是需找下面形式的特解：

$$(A+Bt+\cdots\cdots+Pt^l)e^{\alpha t\sqrt{-1}}+(A_1+B_1t+\cdots\cdots+P_1t^l)e^{-\alpha t\sqrt{-1}},$$

或者，用三角函数代替虛的指数函数后，找

$$(A+Bt+\cdots\cdots+Pt^l)\sin\alpha t+(A_1+B_1t+\cdots\cdots+P_1t^l)\cos\alpha t$$

形式的解。虽然在所提出的方程(1)的右边，只有含 $\sin\alpha t$ 的項，或只有含 $\cos\alpha t$ 的項，我們必須仍旧取两項。

例如求方程

$$y''+0.2y'+5y=0.7\sin t$$

的特解，必需按照

$$Y=A\sin t+A_1\cos t$$

的形式来求。为了确定系数 A 与 A_1，可求得两个方程：

$$4A-0.2A_1=0.7,$$
$$0.2A+4A_1=0,$$

于是

$$A=\frac{2.8}{16.04}=0.175;\quad A_1=-\frac{0.14}{16.04}=-0.009,$$

因此所求特解为

$$Y=0.175\sin t-0.009\cos t.$$

§3. 最后項可表示为和的情形，这和是由自变量的不同倍数的正弦或余弦組成的。振幅，位相差，減縮量。在我們要考虑的那些应用中，方程(1)的右边大都可表示为形如

$$A\sin pt+B\cos pt$$

的諸項之和，对应于同一幅角 pt 的每一对这样的項，可合并成一項，只須命

$$A=H\cos\gamma,\qquad B=H\sin\gamma,\tag{1}$$

于是

$$H=\sqrt{A^2+B^2},\ \text{及}\ \operatorname{tg}\gamma=\frac{B}{A},\tag{1'}$$

而上述的两项,就具有

$$H\sin(pt+\gamma)$$

的形式。

于是,§1 的方程(1)具有下面的形式

$$y''+2hy'+k^2y=\sum H\sin(pt+\gamma),\tag{2}$$

其中在$\sum$符号之下的,是有限多个项,每一项的形式,就象这符号下所写的一样。

这方程的一般积分,具下面的形式:

$$y=e^{-ht}[C_1\cos n_1t+C_2\sin n_1t]+Y,$$

其中 $n_1=\sqrt{k^2-h^2}$,因为在我們的应用中, 是$k^2-h^2>0$。

我們将用

$$Y=\sum N\sin(pt+\gamma+\delta)\tag{3}$$

的形式来找特解Y. 其中N与 δ 为未知常数;为要确定这些常数,我們在(2)的和中与(3)的和中,都只取一项来看,这样求出的N与 δ,也同样适用于其他各项。

把$Y=N\sin(pt+\gamma+\delta)$代入方程

$$y''+2hy'+k^2y=H\sin(pt+\gamma)$$

中,得出等式

$$N(k^2-p^2)\sin(pt+\gamma+\delta)+2hpN\cos(pt+\gamma+\delta)=H\sin(pt+\gamma).$$

或者写成另一种方式

$$\begin{aligned}&[N(k^2-p^2]\cos\delta-2hpN\sin\delta]\sin(pt+\gamma)+\\&+[N(k^2-p^2)\sin\delta+2hpN\cos\delta]\cos(pt+\gamma)=H\sin(pt+\gamma).\end{aligned}$$

由此,看作两边恒等,就得到用来确定N与 δ 的两方程

$$N(k^2-p^2)\cos\delta-2hpN\sin\delta=H,$$

$$2hpN\cos\delta+N(k^2-p^2)\sin\delta=0.$$

从这些方程得出

$$N=\frac{H}{+\sqrt{(k^2-p^2)^2+4h^2p^2}},\tag{4}$$

$$N\cos\delta=\frac{(k^2-p^2)H}{(k^2-p^2)^2+4h^2p^2};\quad N\sin\delta=\frac{-2hpH}{(k^2-p^2)^2+4h^2p^2}.$$

或者

$$\cos\delta=\frac{k^2-p^2}{+\sqrt{(k^2-p^2)^2+4h^2p^2}};\quad \sin\delta=\frac{-2hp}{+\sqrt{(k^2-p^2)^2+4h^2p^2}}.\tag{5}$$