初等微积分

傅沛仁　王景林　编

黑龙江人民出版社

初等微积分

傅沛仁　王景林　编

黑龙江人民出版社

1982年·哈尔滨

责任编辑：田兆民
封面设计：赵凤岐

初等微积分
傅沛仁　王景林　编

黑龙江人民出版社出版
（哈尔滨市道里森林街42号）
肇东印刷厂印刷　黑龙江省新华书店发行
开本787×1092毫米 1/32 · 印张21 6/16 · 字数420,000
1982年3月第1版　1982年3月第1次印刷
印数1—9,700

统一书号：13093·47　定价：1.80元

前　　言

微积分的基本概念、基本运算等内容下放到中学，这对改革中学数学教学，更好地为实现“四化”培养人才，必将起到一定的作用。为了使中学数学教师更深入地掌握微积分的理论和方法，我们编写了这本书，以期对提高中学的“一元微积分”的教学效果有所帮助。

为了加强基础知识、基本理论和基本技能的培养，在选材上不低于综合大学数学专业的要求，并配置具有一定难度和数量的习题。对艰深的理论、较难的习题都冠以*号，初学者可以略去，不致影响对后面内容的理解。

为了便于自学，文字力求通俗易懂，多举例题，加强总结，特别注意选择适当的教学方法，以利学习。

为了方便读者，在书后附有初等数学常用公式及希腊字母表备查，并简略介绍“必要条件与充分条件”、“反证法的逻辑关系”及“绝对值不等式”等内容，作为学习微积分的参考。

本书可作为函授大学教材，亦可作为综合大学或师范院校数学专业学生的参考书或自学用书。

本书主要由黑龙江大学数学系傅沛仁、王景林两位副教授执笔编写，傅瑞芳同志参加了部分章节的编写、配题和全部制图工作，由于编者水平所限，缺点错误在所难免，欢迎读者给予批评指正。

编　　者

1980年8月于哈尔滨

目　　录

导　言

微积分是研究事物运动和变化规律的一种数学方法。它的应用十分广泛。我们在学习这门课程的时候，有必要先通过对几个典型例题的分析，探讨一下：它是怎样在已知的初等数学基础上建立起来的？它研究和处理问题所依据的基本观点和基本方法是什么？这样才能给进一步学习创造一个良好的开端。

我们先以大家所熟知的“如何计算圆周长”为例进行分析。

圆周是曲的，它的长度 l 是一个未知量。在初等数学里，只会计算由直线段围成的多边形的周长。因此，在计算圆的周长 l 时，我们只能先用已知的圆内接正 n 边形的周长 l_n，作为圆周长 l 的近似值。这样，在局部上以直代曲，用已知代未知。其次，我们观察在什么样的变化过程中，已知量 l_n 越来越接近于圆的周长 l。很明显，圆内接正 n 边形边数越增多，它的周长 l_n 就越接近于圆的周长 l。最后，我们取 n 无限增大过程，已知量 l_n 的极限，就是未知量 l。即

$$l=\lim_{n\to\infty} l_n.$$

求圆的周长 l 的过程，体现了曲（未知）与直（已知）这对矛盾在一定条件下互相转化的过程。以直代曲通过极限将直转化为曲；以已知代未知通过极限将未知转化为已知。

通过矛盾的转化而解决了矛盾，这正是辩证法在数学中的应用。

现将上例分析的结果归纳如下：

在研究一个未知量时，先选一个同类的已知量，做为该未知量的近似值；其次，考察在什么过程中，已知量越来越接近于该未知量；最后，取这个过程中，已知量的极限就是该未知量的值。

用微积分这一数学工具解决实际问题时，一般都先用上述方法将实际问题归结为求某函数的导数和积分，然后再通过计算就能得到该问题的解决方案。

上述方法称为微积分的基本分析方法，对这一方法做以下两点说明：

1. 作为研究对象的未知量，由于它是变量或曲线形，初等数学无法求得它的值。同类的已知量，是指与未知量是同种类型的（如都是面积，都是长度，都是速度等），用初等数学能求值的量（如常量、直线形等）。

2. 用微积分的基本分析方法解决实际问题，可按以下三个步骤进行：

（1）选同类已知量作为该未知量的近似值（近似代替）；

（2）选择使已知量越来越接近于该未知量的变化过程（选择过程）；

（3）取这个过程中已知量的极限就是该未知量的值（取极限，使矛盾转化）。

下面再举两个典型例子：

例 1 已知物体沿直线作变速运动，运动距离 s 是时间

t的函数，即

$$s=s(t).$$

求物体在时刻t_0运动的瞬时速度。

解 (1) 由于物体作变速运动，在时刻t_0运动的瞬时速度$V(t_0)$是一个未知量，但是当时间由t_0变为t_1时，距离由s_0变为s_1，在这一段时间间隔物体运动的平均速度

$$\overline{V}=\frac{s_1-s_0}{t_1-t_0}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

是已知量．很明显，平均速度$\overline{V}$可做为瞬时速度$V(t_0)$的近似值（近似代替）．

(2) 当t_1越靠近于t_0，即时间间隔Δt越小，物体运动的速度变化也越小，平均速度$\overline{V}$，就越接近于瞬时速度$V(t_0)$（选择过程）．

(3) 当时间t_1趋向于t_0时(时间间隔趋于0，即$\Delta t\to 0$)．平均速度$\overline{V}$的极限就是瞬时速度$V(t_0)$，记作

$$V(t_0)=\lim_{t_1\to t_0}\frac{s_1-s_0}{t_1-t_0}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

所以，物体运动的瞬时速度是当时间间隔Δt趋向于0时，平均速度的极限(取极限使矛盾转化)．

这是微分学的典型问题．

例 2 求曲边梯形的面积．

解 如图导1所表示的图形通常叫做曲边梯形．由于它有一个边是曲的，不能用初等数学方法求得它的面积s．

(1) s是未知数，但是，由直线围成的多边形的面积是已知量(用初等数学方法可求出面积)，将曲边梯形的底边分

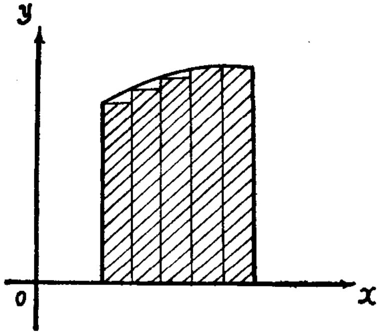

图 导1

成 n 等分，过分点作垂直于底的直线段将曲边梯形分成 n 个小曲边梯形（上图是分成5等分情形）.在每一个小曲边梯形上，作一个同底与左边同高的小矩形，这些小矩形拼成一个阶梯图形。它的面积 s_n 是已知的，我们取 s_n 作为 s 的近似值（以直代曲，以已知代未知）（近似代替）。

(2) 很明显，将曲边梯形等分的份数越多，即 n 越大，每份的间隔就越小，阶梯图形面积就越接近于 s（选择过程）。

(3) 当分点无限增多，即当 n 无限增大时，每份间隔无限减少，阶梯图形面积 s_n 的极限就是曲边梯形的面积 s，记作

$$s=\lim_{n\to\infty}s_n.$$

所以，曲边梯形的面积是当分点无限增多时，阶梯图形的面积的极限（取极限使矛盾转化）。

这是积分学的典型问题。

从上面对几个典型问题的分析可知，微积分是用发展的观点，在事物的运动变化过程中来研究空间形式或数量关系的变化规律。而极限理论和方法则是微积分研究问题的理论基础和工具。因此，在第一篇里，将对微积分研究的对象——变量、函数、连续函数、初等函数及微积分的理论基础和工具——极限理论作较深入的讨论，才有可能在第二篇里研究一元函数的微分学和在第三篇里研究一元函数的积分学。

第一篇　分析引论

第一章　函　　数

函数是微积分研究的对象。学习微积分，首先必须对函数的概念要有清楚的理解。虽然在中学数学中涉及一些函数的知识，但是不够系统，因而有必要把函数概念再系统地讲一讲。

§1·1　函数的概念

一　变量与区间

在人类的生产斗争与科学实验中，经常要遇到各种不同性质的量。如物理上的温度、时间、功、动能等，几何中的长度、面积、体积等。其中有些量在研究过程中保持不变，这种量叫做**常量**；也有些量在研究过程中可取不同的值，这种量叫做**变量**。例如，地球绕太阳公转时，地球与太阳的距离是变量，地球的质量是常量(因变化极其微小可看做常量)；长途汽车在两站之间运行时，汽车与两站之间的距离、汽油的储存量都是变量，乘客的数目、全部行李的重量都是常量。

为了易于辨别变量与常量，习惯上用字母

$$x,\ y,\ z,\ t,\cdots$$

表示变量；用字母

$$a,\ b,\ c,\ d,\cdots$$

表示常量。

微积分研究的变量与常量都是在实数域内取值。变量所取的值全体叫做这个变量的**变域**。

读者已知，实数全体与数轴上的点一一对应。因此变量 x 所取得的不同的值可用数轴上不同的点来表示。今后不去区分点与实数，把“给定一个实数 a”说成“给定一个点 a”。

变量的变域常常可用区间表示。现将表示区间的符号及名称列表如下：

设 a、b 是两个实数，且 $a<b$。

x 的变域	表示符号	名称	统称
$a<x<b$	$(a,\ b)$	开区间	有限区间
$a\leqslant x\leqslant b$	$[a,\ b]$	闭区间	
$a\leqslant x<b$	$[a,\ b)$	半闭区间	
$a<x\leqslant b$	$(a,\ b]$	半闭区间	
实数全体	$(-\infty,\ +\infty)$		无限区间
$a<x$	$(a,+\infty)$		
$a\leqslant x$	$[a,+\infty)$		
$x<b$	$(-\infty,b)$		
$x\leqslant b$	$(-\infty,b]$		

二　函数的概念

在同一个自然现象或技术过程中，往往有几个量同时变化，它们的变化并不是彼此孤立无关的，而是存在着互相联系相互制约的一种依赖关系，也就是所谓的“函数关系”。首先考虑下面几个例子：

例 1　读者已知，圆的半径 r 与其面积 s 之间的关系是

$$s=\pi r^2,$$

这个公式给出了当圆的半径变化时，圆的面积 s 和其半径之间的一种依赖关系。

例 2　真空中自由落体，下降距离 s，时间 t，根据著名的伽利略公式，有

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 是重力加速度。这公式指出，当物体自由降落的过程中，距离 s 和时间 t 之间的一种依赖关系。

例 3　气象台用温度自动记录器测出某日 14 时至 24 时的气温变化情况（图 1·1），横轴表示时间 t，纵轴表示温度 T，曲线上一点 $P(a, b)$ 表示在时间 $t=a$ 时测得的温度为

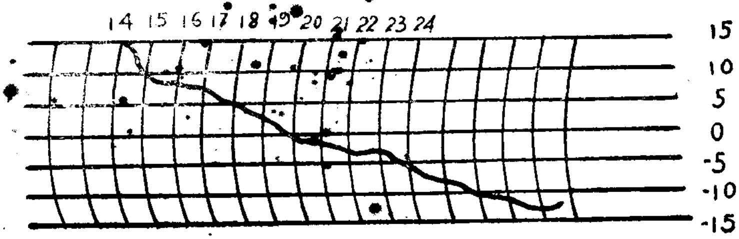

图 1·1

b. 图上的曲线，就表示在时间 t 的变化过程中，温度 T 与时间 t 之间的依赖关系。

例 4 某公社为农业灌溉用水问题，要了解某河流的流量情况。水文站计算了该河流 40 年的平均月流量 v 如下表：

月份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
平均月流量 v（亿立方米）	0.39	0.30	0.75	0.44	0.35	0.72	4.3	4.4	1.8	1.0	0.72	0.50

上述四例有一个共同的特征，就是当着一个变量变化时，另一个量按照某种规律也跟随着变化，对于第一个变量在它的变域内所取的每个值，第二个变量就有唯一确定的值和它对应。我们把这种共同的特征抽象出来，就得到了函数概念。

定义 设有两个变量 x 和 y，变量 x 的变域为 D。如果对于 D 中每个值 x，按照某种确定的对应关系，都可求得变量 y 的唯一一个对应值，我们就说变量 y 是变量 x 的一个函数，记作

$$y=f(x).$$

x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，D 称为函数的**定义域**。

三 对函数概念的几点说明

1. 关于符号"f"

函数 $y=f(x)$ 中的符号 f，表示自变量 x 与因变量 y 之间的对应关系。

在例 1 中圆面积 s 是半径 r 的函数，可记为

$$s=f(r)=\pi r^2.$$

这里"f"是指"自变量的平方乘以 π"这样一种对应关系。

在例 2 中距离 s 是时间 t 的函数，可记作

$$s = f(t) = \frac{1}{2}gt^2.$$

这里"f"是指"自变量的平方与$\frac{1}{2}g$相乘"这样的一种对应关系。

在例 3 中温度 T 是时间 t 的函数，可记作

$$T = f(t).$$

这里"f"表示这样的对应关系：对于 14～24 时之间每取定一个时间 t，在气温曲线上都能找到一个以 t 为横坐标的点。这点的纵坐标 T，就是时间 t 通过对应关系"f"所对应的气温 T。

在例 4 中平均月流量 v 是月份 t 的函数，可记作

$$v = f(t).$$

这里"f"表示这样的对应关系：对于 1～12 间每取一个月份 t，在表格中都能找到它所对应的流量 v，这个流量 v 就是月份 t 通过对应关系"f"所对应的唯一确定值。

2. 关于函数值

对于函数 $y = f(x)$，当 $x = a$ 时对应的函数值记为

$$f(a) \quad 或 \quad y|_{x=a}.$$

在例 1 中，$s = f(r) = \pi r^2$，当 $r = 1$ 时，对应的函数值为 $s = \pi \times 1^2 = \pi$，或 $f(1) = \pi$。

在例 2 中，$s = f(t) = \frac{1}{2}gt^2$，当 $t = 2$ 时，对应的函数值为 $s = \frac{1}{2}g \times 2^2 = 2g$，或 $f(2) = 2g$。

在例 3 中，$T=f(t)$，当 $t=20$ 时，从图形上可以查到 $f(20)=-1.5°$。

在例 4 中，$v=f(t)$，当 $t=7$ 时，从表格上查到 $f(7)=4.3$。

3. 关于函数的定义域

所谓函数的定义域，是指自变量的允许变化范围。如果讨论的函数是从某一实际问题中抽象出来的，那么函数的定义域，要由所研究问题的实际意义来确定。在例 1 中，圆的半径 r 必须满足 $r>0$ 时才有实际意义。在例 2 中，自由落体的时间 t 必须满足 $t\geqslant 0$ 时才有实际意义。如果自由落体降落前距地面高度为 h_0，那么到达地面所用时间为 $\sqrt{\dfrac{2h_0}{g}}$，于是函数 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$ 的定义域为 $0\leqslant t\leqslant\sqrt{\dfrac{2h_0}{g}}$。如果我们所讨论的函数直接由数学式子给出，那么这个函数的定义域是使这个式子有意义的全体实数。如函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的定义域是由零以外的一切实数构成，简记作 $x\neq 0$。又如函数 $y=\sqrt{1-x^2}$，在 $x^2\leqslant 1$ 时等式才有意义，所以函数的定义域为闭区间 $[-1,1]$。而函数

$$y=\lg(1-x^2)+\sqrt{x}+\frac{3}{x-1}$$

可看做三个函数的和，所以函数的定义域应是等式右边三个函数定义域的公共部分。其中 $\lg(1-x^2)$ 的定义域是开区间 $(-1,1)$；$\sqrt{x}$ 的定义域是区间 $[0,+\infty)$；$\dfrac{3}{x-1}$ 的定义域是 $x\neq 1$ 的全体实数。所以，函数 y 的定义域是它们的公共部分半闭区间 $[0,1)$。