中学生文库

图论中的几个极值问题

TULUNZHONG DE JI GE JIZHI WENTI

上海教育出版社

图论中的几个极值问题

中学生文库

图论中的几个极值问题

管梅谷

上海教育出版社

内 容 提 要

图论是近年来发展较快，用途很广的一个数学分支。特别是图论中的各种极值问题，对于工农业生产更有直接的应用。本书选取了一些基本的图论极值问题，深入浅出地叙述了它的解法。目的是使中学生能够了解这一领域的一些分析问题的思想方法，并学到一些具体解决问题的技能。

中 学 生 文 库· 图论中的几个极值问题

管 梅 谷 上 海 教 育 出 版 社 出 版
（上海永福路 123 号）
上海市印刷四厂印刷 新华书店上海发行所发行
开本 787×1092 1/32 印张 5.75 字数 121,000
1981 年 9 月第 1 版 1981 年 9 月第 1 次印刷
印数 1－49 000 本

统一书号：7150·2504 定价：0.43 元

ZHONG XUE SHENG WENKU

目录

引 言

图论是近几十年来发展得最快的数学分支之一. 为什么会发展得这样快呢? 主要是由于在许多科学技术领域中发现了图论的用处, 例如物理、化学、计算机科学、运筹学等等. 本书不想涉及很多方面, 主要想介绍一下图论中的一些极值问题, 这些问题用处很广, 也比较有趣.

为了让大家知道这本书主要讲些什么, 我们先举几个例子.

[例 1] 图 0.1 中画的是一个"图", 当然, 究竟什么叫做"图", 以后还要仔细讲. 这里只要先记住, 我们研究的图, 指的是只由点和线组成的图形. 我们先把图 0.1 看成是一个公路网, $v_1, v_2, v_3, \cdots, v_{10}$ 是一些城镇, 每条线旁边的数字代表这一段公路的长度. 现在问, 要从 v_1 把货物运到 v_{10} 去, 走哪一条路最近?

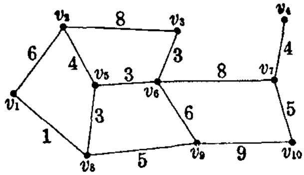


图 0.1

这个问题通常叫做最短路问题. 读者不难看出, 这是一个有很大现实意义的问题. 它不仅出现在各种运输问题中, 而且在计算机线路设计等问题中也有用. 因为这种问题研究的是"从 v_1 到 v_{10} 的所有路中, 哪一条路最短?"因此, 它是一

个极大极小问题，即极值问题，而它又和一个“图”密切联系着，因此这种问题就叫做图论中的极值问题.

[例 2] 仍旧看图 0.1，假设有一个巡回售货队要从 v_1 出发，到 v_2, v_3, …, v_{10} 各地去巡回售货，最后再回到 v_1，问他们应该选择怎样的一条路线，才能既走遍所有的城镇，而走的路程又最少？

这类问题国外称为“旅行售货员问题”．它是一个相当困难的问题，用处也很大，邮局里这类问题就很多．例如，一个开信箱取信的同志，他负责开 30 个信箱，就会遇到这类问题．又如专门负责从一个城市的邮政总局向各个分局运送邮件的汽车，也经常遇到这种问题．因此，也有人把这种问题叫做“邮路问题”．

[例 3] 还是把图 0.1 看成公路网，v_1, v_2, …, v_{10} 看成一个公社的城镇．现在要在这些城镇中选择一处来设立卫生院，问设在哪里最“好”？

当然，首先应该明确一下，怎样才算“好”？举一个简单的例子来说，如果有五个城镇，卫生院设在城镇甲处，其他四个城镇的人来看病时，分别要走 7 里、3 里、2 里、1 里．卫生院要是改设在乙处，则另外四个城镇的病人要走 5 里、4 里、4 里、2 里．在这种情况下，设在甲处好还是设在乙处好？一般说来，还是乙处好，因为设在甲时，最远的病人要走 7 里，而设在乙时，最远的只走 5 里．因此，要判定一个城镇设卫生院好不好，可以按来看病的病人中，最远的病人走的距离为标准（也有其他标准，后面还要讨论）．我们的目的是找这么一个城镇，使得最远的病人所走的路尽量少．

例 2、3 中研究的都是与一个图有关的极大极小问题，因

此也都是图论中的极值问题.

上面的三个问题，都是很明显地和一个图联系着的. 让我们再来讲一个例子，表面上看，它与图并没有什么关系，但是经过分析，仍然可以归结为图论中的极值问题.

[例 4] 英国某空军部队有若干个驾驶员，专门驾驶一种型号的飞机，这种飞机每架需要两个驾驶员. 由于种种原因，例如，语言不通或训练上的问题，有些驾驶员不能在同一架飞机上飞行，问应如何搭配驾驶员，才能使出航的飞机最多.

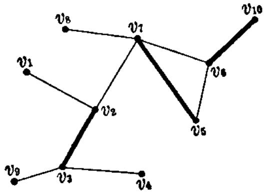


图 0.2

为简单起见，假设有 10 个驾驶员，图 0.2 中的 $v_1, v_2, \cdots, v_{10}$ 就代表这 10 个驾驶员. 如果两个人可以同机飞行，就在代表他们的两个点之间连一条线；两个人不能同机飞行就不连. 从图 0.2 可以看出，v_1 和 v_2 可以同机飞行，而 v_1 和 v_3 就不行. 画了这个图后，就可以在图上来研究搭配飞行员的问题了. 例如，我们可以组成 $\{v_2, v_3\}$，$\{v_7, v_5\}$，$\{v_6, v_{10}\}$ 这么三组，图 0.2 中画的三条粗线就代表这种搭配方案. 注意，任何两条粗线不能有公共的端点，例如，在图 0.2 中，不能再把 v_1 与 v_2 间的连线加粗，因为这样一来，v_2 就既要与 v_1 一起飞，又要与 v_3 一起飞，这当然是不行的. 因此，要使出航的飞机最多，就相当于在图 0.2 中把尽量多的线加粗，而加粗的线要两两没有公共端点. 今后，我们把一个图中两两没有公共端点的一组线叫做一个"匹配". 这样定义以后，上面的问题就成为：如何找一个包含最多线的匹配？ 这个问题叫做最大匹配问题. 请大家试试看，能不能从图 0.2 中找出一个包含

四条线的匹配．再试试能不能找到包含五条线的匹配．

象例 4 那样经过一些分析后才转化为图论中的极值问题的例子很多，后面还要讲，这里就不多举例了．

讲了上面几个例子，现在可以把这本书的目的说一说了．

这本书主要就是讲这类图论中的极值问题．讲它们是怎样从生产实际中提炼出来的；怎样求解这些问题；哪些问题已经有很好的解法了，哪些还没有等等．当然图论中的极值问题很多，我们只能选一些比较基本的来讲讲．在讲这些问题之前，还要先在第一、二两章中讲一些图论的基本知识．这些知识讲起来可能会有些枯燥，不过大家还是要耐心地看下去．因为这些内容是整个这本书的基础，把基础打好了，后面的内容学起来也就容易些了．

一、无 向 图

1. 集合论的一些基本知识

集合论现在已经几乎是所有数学的基础了. 图论当然也不例外. 因此，这里先把今后要用到的集合论中一些最基本的概念和符号讲一下.

我们把任意一些对象所组成的总体叫做一个集合. 以后常常用大写英文字母表示集合. 很容易举出一些集合的例子来.

[例 1] 全体正整数的集合 $\boldsymbol{N}$.

[例 2] 全体实数的集合 $\boldsymbol{R}$.

[例 3] 1, 3, 5, 6, 9 五个数的集合 M.

[例 4] 三角形 ABC 的边的集合 L.

[例 5] 方程 $x^2+1=0$ 的所有实数根的集合 P.

[例 6] 教室中所有桌子的集合 Q.

类似的例子还可以写出很多来.

组成一个集合的对象，叫做这个集合的元素，例如数 1, 5, 10 都是正整数集合 $\boldsymbol{N}$ 的元素；$\sqrt{2}$, π, -3 是实数集合 $\boldsymbol{R}$ 的元素. 以后常常用小写英文字母表示某一个集合的元素. 如果 a 是集合 A 的元素，我们就记作：

$$a \in A,$$

读成“a 属于 A”. 如果 a 不是 A 的元素，则记作:

$$a \overline{\in} A \text{ 或 } a \notin A,$$

读成“a 不属于 A”. 例如: $1 \in \boldsymbol{N}$, $\pi \in \boldsymbol{R}$, 但 $\pi \notin \boldsymbol{N}$.

一个集合可以包含无穷个元素，这种集合叫做无限集合，例如前面的例1、例2中的 N 和 R 都是无限集合. 只包含有限个元素的集合叫做有限集合，例3与例4中的集合 M 和 L 都是有限集合. 今后我们要用到的主要是有限集合.

再来看看例5, 仔细一看就知道，其实这个集合里一个元素也没有，这种什么也不包含的集合叫做空集合，今后用一个固定的符号 ϕ 来表示空集合.

为了说明一个集合是由哪些元素组成的，可以用以下两种办法. 第一种是列举出这个集合的元素，这是在有限集的情况下常用的方法. 如例3中的 M 可以写成:

$$M=\{1, 3, 5, 6, 9\}.$$

又例如集合 V 由 v_1, v_2, $\cdots$, v_{100} 这100个元素组成，则可以记成:

$$V=\{v_1, v_2, \cdots, v_{100}\}.$$

另外一种办法是说明这个集合中的元素具有什么特征. 例如可以把正整数集合 $\boldsymbol{N}$ 记成:

$$N=\{n \mid n \text{ 是正整数}\}.$$

这种写法的意思是: $\boldsymbol{N}$ 是由一些元素 n 组成的，是哪些 n 呢? 就是满足括号中竖线后面所讲的性质的那些 n, 也就是说, n 必须是正整数. 又如例5可以记成:

$$P=\{a \mid a \text{ 是 } x^2+1=0 \text{ 的实数根}\}.$$

这两种表示集合的办法各有长处，今后都将用到.

设 A 和 B 是两个集合，如果 A 与 B 包含的元素完全一样，就说 A 与 B 相等，记作：

$$A=B.$$

如果 A 的元素也都是 B 的元素，我们就说 A 是 B 的一个子集合，记作：

$$A\subseteq B.$$

例如，自然数集合 $\boldsymbol{N}$ 是实数集合 $\boldsymbol{R}$ 的子集合，即 $\boldsymbol{N}\subseteq\boldsymbol{R}$. 而例 3 中 M 又是 $\boldsymbol{N}$ 的子集合.

我们还要引入一个概念，叫做真子集合. 就是：如果 $A\subseteq B$，但 A 与 B 又不相等. 就称 A 为 B 的真子集合. 记成：

$$A\subset B$$

这时，至少有一个元素属于 B 但不属于 A.

设 A 是一个集合，今后常常要用到所有以 A 的一对元素 (a_1, a_2) 为元素的集合，我们把这个集合记作 $A\times A$，它的元素叫做 A 的有序元素对. 例如，$A=\{1, 2, 3\}$，则 $A\times A$ 由 $(1, 1)$，$(1, 2)$，$(1, 3)$，$(2, 1)$，$(2, 2)$，$(2, 3)$，$(3, 1)$，$(3, 2)$，$(3, 3)$ 9 个元素组成. 这里 $(1, 2)$ 和 $(2, 1)$ 看成是不同的，这就是把它们叫做"有序元素对"的原因. 另外，我们还要考虑 A 的无序元素对，它和有序元素对的差别在于把 $(1, 2)$ 和 $(2, 1)$ 这样的对象看成是相同的. 因此，当 $A=\{1, 2, 3\}$ 时，A 的无序元素对就只有 6 个. 就是 $[1, 1]$，$[1, 2]$，$[1, 3]$，$[2, 2]$，$[2, 3]$，$[3, 3]$ 了（这里，为了与有序元素对区别，我们用方括号表示无序元素对）. 我们把 A 的所有无序元素对组成的集合记作 $P_2(A)$. A 的有序元素对和无序元素对这两个概念在图论中是很重要的，这一点在下面两节中马上就会看到.

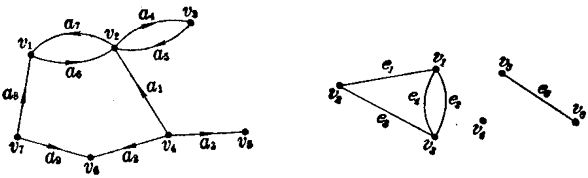
习　　题

1. 设$A=\{1, 2, 3\}$，把 A 的所有子集合都写出来.

2. 设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$，写出 A 的所有有序元素对以及无序元素对.

2. 无向图的定义

我们所讲的图(有些书上也叫线性图)，指的是仅由点和线组成的图形. 例如图 1.1 中画的就是两个图的实例，这两个图之间还有差别，图 1.1(*a*) 中的图 D，每条线上都有一个箭头以代表这条线的方向，这种图叫有向图，图 1.1(*b*) 中的图 G 则叫做无向图.



(*a*)　图 D　　　　(*b*)　图 G

图　1.1

这一章先讲无向图. 分析一下图 1.1(*b*) 中的 G，可以看出，它包含着 6 个点：$v_1, v_2, \cdots, v_6$；5 条线：$e_1, e_2, \cdots, e_5$，或者说 G 是由两个集合组成的，一个是

$$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\},$$

另一个是
$$E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}.$$

另外，还可以看出点和线之间有一定的关系，就是每一条线都以两个不同的点为它的端点，例如 e_1 以 v_1 和 v_2 为端点，e_2 和

e_4 都以 v_1 和 v_3 为端点等等. 下面的定义 1.1 就是从以上的分析中概括出来的.

定义 1.1 设 $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 是空间中 n 个点的集合(这些点可以都在一个平面上，也可以不在一个平面上), $E=\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ 是 m 条线的集合, 如果满足:

(1) V 不是空集合;

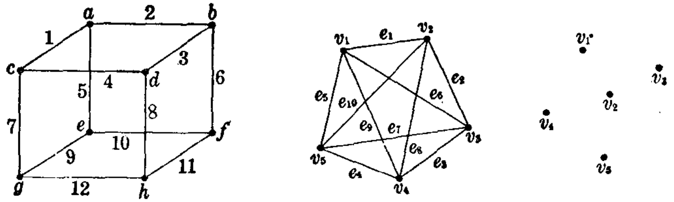
(2) E 的每一条线 e_i 以 V 中的两个不同的点 v_s 与 v_t 为端点.

(3) E 的任意两条线，除了端点以外，没有其他的公共点.

则把由 V 和 E 组成的图形 G 叫做一个无向图, 记作 $G=[V, E]$. 称 V 中的点为 G 的顶点, E 中的线为 G 的边.

因为这一章只讲无向图, 因此, 有时就简单地把一个无向图叫做图.

由定义 1.1 可以看出，图 1.1(b) 中的 G 是一个无向图. 图 1.2 是另外三个无向图的例子. (a)中的 G_1 是由一个立方体的顶点和棱组成的，它的顶点集合是$\{a, b, \cdots, h\}$, 边集合是$\{1, 2, \cdots, 12\}$. 为简单起见，今后也常常用一些小写英文字母和数字来代表顶点和边. (b)中的 G_2 的顶点集合是 $\{v_1,$



(a) G_1 (b) G_2 (c) G_3

图 1.2

$v_2, \cdots, v_5\}$，边集合是 $\{e_1, e_2, \cdots, e_{10}\}$，注意，这里我们把所有对角线看成是互相不相交的，即有些线是从别的线上面飞越过去的；(c) 中的 G_3 只有 5 个顶点，没有边，也可以说，边集合是空集合．请注意定义 1.1 中要求顶点集合 V 不能是空集合，但边集合可以允许是空集合，因此 G_3 也是一个无向图。

从定义 1.1 可以看出，要确定一个无向图，必须明确指出以下三点：

(1) 它包含哪几个顶点(即集合 V 是由哪些元素组成的)．

(2) 它包含哪几条边(即集合 E 是由哪些元素组成的)．

(3) 每条边以哪两个顶点为端点．

至于这些点的位置如何，连接它们的线是直的还是弯的，都无关紧要．今后，称上述三点为一个无向图的三个要素．

例如，图 1.2(b) 中的图 G_2 的三个要素是：

(1) $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_5\}$，

(2) $E=\{e_1, e_2, \cdots, e_{10}\}$，

(3) 每条边的端点如表 1.1 所示．

对于一个无向图来说，只要这三个要素都知道了，我们就可以认为这个图被完全确定了，并且一定可以把它画出来．例

表 1.1

边	端　点	边	端　点
e_1	v_1, v_2	e_6	v_1, v_3
e_2	v_2, v_3	e_7	v_3, v_5
e_3	v_3, v_4	e_8	v_2, v_4
e_4	v_4, v_5	e_9	v_1, v_4
e_5	v_5, v_1	e_{10}	v_2, v_5

如，已经知道了一个图 $G=[V, E]$ 中的 $V=\{v_1, \cdots, v_5\}$，$E=\{e_1, \cdots, e_{10}\}$，又知道各条边的端点如表 1.1 中所列的那样．要想把这个图画出来，只要先任意画 5 个点 $v_1, v_2, \cdots, v_5$，再根据表 1.1 的要求，在 v_1 与 v_2 间连一条边 e_1，在 v_2 与 v_3 间连一条边 e_2，…，最后在 v_2 与 v_5 间连一条边 e_{10}．当然，如果在纸上画，这 10 条边中的任意两条除了在端点处可能相遇外，在其他地方也可能相交，但可假定这张图是画在空间的．并且不在交叉点上画黑点，以表示在这点是飞越过去的，这样就把这个图画出来了．当然，这样画出来的图和图 1.2(*b*) 中的图可能很不一样，例如，很可能画成图 1.3 那个样子(请大家试试看也画一个)．但是从本质来看，这两个图是一样的．

在根据一个无向图的三要素画这个图时，我们常常希望能把这个图的所有顶点和边都画在一个平面上，并且使得任何两条边除了端点外，没有其他的交点．有些图确实能这样，凡能够这样画出的图叫做平面图．例如，图 1.1(*b*) 中的图 G 就是一个平面图．图 1.2(*a*) 中的图，本来是由一个空间六面体的顶点和棱组成的，但是它也可以画成图 1.4 中的那个样子(注意，三个要素一点也没有变)．因此，它也是一个平面

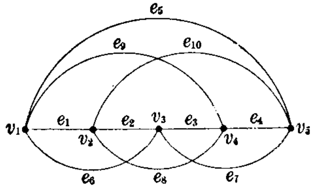


图 1.3

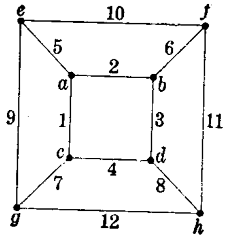


图 1.4

图. 可是也有些图,不管怎样画,都不可能把所有顶点和边画在一个平面上，而使得任意两条边除了端点以外没有其他交点，这种图就叫做非平面图. 图1.2(b)或图1.3中的图G_2就是这样的一个例子. 大家可以试试看，有没有办法把它的5个顶点和10条边都画在平面上. 例如图1.5中已经画了G_2的9条边,还差一条连接v_3和v_5的e_7. 这条边不管怎么画，总要和其他边相交(当然,试了几次,画不出来,还不能就此断定它是非平面图. 要肯定它是非平面图是需要严格证明的,因为证明较麻烦,这里就不仔细讲了).

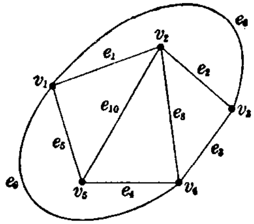


图 1.5

习　　题

1. 写出图1.1(b)、1.2(a)中的无向图的三个要素.

2. 已知图$G=[V, E]$的三个要素为:

(1) $V=\{a, b, c, d, e, f\}$,

(2) $E=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$,

(3) 每条边的端点如下表所示:

边	端　点	边	端　点
1	a, b	7	a, d
2	b, c	8	b, d
3	c, d	9	f, c
4	d, e	10	c, f
5	c, e	11	c, d
6	a, c		

试把G画出来，G是不是平面图?