中学数学分析与解题

天津市和平区数学协会 编著

天津科学技术出版社

内 容 提 要

本书根据国家教委制定的全日制中学数学大纲的要求，按代数、三角、立体几何、解析几何的知识系统编写。本书精选例题和练习，突出“小、巧、活”，重在分析解题思路，总结知识规律，培养学生分析问题解决问题的能力。全书约30万字。

本书可作为高中数学教师的教学参考读物，也是广大青年、学生自学数学的良师益友。

中学数学分析与解题

天津市和平区数学协会　编著

责任编辑：王国利

•

天津科学技术出版社出版

天津市赤峰道130号

山东省临沭县印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

•

开本787×1092毫米1/32　印张15.375　字数325 000

1988年10月第1版

1988年10月第1次印刷

印数：1—14 300

ISBN 7-5308-0257-7/O·18　定价：~~3.20元~~ 4.4元

让学生的学习从被动转为主动，当知识的主人，不当书本的奴隶。

吴大任

一九八五年十月

前　言

为了提高高中数学教学质量，减轻学生学习的负担，我们组织了天津市一中，十六中，二十中，第二南开中学等重点中学、和平区教研室及有关学校多年从事数学教学有丰富经验的教师，编写了《中学数学分析与解题》。

本书按知识系统分章，每章按专题分若干节。根据国家教委制定的全日制中学数学教学大纲的要求，精选例题、突出“小、巧、活”重在分析解题思路，总结知识规律和解题规律。每章后配有适量的练习，可以帮助学生系统掌握和灵活运用所学知识，提高解决问题的能力。本书可作为数学教师的教学参考读物，也可供学生和自学者使用。

参加本书编写的同志有齐家祥、唐玉铎、孙琪、张寅、刘遇周、李沛先、田鹤年、郁林生、吴家珠、韩大卫、佘思源、张羽。

中国数学会名誉理事长，南开大学教授吴大任先生亲笔为本书题词，我们深表感谢。

由于我们的水平有限，书中不妥之处敬请广大读者批评指正。

编　者

1987年10月

目　录

Ⅰ 方　　程

本章重点是一些方程的解法，含参数的方程解的讨论以及一元二次方程根的判别式、韦达定理的应用。

一、几种方程（方程组）的解法

这部分重点介绍一些特殊代数方程、指数方程和对数方程的解法，正确理解方程的同解性，解决方程增减根的问题。

（一）几种特殊方程和方程组

1。二项方程

形如$ax^n+b=0$（a，$b\in C$且$a\neq 0$，$n\in N$）的方程叫二项方程。它可以化为$x^n=-\dfrac{b}{a}$的形式，利用复数开n次方的方法去解。

2。倒数方程

【例1】　解方程$x^4+5x^3+8x^2+5x+1=0$

解：$\because x=0$不是原方程的根，

$\therefore$方程两边同除以x^2，得

$$x^2+5x+8+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

即

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}+2\right)\quad\left(x+\frac{1}{x}+3\right)=0$$

$$x+\frac{1}{x}+2=0\ 或\ x+\frac{1}{x}+3=0$$

解得　$x_{1,2}=-1,\ x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$。

说明：形如$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0(a\neq0)$的方程叫倒数方程，特点是方程左边和首末两项等距离项的系数相等。因为$x=0$不是原方程的根，所以方程两边同除以x^2或同乘以x时，没有破坏方程的同解性，因此所得x值均为原方程的根。

3．换元法解方程

【例2】 解下列方程

（1）$x^4+(x+2)^4=34$；✓

（2）$5x^2+x-x\sqrt{5x^2-1}-2=0$；

（3）$\sqrt{7-\sqrt{7+x}}=x$.

解：（1）由于$x+1$是x与$x+2$的等差中项，可设$x+1=y$，则$x=y-1$，$x+2=y+1$，从而原方程可以化成

$$(y-1)^4+(y+1)^4=34$$

整理得　$y^4+6y^2-16=0$

$$(y^2-2)(y^2+8)=0$$

$$y^2=2,\ y^2=-8,$$

$$\therefore\ y_1=\sqrt{2},\ y_2=-\sqrt{2},\ y_3=2\sqrt{2}i,$$

$$y_4=-2\sqrt{2}i.$$

从而，$x_1=\sqrt{2}-1$，$x_2=-\sqrt{2}-1$，$x_3=2\sqrt{2}i-1$，$x_4=-2\sqrt{2}i-1$。

(2) 设$\sqrt{5x^2-1}=y$，原方程可化为，

$$y^2-xy+x-1=0$$

$$(y-1)(y-x+1)=0$$

$$y=1 \text{ 或 } y=x-1,$$

当$y=1$时，$\sqrt{5x^2-1}=1$，$x=\pm\frac{\sqrt{10}}{5}$，

当$y=x-1$时，$\sqrt{5x^2-1}=x-1$。

两边平方，整理得 $2x^2+x-1=0$，

解得 $x=\frac{1}{2}$，或$x=-1$。

考虑$y=x-1\geqslant0$，因此$x=\frac{1}{2}$，$x=-1$都是增根。

经检验 $x=\pm\frac{\sqrt{10}}{5}$是原方程的根。

(3) 设$y=\sqrt{7+x}$，从而有

$$\begin{cases} y^2=7+x & ① \\ x^2=7-y & ② \end{cases}$$

①－②得 $y^2-x^2=x+y$

$\therefore$ $x+y=0$或$y=x+1$

考虑$x\geqslant0$，$y\geqslant0$，而$x=y=0$显然不是原方程的根；

只有 $y=x+1$，代入①整理，得

$$x^2+x-6=0$$

$$(x-2)(x+3)=0$$

$\therefore$ $x=2$ 或 $x=-3$

由$x\geqslant0$可知$x=-3$是增根，

经检验$x=2$是原方程的根。

说明：用换元法解方程，必须认真观察题目的特点及方程的结构，采取正确的换元步骤，（全部换元或部分换元）

达到解方程的目的。一般来说，换元时应遵循把高次方程降为低次，把无理方程转化为有理方程等。但应注意无理方程由于引进平方运算，可能产生增根，因此必须检验。验根时，只须验证被开方数为非负数且算术根非负即可。

【例3】 解方程 $\sqrt[3]{x+45}+\sqrt[3]{16-x}-1=0$

解：设$\sqrt[3]{x+45}=u$，$\sqrt[3]{16-x}=v$，

则 $u+v=1$

又 $(u+v)^3=u^3+v^3+3uv(u+v)=61+3uv$

∴ $uv=-20$，从而$\sqrt[3]{x+45}\cdot\sqrt[3]{16-x}=-20$

解得 $x=80$ 或 $x=-109$。

另解：$\begin{cases}u+v=1\\uv=-20\end{cases}$ 设u、v是关于y的方程的两个根，

则 $y^2-y-20=0$

解得 $y_1=5$，$y_2=-4$

从而 $\begin{cases}u=5\\v=-4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}u=-4\\v=5\end{cases}$ 代入题设同样可以解得 $x=80$ 或 $x=-109$。

说明：三次根式的无理方程，两边立方一般不会增根。此题也可以把$\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}=1$两边立方，得

$x+45-x+16-3\sqrt[3]{x+45}\ \sqrt[3]{x-16}\left(\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}\right)=1$，

由于$\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}=1$，故原方程可化为

$\sqrt[3]{x+45}\ \sqrt[3]{x-16}=20$

解得 $x=80$ 或 $x=-109$。

4. 利用根与系数的关系解方程

【例4】 已知方程$x^3-9x^2+33x-65=0$的一个虚数根的模是$\sqrt{13}$，解此方程。

解：由实系数一元n次方程虚根的成对性，可设三根分别为$a+bi$，$a-bi$，c，且$a^2+b^2=13$。

由根与系数的关系可知

$$\begin{cases}2a+c=9\\ a^2+b^2+2ac=33\\ (a^2+b^2)c=65\end{cases}$$

$\because \quad a^2+b^2=13 \quad \therefore c=5$

从而 $a=2$， $b=\pm 3$。

因此$x_1=2+3i$，$x_2=2-3i$，$x_3=5$。

说明：一元二次方程根与系数的关系推广到一元n 次方程是：

若一元n次 方 程$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0$，（$a_0\neq 0$，且$n\in N$）的$n$个根为$x_1$，$x_2$，$x_3$，……$x_n$，

则有
$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_n=-\dfrac{a_1}{a_0}\\ x_1x_2+x_1x_n+\cdots\cdots+x_{n-1}x_n=\dfrac{a_2}{a_0}\\ \cdots\cdots\\ x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdots\cdots x_n=(-1)^n\dfrac{a_n}{a_0}\end{cases}$$

5．利用函数性质解方程

【例5】解下列方程

（1）$x+2^x=3$；　　　（2）$2^x=x+1$；

（3）$x^2=\cos x-1$；　　（4）$\log_2(x+1)=2^x-1$。

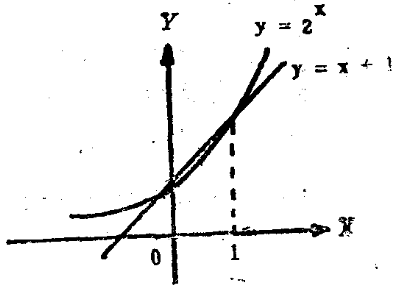
解：（1）$\because y=x+2^x$是

单调增函数，

$\therefore$方程$x+2^x=3$只有一解。

经检验$x=1$是原方程的解。

(2) $\because y=2^x$的图象与直线$y=x+1$交于两点（如图Ⅰ-1），故原方程有两解。



图Ⅰ-1

经检验$x=0$和$x=1$都是原方程的解。

(3) $\because x^2\geqslant0$，$\cos x-1\leqslant0$，

$\therefore x=0$是原方程的唯一解。

(4) $\because y=\log_2(x+1)$和$y=2^x-1$互为反函数，

$\therefore$原方程的解即$2^x-1=x$的解。

经检验$x=0$和$x=1$是原方程的解。

说明：如果方程的一端为超越函数，另一端为代数函数，或者两端都是超越函数，可以从函数的角度，用验证法解方程，但必须证明根的个数。此类方程也可以用图象法求解。

6. 对称方程组

【例6】 解方程组

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=3 & ①\\ xy-x-y+15=0 & ②\end{cases}$$

解：①式两边平方化简，得

$$4(x+1)(y+1)=[7-(x+y)]^2 \quad ③$$

设 $x+y=u$，$xy=v$代入②，③，得

$$\begin{cases} v-u+15=0 \\ 4(u+v+1)=(7-u)^2 \end{cases}$$

解得$\begin{cases} u=7 \\ v=-8 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} u=15 \\ v=0 \end{cases}$

从而$\begin{cases} x+y=7 \\ xy=-8 \end{cases}$或 $\begin{cases} x+y=15 \\ xy=0, \end{cases}$

故 $\begin{cases} x=8 \\ y=-1, \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1 \\ y=8, \end{cases}$ $\begin{cases} x=15 \\ y=0, \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \\ y=15, \end{cases}$

经检验 $\begin{cases} x=15 \\ y=0, \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \\ y=15 \end{cases}$ 是增根。

原方程组的解是$\begin{cases} x=8 \\ y=-1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-1 \\ y=8. \end{cases}$

另解：设$\sqrt{x+1}=u$，$\sqrt{y+1}=v$，且$u\geqslant 0$，$v\geqslant 0$。

则$x=u^2-1$，$y=v^2-1$，代入原方程组可得

$$\begin{cases} u+v=3 & ① \\ (u^2-1)(v^2-1)-u^2-v^2+17=0 & ② \end{cases}$$

方程②化成$(uv)^2-2[(u+v)^2-2uv]+18=0$ ③

把①代入③，得$(uv)^2+4uv=0$

故 $uv=0$ 或 $uv=-4$（舍去）

由 $\begin{cases} u+v=3 \\ uv=0 \end{cases}$ 解得$\begin{cases} u=0 \\ v=3, \end{cases}$ $\begin{cases} u=3 \\ v=0 \end{cases}$

从而原方程的解为$\begin{cases} x=-1 \\ y=8 \end{cases}$， $\begin{cases} x=8 \\ y=-1. \end{cases}$

（二）指数方程和对数方程

【例7】 解下列方程（方程组）

（1）$3^{x+4}-3^x=80$；

（2）$8\cdot 2^{x}=3^{x^{2}-9}$；

（3）$(\sqrt{2}+1)^{x}+(\sqrt{2}-1)^{x-1}$

$-(\sqrt{2}+2)=0$；

（4）$\begin{cases} 2^{x}\cdot 3^{y}=648 & ① \\ 3^{x}\cdot 2^{y}=432 & ② \end{cases}$

解：（1）原方程可化为同底幂形式，

$$81\times 3^{x}-3^{x}=80$$

$$3^{x}=1,\qquad x=0$$

一般地$a^{f(x)}=a^{\varphi(x)}$（$a>0$且$a\neq 1$）①可以化成$f(x)=\varphi(x)$②求解，其中②为代数方程。

② 原方程不能化成同底幂形式，可在方程两端取同底的对数去解。

由 $2^{x+3}=3^{x^{2}-9}$ 得

$$(x+3)\lg 2=(x^{2}-9)\lg 3$$

∴ $x=-3$或$x=\log_{3}54$。

一般地$a^{f(x)}=b^{\varphi(x)}$（$a\neq b$且a、b大于零，全不为1）可以化成$f(x)\lg a=\varphi(x)\lg b$求解。

（3）利用$\sqrt{2}+1$与$\sqrt{2}-1$互为倒数，原方程化为

$$(\sqrt{2}+1)^{x}+(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)^{x}$$

$$-(\sqrt{2}+2)=0$$

设$(\sqrt{2}+1)^{x}=y$，则$(\sqrt{2}-1)^{x}=\dfrac{1}{y}$，

从而$y+\dfrac{\sqrt{2}+1}{y}-(\sqrt{2}+2)=0$，

即 $y^{2}-(\sqrt{2}+2)y+(\sqrt{2}+1)=0$，

$[y-(\sqrt{2}+1)](y-1)=0$

$y=\sqrt{2}+1$或$y=1$,

于是$x=1$或$x=0$。

(4)①×②得　$6^{x+y}=6^7$, $\therefore x+y=7$,

①÷②得　$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-y}=\frac{3}{2}$, $\therefore x-y=-1$。

解得 $\begin{cases} x=3 \\ y=4. \end{cases}$

也可以用观察法求解，原方程化为

$\begin{cases} 2^x\cdot 3^y=2^3\cdot 3^4 \\ 3^x\cdot 2^y=3^3\cdot 2^4, \end{cases}$ 从而 $\begin{cases} x=3 \\ y=4. \end{cases}$

【例8】　解方程$2\lg x-\lg(x-1)=\lg a$。

解：$x>1$，$a>0$，原方程化成

$\frac{x^2}{x-1}=a$，即$x^2-ax+a=0$

解得$x_1=\frac{a+\sqrt{a^2-4a}}{2}$，$x_2=\frac{a-\sqrt{a^2-4a}}{2}$。

$\because x$为实数，$\therefore\ \Delta=a^2-4a\geqslant 0$,

又 $a>0$，　$\therefore a\geqslant 4$。

(1)当$a=4$时，$x_1=x_2=2$；

(2)当$a>4$时，易知$x_1=\frac{a+\sqrt{a^2-4a}}{2}>1$，且$x_2-1=$
$\frac{a-\sqrt{a^2-4a}}{2}-1=\frac{a-2-\sqrt{a^2-4a}}{2}=\frac{2}{(a-2)+\sqrt{a^4-4a}}$
>0，即$x_2>1$。

$\therefore$当$a\geqslant 4$时，x_1，x_2都是原方程的根。

【例9】　解方程$\log_{0.5x}x^2-14\log_{16x}x^3$