弹性力学中的几个空间问题

НЕКОТОРЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

爱尼·拜达（苏）著
佘颖禾 译
诸关炯 校

大学出版社

弹性力学中的几个空间问题

（苏） Э.Н.拜达 著

佘颖禾 译

诸关炯 校

东南大学出版社

内容简介

本书讨论各向同性及各向异性体弹性理论基本方程的一般解的新形式。作者在对前人成果做了大量研究的基础上，作出了全面的综述，并在书中阐述了作者对于某些形式的一般解的普遍性的看法。对于几个与土建工程实际有关的具体空间问题，作者使一般解的一些形式得到了成功的应用。这里，问题的求解是建立在发展了的经典Fourier方法的框架上的，在许多情况下该解法将导致无限维代数方程组的求解，书中对此方程组的闭合解作了讨论。

本书可供对上述弹性力学一般解有兴趣的科学工作者和研究生参考，也可供从事土建工程中实体构件的设计与计算的工程师们使用。

責任編辑 徐步政

弹性力学中的几个空间问题

(苏)Э·Н·拜达 著

余颖禾 译

诸关炯 校

东南大学出版社出版

（南京四牌楼2号）

江苏省新华书店发行 阜宁印刷厂印刷

开本787×1092毫米1/32印张 11 字数245千

1990年5月第1版 1990年5月第1次印刷

印数：1—1000册

ISBN 7-81023-126-10

O·24 定价：2.19元

致中国读者

科学应当说是全社会的财富，所以译著的出版是一件有益的工作。向中国读者介绍这本书可以帮助他们扩大知识面、增长理解力。书中所给出的弹性力学问题的精确解同样也能帮助有关专业人员去评价各种近似解。

作者借这个机会向看过这本书的胡海昌教授和王敏中教授表示谢意。在本书译本的出版工作中，余颖禾教授有很大的功劳。她读了这本书并将它翻译成中文。对此作者深表感谢。

本书的内容对中国高等学校中数学、力学方面的研究生及科研工作者是有益的参考材料。

拜达（Э.Н.Байда）

1987年6月于列宁格勒

前　　言

计算技术与计算数学的成就改变了人们头脑中关于现存的自然科学问题分析方法的简易性的概念。这些问题中也包括了固体的变形力学问题。

人们对于各种问题求解的“复杂”和“简单”的概念已经改变了。现在，我们是把那些通过电子计算机完成大量重复运算即可实现数值计算的解归结为简单解。显然，在计算机上求解问题的主要困难就在于问题的逻辑陈述的复杂性。

Л.И.Седов院士在列宁格勒的高尔基学者之家的一次会议上讲到，力学与物理在计算数学与计算技术发展成就的影响下，情况变得复杂了。他相信，一个问题只要是正确地被提出来并准确地被表示出来了，那末，就可以认为它实际上已被解决了70%～80%。

在这种情况下，对于分析解的兴趣当然是不应该削弱的。因为纯解析的方法往往是传递那些带有普遍意义的想法的媒介。这些想法可以在包括计算数学在内的各种不同的知识领域中被采纳。

本书将介绍作者在求解各向同性及各向异性弹性力学空间问题中所得到的一些分析解。

对于弹性力学空间问题的详细描述及其数值分析方法，虽然已有很多这方面的材料，但本书不想涉及。这里只想说明一下，目前在苏联及其它国家都已编制了弹性力学空间问题计算机求解的通用程序，例如国内一些工厂、研究所等单

位在实际计算中采用了《Spiromak》程序。它是采用有限元方法，能在БЭСМ-6与ЭВМЕС-1033机上实现空间问题的数值求解。

下面详细介绍一下本书中所涉及的问题。

书中讨论了各向同性及各向异性弹性力学方程一般解的不同形式。在某些形式的一般解中，我们更注意研究多余元素（pleonasm）。研究并建立了一些较难的空间问题的解。其中包括有限长度的平行六面体及圆柱体。在［10，20］论文中，作者得到了上述弹性体在一般形式的给定边界位移条件下的解。

与著名波兰固体力学专家S.Kaliski在［178］中所得到的解不同，本书所得到的六面体应力问题的解，在提法上更普遍且数学形式严格。S.Kaliski研究了在均匀边界条件（零位移）下，以及体力为坐标的任意函数的六面体，并找到了它的解。他对这个问题的提法是好的，其中体力还与时间有关。因为在它的表达式中具有表征系统内各点谐波振动的因子$\sin\omega t$。

在我们的工作中［18，23］，讨论了边界条件的两种方案：任意形式的位移与任意形式的载荷，而体积力取为零。

在［18］一文中，研究了第一种边界条件方案中无限维代数方程组的完全一致性。在给定任意边界法向位移分量以及Poisson系数在$0<\sigma<0.5$的范围内，证明了方程的完全一致性，在开始讨论的阶段，切向位移分量取为零。对这个问题，方程完全一致性的证明对于一般情况下代数方程组解的范围以及存在性、唯一性的研究都是很关键的。所谓一般情况，这里是指边界上给定任意位移（位移向量的全部分量均为任意）的情况。

S. Kaliski [178] 对他所得到的解证明了无限维代数方程组解的一致性。一般说来，他（不无困难地）给出了用载荷表示的非均匀任意边界条件下的静态解 。T.M.Валов对Poisson比的变化范围作了严格的限制，在后来的一些研究工作中，这些限制并未被取消。

Lamé认为有可能将这个问题的解，与弹性力学边值问题的一般解联系起来。这个意见引起了人们对这问题的兴趣。1852年Lamé本人首次成功地得出了基本的结果。他讨论了表面有任意法向载荷的情况（切向载荷被取消了，因为在Lamé所采用的一般解中还不具备在函数选取上的那种自由度）。问题当时归结为求解无穷个代数方程的方程组。这种方程组的求解方法他那时还未研究过（这在当时的数学知识水平条件下，也未必就能做到！）。

我们的看法是，Lamé的主要功绩在于他首次发现了叠加上述解的可能性与规律性（后来弄清楚了，这个规律性并不是对所有的Fourier展开形式都适用，见 [26]）。Lamé发现，叠加较简单的弹性层的解可以构成平行六面体的解。这时六面体所占据的空间可以看成是三个无限大层相正交形成的区域。这一思想后来奠定了著名的边值问题的Schwartz-Neumann 的求解法，一般地说也包括弹性力学的边值问题。

Lamé对于六面体问题的重要性估计很高。在他著名的研究报告 [181] 中在把这一问题的解与天体力学中的三体问题比较时，他已预示了建立这个问题的一般解的巨大困难。

目前讨论这一问题的文献甚多，有兴趣的人可以参阅H.H.Суслова的一篇详细的综述文章 [147]。

现在介绍一下现有的平行六面体的解。根据作者的看法，目前在角点和棱边线附近的性质并没有彻底弄清楚，这个范围内目前所取得的成就基本上是与И.И.Ворович，В.Е.Ковальчук以及О.К.Аксентян等人的工作［6，53，81］有关。

解在角点及棱边附近的特殊性质，不仅与物体的边界条件、几何形状有关，而且还和函数空间的选择有关。用Fourier方法建立的解在棱边附近的性质相当复杂。一般说来，棱边与展开项谐量交替的边界重合。

最后还想说明一点，关于角点与棱边附近解的性质问题目前尚未解决这一事实是指，如何在逼近的不同阶段从两个方向来对它估计的问题（而不是指对无限维代数方程组的求解问题）。为了控制和正确地理解计算的结果，就必须能够对离角点及棱边一定距离处的载荷作出这样的估计。

根据我们的意见，要作出这样的估计，最适当的数学基础是无限维代数方程组的闭合形式的解（闭合形式的预解式可以用有限个求和号和积分号写出）。与直接由无穷代数方程组的一致性所得到的信息相比，闭合形式的解能给出更明显、更多的信息。作者在论文［26，30］中，就尝试过对某些简单型的无限维代数方程组建立闭合型的解。在［30］中采用了算子运算法来建立无限维代数方程组的预解式。

谈到目前尚存在的问题，这里还可以提出，当六面体的一个面上给定混合边界条件时，问题的求解就困难了，对于具有非自平衡载荷（即棱边产生分布反力）的情况，尚未建立解析解。

以上我们仅涉及了一个经典空间问题的解。但上述情况在很大程度上与其它各向同性和各向异性弹性力学空间问题

有关。因此作者认为，无需在此再对其它问题作详细介绍了。本书所涉及的一些问题，在解的建立上同样具有相当的难度且具有重要的实用价值。例如，精确满足边界条件的短圆柱体的非轴对称问题，早就引起了不少人的关注。而对于边界给定任意位移向量时的解，看来是我们首先得到的。

我们确信，除了纯理论的结果外，本书的内容里还包括了一些具有实际意义的应用性的结果（如在建筑工程中的应用）。这类结果首先是与各向同性和各向异性的厚板理论有关。在厚板的计算中有必要考虑“强”各向异性。譬如，在由CBAM型薄板组成的固定边的板弯曲问题中，当玻璃纤维铺层面内具有“弱”剪切刚度时，正应力沿厚度方向的分布对于边界条件的实现的细节就非常敏感。这一事实就是通过各向异性厚板理论的研究才发现的。

本书第三章§3中所介绍的具有任意加载形式的平行六面体问题，可以在具有相同形式的建筑结构构件的计算中得到应用（如块状基础、墙梁等）；又可用以估价现有近似方法的精确性；此外，在实验室工作中，它还可以帮助我们了解试件的真实应力分布情况。如考虑摩擦的受压试验等。在这一节中所给出的实例计算，是想用来说明这种解在计算中会产生什么困难，以及所采用的逼近方法在收敛较差的区域内的精度等级。这里对于任意载荷下平行六面体的应力状态所采用的研究手段，从算法的角度看完全适合于电子计算机计算程序的编制。

应当指出，从应用的前景来考虑，以上所讨论的解，可以采用这样的做法：将某些基本的单位载荷所引起的应力制成表格，使之便于用叠加的办法形成任意载荷下的解。也还可以考虑其它的解决方案，譬如，有可能将任何一个物体分

割成有限个六面体，计算这些六面体单元的应力并建立这些单元间的光滑协调条件。这种可能性展示了建立任意形状物体在任意载荷下的具体分析途径。

本书第五章中，通过具体实例所给出的边值问题的求解方案，因其算法简单，所以便于实际应用。这时，解题的困难已转移到代数方程组的求解上了。

这里还想指出，本书中几乎所有的解都是作者首次得到的，并且以论文形式发表过的。只有第一章的§3例外。那里介绍了胡海昌所得到的横观各向同性体一般解的证明。此证明本书引自B.C.Попугаев的学位论文。第二章的§5中的材料反映了上述学位论文的主要结果。但还应当说明，本书所列的B.C.Попугаев论文的内容已经重新整理过了，而且补充了最复杂的齐次解的新型式。

书中介绍了作者所得到的某些无限维代数方程组解的闭合形式。正如前面所指出的，传统做法的特点是要求确立解的一致性：准一致性或完全一致性。但这种要求会限制所得到的解的信息范围。看来，为了扩大对于这种无穷代数方程组解的性质的了解范围，有必要发展闭合解的数学思路。它使人们有可能去研究代数方程组的非一致解的性质。实际上，关于这种解的理论目前尚未研究出来。本书介绍了作者所得到的一些最简单的一致及非一致方程组的解。

借此机会作者在此表示对导师B.A.Гастев的尊敬和怀念。在他的学术影响下，作者得以完成书中所介绍的大部分工作。作者也同时感谢自己的妻子Л.А.Байда在整理手稿上所给予的帮助。

目　录

绪 论

从具体实践的观点来看，弹性力学空间问题在建立一般性而又方便的解法上，比之平面问题的解法所取得的成就要小，在平面问题中藉助复变函数理论成功地得到了一般解。如果说，过去采用某种类似于复变函数理论的“四元”理论去讨论空间问题是一种尝试的话，那末这种尝试不能认为是有成效的。

看来，位势理论在空间问题的求解中占据了与平面问题中的复变函数理论相当的地位。尽管实质上不尽相同，但无论如何它们的一般性是相当的。位势理论虽然能满足空间弹性力学一般问题的要求，但在具体问题的应用上会遇到困难。此外，这种理论不能够克服在建立具有角点及棱边的物体的边值问题解时所遇到的麻烦。在这里一般的提法是：弹性物体应当被限制在Ляпунов表面所包括的范围内。

下面详细地介绍一下在空间问题求解中的主要成就、基本思想及历史概况。

1829年，Poisson在论文［190］中写出了弹性力学的一般方程。他和Navier一样，是从微粒的相对位置变化所引起的分子相互作用力的考虑得出的。这项工作的主要结果后来曾引起Cauchy、Green和Stokes等人的争论。它的意义首先在于，它是一般理论在一系列特殊问题上应用的第一次尝试。

后来，对于弹性体的连续性的概念简化了问题的提法。

但是，对于一个具有一定形状、一定材料和有一定边界条件的物体，在寻找微分方程的解时遇到了数学上的困难。Love在[107]论文中指出了一般理论在固体平衡问题中应用的两个基本途径，这两个途径奠定了早期弹性力学的基本模式。

第一条途径是建议采用Fourier方法。Lamé和Clapeyron [182] 首次将它应用于任意压力作用下半无限体的平衡问题。当一族坐标面上的边界条件被满足时此方法很有效。

目前，人们正在努力研究用Fourier方法解决两族或三族坐标面上的任意边界条件问题。研究这种形式的解所遇到的主要困难在于，要研究问题最终所归结的代数方程组的解的存在性与唯一性。

第二条途径是Green在位势理论中所用的方法的推广。这一途径所用的方法是建立在，对于内部或表面上有奇点的定积分形式解的描述上。

早在1872年，Betti就找到了膨胀量和旋转分量与表面边界条件的关系。Betti的结果概括出了一个在调和函数理论中的重要关系，它把调和函数在边界上的值及其法向导数的值与函数在区域内的值联系起来了。

在上述的方向上，后期的发展与Fredholm有关，他把第一类边值问题归结为线性积分方程的求解。G.Lauricella [183] 和Fredholm一样也发现了弹性力学第一基本问题与调和函数的Dirichlet问题之间的相似性。

弹性力学第二类问题（给定边界应力的问题）的位势理论的实施比较复杂，不可能将给定的边界应力化成余法向导数。实质上，这就是寻找Neumann类问题的解的主要障

碍。后来弄清楚了，对第二类边值问题位势法直接导致一个积分方程，而且它的核不是一致的（Fredholm 定理在此不能用），这个相当于一致性的问题就成为主要的困难了。

具有奇异核的单个方程的积分方程理论，主要是Ж. Жиро和C. Г. Михлин建立的（表面积分应当理解为Cauchy主值意义下的积分）。这些结果在积分方程组中的推广，具体地说，在弹性力学方程中的推广可以在C. Г. Михлин [113]，B. Д. Купрадзе [86] 和И. C. Аржаных [11] 等专著中找到。

B. П. Глушко 在他一篇很有意思的文章 [63] 中讨论了位势型算子的性质，T. Г. Гегелия 在 [61] 一文中对于比Ляпнов 表面范围更广的情形证明了存在定理。

除了上述两种途径之外，现代尚有其它的求解弹性力学空间问题的有力工具。变分方法在弹性力学中开始是由Rayleigh和Ritz奠定的。后来，通过C. П. Тимошенко，Б. Г. Галеркин，H. M. Крыов，A. H. Диник，A. C. Лейбензон，M. M. Филоненко-Бородич 及其它人的工作，在应用方面有了很大的发展。一些知名的专家，象M. B. Кельдыщ，C. Г. Михлин，M. Г. Слободянский，A. B. Контрович等讨论了这一方法的复杂的收敛性问题及解的稳定性问题。

Fourier，Mellin和Henkel等人的经典积分变换方法使一系列重要的弹性力学问题得以解决。对于混合问题采用Мелер-фок与Кантрович-Лебедев 的变换比较方便。这里我们仅仅援引了H. H. Лебедев [91, 92] 和Я. C. Уфилян [151] 的原始工作。

在弹性力学中采用Schwartz 和 Schwartz-Neumann

等交替法是很有前途的，用这些方法可以建立两个或多个有已知解的区域的联合体的边值问题。

Schwartz算法在弹性力学空间问题应用中的平均收敛性证明是С.Л.Соболев给出的［139］、他为此首次采用了变分方法。С.Г.Михлин研究了Schwartz算法的一致收敛性。

最后还要指出，弹性力学问题的一些实用的近似求解法可以在下面的一些有有意思的研究工作中找到：Л.П.Винокуров［50］，А.П.Филин［135］，М.Г.Слободянский［135］和В.И.Пустыников［128］。

近廿年来，有不少从事计算研究的人在求解平面问题及某些空间问题时成功地使用了有限元法。有限元法在算法上的简便和它的通用性是无法低估的。

现在来考察一些能简化空间问题分析的辅助手段。

在这类手段中有用广义函数法建立边值问题的研究。广义函数在边界上的要求比较低，而且总是可以满足的，因为这时只要求在边界点的每个小区域内在积分意义下满足边界条件。而经典的做法是，在一些问题中不允许在各单独的边界点上满足边界条件。此外，在现有的导数及无穷级数求和的定义下，不必考虑广义导数的可微性和相应的收敛性，因为它们总是有保证的。

Dirac δ函数在一系列的讨论中效果突出。它不是经典意义下的函数，而是属于奇异的广义函数。这个函数一般说来是在中间过程中采用的，而且在最终的结果中它是在积分号内出现的。

С.Л.Соболев［196］在讨论双曲型方程的Cauchy问题解的唯一性时，首先引入了广义函数的概念。对于广义函

数基本理论的系统论述可参考L. Schwartz[195]，И. М. Гельфанд和Г. Е. Шилов [62] 等著作。

早在1862年，Airy在讨论应力分量可用某个统一函数表示的平面问题时得到了Cauchy平衡方程的解。Maxwell把这一思想推广到三维问题。为了要得到与Airy类似的解，他采用了三个“应力函数”。Airy所解的问题中只有一个连续条件，所以就有可能把弹性力学问题归结为一个在边界给定双调和函数值及其法向导数的双调和方程的解。随后，由于双调和函数可以用平面内的两个复变函数表示，且边界条件也可以用复变函数给出，使得Г. В. Колосов [84] 和Н. И. Мушхелишвили [114] 成功地将复变函数理论应用于平面问题。

И. Н. Векуа [49] 在研究具体的边值问题时，将采用一般解的思想推广到椭圆形方程。

Airy的思想在应用中的成就，对于那些想在弹性力学空间问题求解中利用一般解的形式来简化求解过程的人们，无疑是一种鼓励。但这对具体问题的求解还远远谈不上有什么简化。

当然，人们的注意力是集中在那些用已研究成熟的函数来描述的一般解上，具体地如Betti和Л. Ликтенштейн在证明弹性力学解的存在性时把位移向量$\mathbf{V}$和任意的调和向量$\boldsymbol{\delta}$用下面的关系联系起来：

$$\mathbf{V}+\frac{1}{2(1-2\sigma)}\mathbf{r}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}=\boldsymbol{\delta}$$

其中 $\mathbf{r}=xi+yj+zk$。

В. Черрути采用了另一种位移向量$\mathbf{V}$与调和向量$\boldsymbol{\delta}$的关