普通高等教育“十五”国家级规划教材

高等代数

姚慕生 编著

復旦大學出版社
www.fudanpress.com.cn

普通高等教育“十五”国家级规划教材

高等代数学

姚慕生　编著

复旦大学出版社

内 容 提 要

本书以线性空间为纲，在线性空间的框架下展开线性代数的内容，其中包括：行列式与线性方程组、矩阵、线性空间、线性映射、多项式、特征值与特征向量、相似标准型、二次型、内积空间、双线性型等．本书力求将几何直观与代数方法有机地结合起来，使抽象的数学概念变得更容易理解．本书是高等学校数学系的教材，也适合统计系、理工科各系，以及经济、管理类专业的学生、研究生和教师参考．

图书在版编目(CIP)数据

高等代数学/姚慕生编著．—上海：复旦大学出版社，2003.6
普通高等教育"十五"国家级规划教材
ISBN 7-309-03541-0

Ⅰ．高…　Ⅱ．姚…　Ⅲ．高等代数-高等学校-教材　Ⅳ．015

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 006332 号

高等代数学

姚慕生　编著

出版发行　复旦大学出版社
上海市国权路 579 号　200433
86-21-65118853(发行部)　86-21-65109143(邮购)
fupnet@fudanpress.com　http://www.fudanpress.com

责任编辑　范仁梅
装帧设计　周　进
总 编 辑　高若海
出 品 人　贺圣遂

印　　刷　复旦大学印刷厂
开　　本　787×960　1/16
印　　张　23
字　　数　425 千
版　　次　2003 年 6 月第一版　2003 年 6 月第一次印刷
印　　数　1—4 000

书　　号　ISBN 7-309-03541-0/O·302
定　　价　35.00 元

编 者 的 话

一、编写指导思想

高等代数是大学数学系学生的一门基础课. 本书是根据国家教育部关于综合性大学数学系的课程设置及教学大纲的要求编写的,可作为综合性大学数学系、师范大学数学系的教材或教学参考书,也可供力学、物理学、工程学、经济学、管理学等系科学生与教师作参考书.

高等代数是一门基础课,它涉及的内容都是早已积累起来的成熟知识. 我们的目的是要根据现代科学技术发展的需要,通过进一步的整理和组织,使学生学到必要的基础知识,为今后的学习和工作打下良好的基础.

本书在结构上采用以线性空间为纲的做法,即把高等代数的主要内容放在线性空间的框架下展开,同时对必要的代数方法也作了尽可能详细的介绍. 事实表明:几何的直观可以帮助学生更好地理解,而代数方法则往往比较简洁直接. 如何使两者有机地结合起来是一个值得研究的问题,编者希望在这一方面作一尝试. 本书常常采用这样的方法:在线性空间的框架下"几何地"提出问题,再把问题"代数化",然后用代数方法来解决问题.

学生能力的培养比单纯知识的积累更重要. 本书在叙述基础知识的同时,努力做到交代清楚概念的来龙去脉. 通过不断地提出问题、分析问题、指明解决问题的途径,让学生主动地思考问题,提高分析能力.

高等代数的内容极其丰富,人们很难简单地断言哪些是有用的,哪些是没有用的. 此外,学生的需要和能力是因人而异的,因而每个学生对学习内容的要求也不相同. 我们不可能做到面面俱到,因此在选材上只能选择最基本、最重要的内容. 同时为了照顾不同的需要,把一些内容作为选修(即打 * 号的内容),教师应鼓励学有余力的学生学习这些内容.

二、内容说明

全书共分 10 章.

第一章主要讲行列式.在行列式的引进上采用比较容易理解的方法,即从解线性方程组提出问题,用归纳的方法引进行列式.这样做的好处是目的性强,容易为学生接受.Cramer 法则放在比较前面也是为了同一个目的.

第二章介绍矩阵的基本概念和运算.重点放在矩阵的乘法和矩阵的初等变换上.对分块矩阵也作了比较详细的介绍.

第三章引进线性空间的概念.从学生熟悉的二维和三维空间出发,引入 n 维向量和 n 维空间.我们把线性空间的基域假设为一般的数域,这样虽然在开始时比较抽象,但对以后的学习有很大的好处.对一般抽象的 n 维空间,我们尽早引入坐标的概念使之表示为具体的 n 维行向量空间或列向量空间.这种把几何的概念代数化的思想将在以后的章节中重复出现,并且作为一种基本的方法要求学生熟练掌握.

在引进子空间概念后我们立即引进了直和的概念,为相似标准型理论的几何背景作好准备.

对向量的线性关系、向量组秩的概念和矩阵秩的概念等作了统一处理,从而精简了篇幅.

线性方程组的解可以借助子空间的概念来阐明,这样可以使线性方程组的解有了几何意义.当然解法仍然是“代数的”,即用矩阵方法.

第四章主要介绍线性映射和线性变换的概念.在思想方法上重点向学生阐明线性映射(或线性变换)与矩阵的关系,让学生学会如何把一个“几何的”问题代数化并用代数的工具加以处理,或者反过来把一个代数的问题“几何”化,用线性空间的理论来解决它.

第五章介绍多项式.多项式理论在本课程中主要作为标准型理论的准备而安排的,因此在内容上可以根据实际情况加以取舍.

第六章介绍特征值.特征值与特征向量是作为一维不变子空间而引进的,这种引进方法具有直观的几何意义.接着就用它们来解决矩阵相似于对角阵的问题.Cayley-Hamilton 定理的引进和证明采用了典型的几何与代数相结合的方法.

第七章介绍相似标准型.相似标准型的理论有各种讲述法,我们采用比较简单的 λ-矩阵的方法.首先把数字矩阵的相似等价于它们的特征矩阵的相抵,然后用 λ-矩阵的初等变换来求法式,求不变因子和初等因子.这样处理不仅比较简单易算,而且可以向学生介绍处理各种标准型问题的思想方法.

由于约当标准型的重要性,约当型将作重点介绍.这一章的处理方法基本上是“代数”的,为了让学生从几何的角度来了解标准型理论,我们在本章第七节介绍了根子空间和循环子空间的概念.考虑到矩阵函数在后继课程中的用途,我们

在最后一节中作了介绍,可作为选修内容.

第八章介绍二次型.在二次型理论的叙述中,我们仍然将几何问题与代数方法紧密结合,把几何问题代数化,然后用矩阵来处理.

第九章介绍内积空间.内积空间主要介绍欧氏空间的理论,但同时也介绍酉空间的理论,而且在一些地方加以统一的处理.这种安排的目的是让学生对复空间不再感到神秘,看到复线性空间理论与实空间理论的共同之处.

正规算子、谱分解等概念在通常的线性代数中不作介绍,但这是一些重要的概念,可以作为选修的内容让学有余力的同学选学.

最小二乘解是很有用的,用欧氏空间来处理非常直观和简单,因此也把它作为选学内容.

第十章介绍双线性型.这一章都是选修内容.安排这部分内容主要考虑在我国的大学教育中很少有这方面的内容,而这些内容对数学学科又具有重要的意义,让有兴趣的学生学习这一内容是有益的.

本书是编者在复旦大学数学系多年教学实践的基础上编写而成的,并在教学实践中作了多次修改.尽管如此,限于编者的水平与经验,错误和不妥之处在所难免,恳请专家、学者和读者提出宝贵意见.

编 者

2002 年 7 月

目　　录

第一章　行列式 …… 1

§1 1　行列式的定义 …… 1

§1 2　行列式的性质 …… 7

§1 3　Cramer 法则 …… 14

§1 4　行列式按行展开与转置 …… 18

§1 5　行列式的计算 …… 20

§1 6　行列式的等价定义 …… 28

* §1.7　Laplace 定理 …… 31

第二章　矩阵 …… 41

§2.1　矩阵的概念 …… 41

§2.2　矩阵的运算 …… 43

§2.3　方阵的逆阵 …… 55

§2.4　矩阵的初等变换与初等矩阵 …… 58

§2.5　矩阵乘积的行列式与初等变换法求逆阵 …… 67

§2.6　分块矩阵 …… 74

* §2.7　Cauchy-Binet 公式及其应用 …… 83

第三章　线性空间 …… 90

§3 1　数域 …… 90

§3 2　*n* 维向量 …… 92

§3 3　线性空间 …… 95

§3 4　向量的线性关系 …… 98

§3 5　基和维数 …… 101

§3 6　基变换与过渡矩阵 …… 109

§3 7　子空间 …… 115

§3 8　矩阵的秩 …… 120

§3 9　线性方程组的解 …… 128

第四章　线性映射 …… 141

§4 1　线性映射的概念 …… 141

§4.2 线性映射的运算 …… 145
§4.3 线性映射与矩阵 …… 148
§4.4 线性映射的像与核 …… 154
§4.5 不变子空间 …… 159
第五章 多项式 …… 164
§5.1 一元多项式代数 …… 164
§5.2 整除 …… 166
§5.3 最大公因式 …… 169
§5.4 因式分解 …… 174
§5.5 多项式函数 …… 178
§5.6 复系数多项式 …… 180
§5.7 实系数多项式 …… 186
§5.8 有理系数多项式 …… 190
§5.9 多元多项式 …… 194
§5.10 对称多项式 …… 197
§5.11 结式和判别式 …… 202
第六章 特征值 …… 209
§6.1 特征值和特征向量 …… 209
§6.2 对角化 …… 216
§6.3 极小多项式与 Cayley-Hamilton 定理 …… 221
*§6.4 特征值的估计 …… 225
第七章 相似标准型 …… 231
§7.1 多项式矩阵 …… 231
§7.2 矩阵的法式 …… 235
§7.3 不变因子 …… 239
§7.4 有理标准型 …… 242
§7.5 初等因子 …… 246
§7.6 Jordan 标准型 …… 248
§7.7 Jordan 标准型的进一步讨论和应用举例 …… 255
*§7.8 矩阵函数 …… 260
第八章 二次型 …… 268
§8.1 二次型与矩阵的合同 …… 268
§8.2 二次型的化简 …… 273
§8.3 惯性定理 …… 278

§8.4　正定型与正定矩阵 ………………………………………………… 281
* §8.5　Hermite 型 …………………………………………………………… 285
第九章　内积空间 ……………………………………………………………… 290
§9.1　内积空间的概念 …………………………………………………… 290
§9.2　正交基 ………………………………………………………………… 295
§9.3　伴随 …………………………………………………………………… 301
§9.4　正交变换和酉变换 ………………………………………………… 304
§9.5　自伴随算子 …………………………………………………………… 310
§9.6　复正规算子 …………………………………………………………… 315
* §9.7　实正规矩阵 …………………………………………………………… 318
* §9.8　谱 ……………………………………………………………………… 324
* §9.9　最小二乘解 …………………………………………………………… 329
第十章　双线性型 ……………………………………………………………… 336
§10.1　对偶空间 …………………………………………………………… 336
§10.2　双线性型 …………………………………………………………… 340
§10.3　纯量积 ……………………………………………………………… 345
§10.4　交错型与辛空间 …………………………………………………… 349
§10.5　对称型与正交几何 ………………………………………………… 352

参考书目 ……………………………………………………………………… 358

第一章　行　列　式

在许多实际问题中，人们常常会碰到求解线性方程组的问题．所谓线性方程组是指一组含有若干个未知数的一次方程式．我们在中学里已经学过如何求一元一次方程、二元一次方程组及三元一次方程组的解．现在研究由 n 个未知数组成的一次方程组．令 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 n 个未知数．一个 n 元线性方程组（或称 n 元一次方程组）的一般式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

其中 $a_{ij}, b_i\ (i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, 2, \cdots, n)$ 都是常数．

(1.1.1)式称为 n 元线性方程组的标准式．凡经过移项、合并同类项运算可以化为形如(1.1.1)式的方程组都称为线性方程组．一个线性方程组是否有解？如果有解，共有多少解？如何把这些解求出来？我们将在这一章中给出初步的回答．

为了研究一般的线性方程组的解，我们首先回忆一下中学里学过的解二元一次及三元一次方程组的方法．有两种办法可供使用，即代入消元法及消去法．先来看一个简单的例子．

例 1　求解二元一次方程组：

$$\begin{cases} 2x - y = 5, \\ 3x + 2y = 11. \end{cases} \tag{1.1.2}$$

解　用代入消元法，在第一个方程式中解出 y 用 x 表示的式子：

$$y = 2x - 5.$$

代入第二个方程式中得到

$$3x+2(2x-5)=11.$$

整理后得

$$7x=21.$$

解得 $x=3$,代入 $y=2x-5$ 求得 $y=1$. 于是上述线性方程组有唯一组解:

$$\begin{cases}x=3,\\ y=1.\end{cases}$$

读者不难想象这种方法也可用来解一般的线性方程组. 比如对一个含 10 个未知数的方程组,利用一个方程式将第一个未知数用其他 9 个未知数表示出来以后分别代入其余方程式,于是原来的方程组就化为只含有 9 个未知数的方程组了. 再用同样的方法可以得到一个只含 8 个未知数的方程组等等. 一直可以做到只含 1 个未知数. 解出这个一元一次方程式并返回去求所有其他未知数. 这个办法在理论上是可行的,但是当未知数个数比较多时,运算变得十分繁复以致无法求出结果来. 另外,用代入法无法得出一个规范化的公式,这对于从理论上分析线性方程组的解来说不能不是个很大的缺陷. 于是我们转而来考察另一种方法,看看能否给我们一点启示. 我们要用消去法解下列二元一次方程组:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2.\end{cases}$$

用 a_{22} 乘第一式的两边,用 $-a_{12}$ 乘第二式的两边得:

$$\begin{cases}a_{11}a_{22}x_1+a_{12}a_{22}x_2=a_{22}b_1,\\ -a_{12}a_{21}x_1-a_{12}a_{22}x_2=-a_{12}b_2.\end{cases}$$

将这两个方程式两边相加得:

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=a_{22}b_1-a_{12}b_2.$$

于是

$$x_1=\frac{a_{22}b_1-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

用类似的办法消去 x_1,解得:

$$x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

如果我们引进二阶行列式,则上述解可用行列式表示:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}. \tag{1.1.3}$$

这里,一个二阶行列式的值是这样定义的:

$$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc.$$

我们通过消去法得到了二元一次方程组解的公式.虽然用消去法可以求解二元一次方程组,但是随着未知数的增多,用消去法求解也变得困难起来,而在用行列式表示的解公式(1.1.3)中,解的表达有一定的规律可循:

(1) x_1 与 x_2 的分母都是行列式$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$,即只需将原方程组未知数前的系数按原顺序排成一个行列式即可.

(2) x_1 的分子行列式的第一列是原方程组的常数列,第二列由 x_2 的系数组成,因此这个行列式可以看成是将 x_1 与 x_2 的分母行列式$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$中的第一列换成常数项而得.这个规则对 x_2 的分子行列式也适用.

正因为用行列式来表示二元一次方程组的解有简单明了的优点,我们希望也能用它来表示 n 元线性方程组的解.为此,我们来讨论三元一次方程组,希望通过求解三元一次方程组,从而找出一点规律性来.现设有三元一次方程组:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.\end{cases} \tag{1.1.4}$$

我们希望像解二元一次方程组一样,先用消去法,再求出解的行列式表示式.假定存在3个数 A_{11}, A_{21}, A_{31},分别用它们乘以方程组(1.1.4)中的第一、第二、第三个方程式的两边得到:

$$\begin{cases}a_{11}A_{11}x_1+a_{12}A_{11}x_2+a_{13}A_{11}x_3=b_1A_{11},\\ a_{21}A_{21}x_1+a_{22}A_{21}x_2+a_{23}A_{21}x_3=b_2A_{21},\\ a_{31}A_{31}x_1+a_{32}A_{31}x_2+a_{33}A_{31}x_3=b_3A_{31}.\end{cases} \tag{1.1.5}$$

将3个方程式相加,我们希望消去 x_2 与 x_3,即这两个未知数的系数应等于零,

于是得下列两个等式：

$$\begin{cases}a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+a_{32}A_{31}=0,\\ a_{13}A_{11}+a_{23}A_{21}+a_{33}A_{31}=0.\end{cases}\tag{1.1.6}$$

一旦求出 A_{11}，A_{21}，A_{31}，便有：

$$(a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31})x_1=b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31}.$$

令 $A=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}$，若 $A\neq 0$，则

$$x_1=\frac{b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31}}{A}.\tag{1.1.7}$$

为决定 A_{11}，A_{21}，A_{31}，将(1.1.6)式改写为

$$\begin{cases}a_{22}\dfrac{A_{21}}{A_{11}}+a_{32}\dfrac{A_{31}}{A_{11}}=-a_{12},\\ a_{23}\dfrac{A_{21}}{A_{11}}+a_{33}\dfrac{A_{31}}{A_{11}}=-a_{13}.\end{cases}\tag{1.1.8}$$

将$\dfrac{A_{21}}{A_{11}}$，$\dfrac{A_{31}}{A_{11}}$看成未知数，用行列式求出它们的解为

$$\frac{A_{21}}{A_{11}}=\frac{\begin{vmatrix}-a_{12} & a_{32}\\ -a_{13} & a_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{22} & a_{32}\\ a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}},\quad \frac{A_{31}}{A_{11}}=\frac{\begin{vmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ a_{23} & -a_{13}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{22} & a_{32}\\ a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}}.$$

为了更清楚地显示出规律性，我们把上面的行列式稍加整理：

$$\begin{vmatrix}-a_{12} & a_{32}\\ -a_{13} & a_{33}\end{vmatrix}=-a_{12}a_{33}+a_{13}a_{32}=-\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ a_{23} & -a_{13}\end{vmatrix}=-a_{13}a_{22}+a_{12}a_{23}=\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}a_{22} & a_{32}\\ a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}=\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

不妨令

$$A_{11}=\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\quad A_{31}=\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix},$$

则 A_{11}，A_{21}，A_{31}适合(1.1.8)式. 代入(1.1.7)式即可求出 x_1. 用同样的办法可求出 x_2 及 x_3. 为了进一步摸索规律，我们可把原方程组的解写得更整齐些，定义三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},$$

其中$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$由上面的三阶行列式划去 a_{11}所在的行与列(即第一行与第一列)得到，它称为 a_{11}的余子式. 同样 a_{21}的余子式$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$由划去 a_{21}所在的行与列得到. a_{31}的余子式$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$由划去 a_{31}所在的行与列得到.

有了三阶行列式，方程组(1.1.4)的解可以用行列式简单地表示出来. 对 x_1，由(1.1.7)式立即得：

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

同理可求出：

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

注意到在 x_1，x_2，x_3 的表示式中，它们的分母都相同，分子行列式由分母行列式去掉对应于 x_i 的第 i 列，换上常数列 b_1，b_2，b_3. 这些特点与二元一次方程组是一样的，我们希望用这样的办法来表示出 n 元线性方程组的解.

我们先来定义 n 阶行列式的概念. 记

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1.1.9}$$

它由 n 行 n 列共 n^2 个元素组成，称为 n 阶行列式. 记 M_{ij} 为元素 a_{ij} 的余子式，即由行列式 A 中划去第 i 行第 j 列后剩下的 $n-1$ 行与 $n-1$ 列元素组成的行列式：

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

我们可用归纳法来定义 A 的值.

定义 1.1-1 当 $n=1$ 时，(1.1.9)式的值定义为 $A=a_{11}$. 现假定对 $n-1$ 阶行列式已经定义了它们的值，则对任意的 i, j, M_{ij} 的值已经定义，定义 n 阶行列式 A 的值为

$$A=a_{11}M_{11}-a_{21}M_{21}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}. \tag{1.1.10}$$

显然，对于任一自然数 n, (1.1.10)式给出了一个计算 n 阶行列式的方法：将 n 阶化为 $n-1$ 阶，再化为 $n-2$ 阶 ……最后便可求出 A 的值. (1.1.10)式又称为 A 按第一列展开的展开式.

为了使(1.1.10)式的形状更好些，我们引进代数余子式的概念.

定义 1.1-2 在行列式 A 中，a_{ij} 的代数余子式定义为

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

其中 M_{ij} 是 a_{ij} 的余子式.

由定义 1.1-2, (1.1.10)式可写为如下形状：

$$A=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}. \tag{1.1.11}$$

读者可以发现，我们的定义与二阶、三阶行列式的定义是一致的. 以二阶行列式为例，设有二阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

a_{11}的余子式 $M_{11}=a_{22}$，a_{21} 的余子式 $M_{21}=a_{12}$，故 $A_{11}=(-1)^{1+1}a_{22}=a_{22}$，$A_{21}=(-1)^{2+1}a_{12}=-a_{12}$. 而

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

三阶行列式的情形读者可自行验证.

习 题

1. 设有五阶行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 5 & 1 \end{vmatrix},$$

求第一行第一列元素 1 的余子式及代数余子式. 再求第三行第四列元素 1 的余子式及代数余子式.

2. 按定义 1.1-1 计算下列行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -4 \end{vmatrix}$； (3) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

3. 写出下列行列式所有代数余子式之和：

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}.$$

§1.2 行列式的性质

在上一节里，我们引进了 n 阶行列式的概念. 我们希望用它来解 n 元线性方程组. 为了实现这个目标，我们先来研究行列式的性质.

性质 1 若 A 是一个 n 阶行列式，且

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{或 } A=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 $A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

（注 $a_{ii}(i=1, 2, \cdots, n)$ 称为 A 的主对角线元.）

证明 我们称上式中左边的行列式为上三角行列式（这时 $a_{ij}=0$ 对一切 $i>j$ 成立）；右边的行列式为下三角行列式（这时 $a_{ij}=0$ 对一切 $i<j$ 成立）. 现在用归纳法分别证明上述结论. 当 $n=1$ 时结论显然成立. 对上三角行列式，由定义 1.1-1，有

$$A = a_{11}M_{11}.$$

但 M_{11} 仍是一个上三角行列式，故由归纳假设 $M_{11}=a_{22}\cdots a_{nn}$ 即知

$$A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

对下三角行列式，由定义 1.1-1，有

$$A = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}. \tag{1.2.1}$$

对 $M_{i1}(i>1)$，它仍是一个下三角行列式且 M_{i1} 主对角线上的元至少有一个为 0，故由归纳假设 $M_{i1}=0\ (i>1)$. 对 M_{11}，由归纳假设等于 $a_{22}\cdots a_{nn}$，于是 $A=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，证毕.

性质 2 若 n 阶行列式 A 的某一行或某一列的元素全为 0，则 $A=0$.

证明 仍用数学归纳法. 当 $n=1$ 时显然正确. 假定结论对 $n-1$ 阶行列式成立. 先设 A 中第 i 行元素全为 0，则

$$A = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1},$$

其中每个 $M_{j1}(j\neq i)$ 都有一行元素全为 0，故由归纳假设 $M_{j1}=0$. 另外，$a_{i1}=0$，故 $a_{i1}M_{i1}=0$，从而 $A=0$.

再设 A 中第 i 列全为 0. 若 $i=1$，显然 $A=0$. 若 $i>1$，在展开式(1.1.10)中每个 M_{j1} 都有一列元素全为 0，由归纳假定 $M_{j1}=0$，故 $A=0$. 证毕.

性质 3 将行列式 A 的某一行或某一列乘以一个常数 c，则得到的行列式 $B=cA$.

证明 对行列式的阶用数学归纳法. 当 $n=1$ 时显然正确. 假定 B 中第 i 行的每个元素等于 A 中第 i 行的每个元素乘以 c，而其他行元素与 A 完全相同. 由定义可知：

$$B = a_{11}N_{11} - \cdots + (-1)^{i+1}ca_{i1}N_{i1} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}N_{n1}, \tag{1.2.2}$$

其中 N_{r1} 为 B 的第 r 行第 1 列元素的余子式. 由题意及归纳假设知道：

$$N_{r1} = cM_{r1}(r\neq i),\quad N_{i1} = M_{i1},$$