高等代数方法选讲

主　编　钱芳华
副主编　王世芳　薛育海

广西师范大学出版社

高等代数方法选讲

钱芳华（主编） 王世芳（副主编） 薛育海（副主编）
和福生 唐家祥 项 昭 刘蓉滨

合 编

广西师范大学出版社

高等代数方法选讲

钱芳华　主编

☆

广西师范大学出版社出版

（广西桂林市育才路 3 号）

广 西 新 华 书 店 发 行

广西兴安县印刷厂印刷

*

开本 850×1168　1/32　印张11.75　字数324千字

1990年 9 月第 1 版　1991年 4 月第 2 次印刷

印　数：3501－5000

ISBN 7-5633-0938-1/G·786

定价：3.50元

前　言

高等代数是数学专业的一门重要基础课。学生学习这门课程时，往往感到内容抽象，抓不住问题的实质和关键，做题更感困难。编写这本《高等代数方法选讲》的目的，在于帮助学生加深对基本概念和基本理论的理解，牢固掌握所学知识，提高抽象思维能力、逻辑推理能力和解题的技能、技巧。

本书不同于一般的教科书和习题集，编写时以通用的高等代数教科书的内容为基础，由多项式、矩阵和线性空间理论三大部分组成。全书共分八章，每章对基本概念、有关定理等主要内容作了归纳与整理，并配有大量具有代表性的例题与习题。这些例题覆盖面广，有一定难度。例题讲解以剖析解题方法为主，着重揭示概念的内在联系，归纳解题方法和技巧，开拓学生思路，帮助学生解决学习中的困难和问题。习题附有参考答案和提示。

本书中有三节注 * 号的内容，由于已超出一般高等代数教科书的范围，为便于自学，特对基本概念与理论的叙述详细一些，与其他章节的写法略有不同。

本书是 1988 年在贵阳市召开的四川、贵州、云南、海南和广西五省（区）以及重庆市高等师范院校数学系系主任联席会议上决定协作编写的。第一章由和福生执笔（云南师范大学讲师），第二章由唐家祥执笔（云南师范大学副教授），第三章和第四章由钱芳华执笔（广西师范大学副教授），第五章和第六章由王世芳执笔（西南民族学院副教授），第七章由项昭执笔（贵州师范大学讲师），第八章由刘蓉滨执笔（四川省教育学院副教授）。

在完成修改稿后，由副主编王世芳审阅、修改一至三章，副主编薛育海（四川师范学院副教授）审阅、修改四至八章，最后由主编

钱芳华对全书审阅、修改、定稿。

本书由程福长教授(广西师范大学)担任主审,庹世碧副教授(贵州师范大学)担任副主审,唐家祥副教授也参加了审稿工作。他们对本书提出了许多有益的修改意见。

我们还要对有关院、校和数学系的领导、代数教研室的老师的支持和帮助表示感谢。

由于我们的水平有限,不当和错误之处在所难免,请读者批评指正。

编　者

目　　录

第一章　多　项　式

§1　一元多项式的概念与运算

基本概念与结论

一、一元多项式的定义

1. 设 n 是一个非负整数，形式表达式

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \tag{1}$$

其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 都是数域 P 中的数，称为**数域 P 上的一元多项式**.

在多项式(1)中，a_0 叫**零次项**或**常数项**，a_1x 叫**一次项**，一般，a_ix^i 叫 i **次项**，a_i 叫 i 次项**系数**.

我们规定：在一个多项式中，可以任意添加或去掉一些系数为零的项；若某个 i 次项($i \neq 0$) 的系数是 1，那么这个系数可以省略不写.

一元多项式常用符号 $f(x)$，$g(x)$，$\cdots$ 来表示.

2. 如果数域 P 上的两个一元多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 有完全相同的项或者只相差一些系数为零的项，那么就说 $f(x)$ 与 $g(x)$ **相等**，记作 $f(x) = g(x)$.

3. 数域 P 上的一个系数不全为零的多项式可以唯一地写成

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, a_n \neq 0 \tag{2}$$

a_nx^n 就称为多项式(2) 的**首项**，a_n 称为**首项系数**，非负整数 n 称为多项式(2) 的**次数**.

系数全为零的多项式叫**零多项式**，记作 0，它是唯一不定义次数的多项式.

多项式 $f(x)(f(x)\neq 0)$ 的次数简记为 $\partial(f(x))$.

二、多项式的运算

1. 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=\sum\limits_{i=0}^{n}a_iX^i$

$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0=\sum\limits_{i=0}^{m}b_iX^i$ 是数域 P 上的两个一元多项式，假定 $m\leqslant n$，则多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和 $f(x)+g(x)$ 是指多项式

$$(a_n+b_n)x^n+\cdots+(a_m+b_m)x^m+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)$$

即
$$f(x)+g(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i$$

这里，当 $m<n$，时，取 $b_{m+1}=\cdots=b_n=0$.

$f(x)$ 与 $g(x)$ 的积 $f(x)g(x)$ 是指多项式

$$c_{n+m}x^{n+m}+c_{n+m-1}x^{n+m-1}+\cdots+c_1x+c_0$$

这里，

$$c_k=a_kb_0+a_{k-1}b_1+\cdots+a_0b_k=\sum_{i+j=k}a_ib_j$$

即
$$f(x)g(x)=\sum_{k=0}^{n+m}(\sum_{i+j=k}a_ib_j)x_k$$

2. 设 $f(x)$，$g(x)$ 都是数域 P 上的多项式，且 $f(x)\neq 0$，$g(x)\neq 0$，则

(1) 当 $f(x)+g(x)\neq 0$ 时

$$\partial(f(x)+g(x)\leqslant \max(\partial(f(x)),\partial(g(x))$$

(2) $\partial(f(x)g(x))=\partial(f(x))+\partial(g(x))$

3. 多项式的加法和乘法满足以下运算规则：

(1) 交换律；(2) 结合律；(3) 消去律：设 $f(x)\cdot g(x)=f(x)\cdot h(x)$，若 $f(x)\neq 0$，则 $g(x)=h(x)$；(4) 乘法关于加法的分配律.

4. 所有系数在数域 P 中的一元多项式的全体，称为数域 P 上的**一元多项式环**，记作 $P[x]$.

5. 带余除法.

设 $f(x), g(x) \in P[x]$，且 $g(x) \neq 0$，则存在唯一的一对多项式 $q(x), r(x) \in P[x]$ 使 $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$，其中 $r(x) = 0$ 或；$\partial(r(x)) < \partial(g(x))$. $q(x), r(x)$ 分别称为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的**商式**和**余式**.

应用举例

例 1 证明：多项式

$$f(x) = (x^{50} - x^{49} + \cdots + x^2 - x + 1)(x^{50} + x^{49} + \cdots + x + 1)$$

的展开式中不含奇数次项.

证明 由于

$$x^{51} + 1 = (x + 1)(x^{50} - x^{49} + \cdots + x^2 - x + 1)$$

$$x^{51} - 1 = (x - 1)(x^{50} + x^{49} + \cdots + x + 1)$$

两式相乘得 $$x^{102} - 1 = (x^2 - 1)f(x)$$

而 $x^{102} - 1$ 与 $x^2 - 1$ 都不含奇数次项，故 $f(x)$ 也不含奇数次项.

例 2 设 $f(x) = ah(x) + (x - a)k(x)$，$h(x) \neq 0$，$k(x) \neq 0$，$g(x) = (x - a)^m h(x)$，$m \geqslant 1$，$\partial(f(x)) < \partial(g(x))$，$a \neq 0$.

求证：$\partial(k(x)) < \partial(h(x)) + m - 1$ (3)

分析 只需证 $\partial(k(x)) + 1 < \partial(h(x)) + m$.

证明 因为 $f(x) - ah(x) = (x - a)k(x)$，所以 $\partial(k(x)) + 1 = \partial(f(x) - a\,h(x)) \leqslant \max(\partial(f(x)), \partial(h(x)))$.

又因为 $$\partial(f(x)) < \partial(g(x)) = m + \partial(h(x))$$

所以 $$\partial(k(x)) + 1 < \partial(h(x)) + m$$

从而可得 $$\partial(k(x)) < \partial(h(x)) + m - 1$$

例 3 设 $f(x), g(x)$ 和 $h(x)$ 都是实数域上的多项式，证明：若 $f^{2k}(x) = xg^{2s}(x) + xh^{2t}(x)$，其中 k, s, t 都是自然数，则 $f(x) = g(x) = h(x) = 0$.

分析 先证一个多项式为零，再证其余两个多项式为零.

证明 首先证明 $f(x)=0$. 如果 $f(x)\neq 0$, 因为

$$f^{2k}(x)=xg^{2s}(x)+xh^{2t}(x) \tag{4}$$

所以 $xg^{2s}(x)+xh^{2t}(x)\neq 0$. 从而 $g^{2s}(x)+h^{2t}(x)\neq 0$. 分两种情况讨论：

(1) $g^{2s}(x)\neq 0, h^{2t}(x)\neq 0$. 假定 $f(x), g(x), h(x)$ 的次数分别是 m, n, l. 比较(4)式两边多项式的次数，可得 $2km=1+\max(2sn, 2tl)$. 这是不可能的.

(2) $g^{2s}(x)$ 与 $h^{2t}(x)$ 中只有一个不等于零，设 $g^{2s}\neq 0, h^{2t}=0$. 此时有 $2km=1+2sn$. 矛盾.

综上所述，得到 $f(x)=0$.

由 $f(x)=0$ 及(4)式，得

$$g^{2S}(x)+h^{2t}(x)=0 \tag{5}$$

如果 $g(x), h(x)$ 中至少有一个不为0，由于 $g^{2s}(x), h^{2t}(x)$ 的首项系数都是非负实数，且至少有一个是正实数，因此 $g^{2s}(x)+h^{2t}(x)$ 的首项系数不为零，与(5)式矛盾. 故 $g(x)=h(x)=0$.

例4 试求出所有适合于 $f(f(x))=[f(x)]^n$ 的非零复多项式 $f(x)$ (n 是正整数).

解 (1) 若 $\partial(f(x))=0$, 则 $f(x)=c, c\neq 0$. 由 $f(f(x))=[f(x)]^n$, 得 $f(f(x))=c^n=c$, 于是 $c^n=c$. 即 $c^{n-1}=1$. 其解为 $n-1$ 次单位根

$$c_k=\cos\frac{2k\pi}{n-1}+i\sin\frac{2k\pi}{n-1} \qquad (k=0,1,\cdots,n-2)$$

(2) 若 $\partial(f(x))\geqslant 1$, 设 $f(x)$ 为 m 次多项式，由 $f(f(x))=[f(x)]^n$, 比较等号两端多项式的次数得

$$mn=m^2$$

从而有

$$m=n$$

设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$

再把 $f(x)$ 代入 $f(f(x))=[f(x)]^n$ 得

$$(a_0-1)[f(x)]^n+a_1[f(x)]^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

逐一从高次到低次考虑首项系数，便得

$$a_0=1, a_1=a_2=\cdots=a_n=0$$

所以 $f(x)=x^n$

当 $f(x)=c_k$（c_k 是 $n-1$ 次单位根）或 $f(x)=x^n$ 时，有 $f(f(x))=[f(x)]^n$. 故满足 $(f(x))=[f(x)]^n$ 的复多项式是 $f(x)=x^n$ 或 $f(x)=c_k$，其中 $c_k=\cos\frac{2k\pi}{n-1}+i\sin\frac{2k\pi}{n-1}\quad(k=0,1,\cdots,n-2)$.

§2 多项式的整除性

基本概念与结论

一、整除的定义

1. 设 $f(x),g(x)\in P[x]$，如果存在 $h(x)\in P[x]$ 使 $f(x)=g(x)h(x)$，则称 $g(x)$ 整除 $f(x)$，记作 $g(x)\mid f(x)$，否则就称 $g(x)$ **不能整除** $f(x)$，记作 $g(x)\nmid f(x)$.

当 $g(x)\mid f(x)$ 时，就称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的一个**因式**.

2. 任一多项式 $f(x)$ 必整除它自身；任一多项式都整除零多项式；P 中非零常数整除 $P[x]$ 中任一多项式.

3. $P[x]$ 中任一多项式 $f(x)$ 都有因式 $c,cf(x)$（c 是 P 中不为零的数），称它们是 $f(x)$ 的**平凡因式**（或**当然因式**）.

二、整除的基本性质

1. 若 $f(x)\mid g(x)$ 且 $g(x)\mid f(x)$，则 $f(x)=cg(x)$，这里 c 是数域 P 中非零常数.

2. 若 $f(x)\mid g(x)$，$g(x)\mid h(x)$，则 $f(x)\mid h(x)$.

3. 若 $f(x),g_1(x),\cdots,g_m(x)$ 都是 $P[x]$ 中的多项式，且 $f(x)\mid g_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,m)$，则对任意的多项式 $u_i(x)\in P[x]$ $(i=1,2,\cdots,m)$，

恒有

$$f(x) \mid \sum_{i=1}^{m} u_i(x) g_i(x)$$

三、整除的一个判别法

$f(x), g(x) \in P[x], g(x) \neq 0$，则 $g(x) \mid f(x)$ 的充分必要条件是 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式为零.

当 $g(x) \mid f(x)$ 时，$g(x)$ 除 $f(x)$ 的商有时也用 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 来表示.

应用举例

例 1 m, p, q 适合什么条件时，有

$$(x^2 + mx - 1) \mid (x^3 + px + q).$$

解法一

$$\begin{array}{l|l}
x^3 \qquad\qquad + px \quad + q & x^2 + mx - 1 \\ \cline{2-2}
x^3 + mx^2 \quad - x & x - m = q(x) \\ \hline
\quad - mx^2 + (p+1)x + q & \\
\qquad\quad - mx^2 - m^2x + m & \\ \hline
r(x) = (p + 1 + m^2)x + (q - m) &
\end{array}$$

$(x^2 + mx - 1) \mid (x^3 + px + q)$ 必须且只须余式为 0，即

$$(p + 1 + m^2)x + (q - m) = 0$$

所以，当 $\begin{cases} p + 1 + m^2 = 0 \\ q - m = 0 \end{cases}$ 时，有 $(x^2 + mx - 1) \mid (x^3 + px + q)$

解法二 由 $(x^2 + mx - 1) \mid (x^3 + px + q)$，可设

$$x^3 + px + q = (x^2 + mx - 1)(x + a)$$

即 $x^3 + px + q = x^3 + (m + a)x^2 + (ma - 1)x - a$

比较系数得
$$\begin{cases} m + a = 0 \\ ma - 1 = p \\ -a = q \end{cases}$$

消去 a 得 $$\begin{cases} p+1+m^2=0 \\ q-m=0 \end{cases}$$

解法一用的是辗转相除法，解法二用的是比较系数法，在讨论含有参数的多项式时，常用这两种方法.

例 2 设 m 是大于 1 的整数，$f(x)=x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1$，试求所有满足 $f(x)\mid[f(x^m)+c]$ 的常数 c.

解 当 $c=-m$ 时，

$$\begin{aligned} f(x^m)-m &= x^{m(m-1)}+x^{m(m-2)}+\cdots+x^m+1-m \\ &= (x^{m(m-1)}-1)+(x^{m(m-2)}-1)+\cdots+(x^m-1) \\ &= (x^m-1)q(x) \end{aligned}$$

所以 $(x^m-1)\mid(f(x^m)-m)$. 而 $x^m-1=(x-1)f(x)$，故 $f(x)\mid(x^m-1)$. 从而有 $f(x)\mid[f(x^m)-m]$.

如果常数 c_1 满足 $f(x)\mid[f(x^m)+c_1]$，那么

$$f(x)\mid[f(x^m)-m+(c_1+m)]$$

已证 $f(x)\mid[f(x^m)-m]$，故 $f(x)\mid(c_1+m)$. 而 $f(x)$ 次数大于零，于是 $c_1+m=0$. 即 $c_1=-m$.

所以 $c=-m$ 是满足 $f(x)\mid[f(x^m)+c]$ 的唯一常数.

例 3 设 $$f(x)=(x+1)^{k+n}+(2x)(x+1)^{k+n-1}+\cdots+(2x)^k(x+1)^n$$

其中 k,n 都是非负整数，证明：$x^{k+1}\mid[(x-1)f(x)+(x+1)^{k+n+1}]$.

分析 注意到 $f(x)$ 中含有 $x+1$ 及 $2x$，把 $x-1$ 写成 $2x-(x+1)$，这是证明的关键.

证明
$$\begin{aligned} (x-1)f(x) &= [2x-(x+1)][(x+1)^k+(2x)(x+1)^{k-1}+\cdots+(2x)^k](x+1)^n \\ &= [(2x)^{k+1}-(x+1)^{k+1}](x+1)^n \\ &= (2x)^{k+1}(x+1)^n-(x+1)^{n+k+1} \end{aligned}$$

于是 $$\begin{aligned}(x-1)f(x)+(x+1)^{n+k+1} &= (2x)^{k+1}(x+1)^n \\ &= 2^{k+1}x^{k+1}(x+1)^n.\end{aligned}$$