

高等代数方法选讲

主 编 钱芳华

副主编 王世芳 薛育海

广西师范大学出版社

高等代数方法选讲

钱芳华(主编) 王世芳(副主编) 薛育海(副主编)
和福生 唐家祥 项 昭 刘蓉滨

合 编

广西师范大学出版社

高等代数方法选讲

钱芳华 主编

☆

广西师范大学出版社出版

(广西桂林市育才路3号)

广西新华书店发行

广西兴安县印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印张11.75 字数324千字

1990年9月第1版 1991年4月第2次印刷

印数: 3501—5000

ISBN 7-5633-0938-1/G·786

定价: 3.50元

前 言

高等代数是数学专业的一门重要基础课。学生学习这门课程时,往往感到内容抽象,抓不住问题的实质和关键,做题更感困难。编写这本《高等代数方法选讲》的目的,在于帮助学生加深对基本概念和基本理论的理解,牢固掌握所学知识,提高抽象思维能力、逻辑推理能力和解题的技能、技巧。

本书不同于一般的教科书和习题集,编写时以通用的高等代数教科书的内容为基础,由多项式、矩阵和线性空间理论三大部分组成。全书共分八章,每章对基本概念、有关定理等主要内容作了归纳与整理,并配有大量具有代表性的例题与习题。这些例题覆盖面广,有一定难度。例题讲解以剖析解题方法为主,着重揭示概念的内在联系,归纳解题方法和技巧,开拓学生思路,帮助学生解决学习中的困难和问题。习题附有参考答案和提示。

本书中有三节注*号的内容,由于已超出一般高等代数教科书的范围,为便于自学,特对基本概念与理论的叙述详细一些,与其他章节的写法略有不同。

本书是1988年在贵阳市召开的四川、贵州、云南、海南和广西五省(区)以及重庆市高等师范院校数学系系主任联席会议上决定协作编写的。第一章由和福生执笔(云南师范大学讲师),第二章由唐家祥执笔(云南师范大学副教授),第三章和第四章由钱芳华执笔(广西师范大学副教授),第五章和第六章由王世芳执笔(西南民族学院副教授),第七章由项昭执笔(贵州师范大学讲师),第八章由刘蓉滨执笔(四川省教育学院副教授)。

在完成修改稿后,由副主编王世芳审阅、修改一至三章,副主编薛育海(四川师范学院副教授)审阅、修改四至八章,最后由主编

钱芳华对全书审阅、修改、定稿。

本书由程福长教授(广西师范大学)担任主审,虞世碧副教授(贵州师范大学)担任副主审,唐家祥副教授也参加了审稿工作。他们对本书提出了许多有益的修改意见。

我们还要对有关院、校和数学系的领导、代数教研室的老师的支持和帮助表示感谢。

由于我们的水平有限,不当和错误之处在所难免,请读者批评指正。

编 者

目 录

第一章 多项式	1
§ 1 一元多项式的概念与运算	1
基本概念与结论	1
应用举例	3
§ 2 多项式的整除性	5
基本概念与结论	5
应用举例	6
§ 3 最大公因式	8
基本概念与结论	8
应用举例	10
一、最大公因式	10
二、互素	12
§ 4 因式分解	17
基本概念与结论	17
应用举例	20
一、不可约多项式的判定	20
二、唯一分解定理的应用	24
§ 5 多项式函数和多项式的根	27
基本概念与结论	27
应用举例	29
一、有理根与重根	29
二、根与因式分解	33
三、根与整除性	36
习题	39
第二章 行列式与矩阵运算	42
§ 1 n 阶行列式的计算	42

基本概念与结论	42
应用举例	45
一、三角形法	45
二、递推法	47
三、升阶法	50
四、数学归纳法	53
五、辅助行列式法	57
六、一题多解	58
§ 2 矩阵的运算	62
基本概念与结论	62
应用举例	70
一、与已知矩阵可交换的矩阵	70
二、矩阵的幂	72
三、逆矩阵的求法及其应用	74
四、其他	79
习题	80
第三章 矩阵的秩与线性方程组	85
§ 1 矩阵的秩	85
基本概念与结论	85
应用举例	88
一、向量组的线性相关性	88
二、向量组的极大无关组的求法	93
三、矩阵秩的计算与证明	97
§ 2 线性方程组	107
基本概念与结论	107
应用举例	109
一、一般线性方程组的解	109
二、基础解系	115
*§ 3 广义逆矩阵简介	119
习题	122

第四章 方阵的特征根与方阵的对角化	126
§ 1 方阵的特征多项式、特征根与最小多项式	126
基本概念与结论	126
应用举例	128
一、特征根与特征向量	128
二、特征多项式与凯莱定理	136
三、特征多项式与最小多项式	143
§ 2 方阵与对角阵相似的一个充要条件	145
基本概念与结论	145
应用举例	147
一、方阵的相似	147
二、方阵对角化	151
习题	161
第五章 方阵的相似标准形	163
§ 1 λ -矩阵及其标准形	163
基本概念与结论	163
应用举例	166
§ 2 数字矩阵的相似	173
基本概念与结论	173
应用举例	174
一、不变因子与最小多项式	174
二、矩阵相似的判定	176
三、矩阵与对角阵相似的条件	179
§ 3 若当(Jordan)标准形	182
基本概念与结论	182
应用举例	183
一、若当标准形的求法	183
二、若当标准形的应用	186
* § 4 有理标准形	193
习题	201

第六章 二次型	204
§ 1 标准形	204
基本概念与结论	204
应用举例	206
一、化二次型为标准形的方法	206
二、实二次型及实对称阵	216
§ 2 规范形	218
基本概念与结论	218
应用举例	220
§ 3 正定二次型和正定矩阵	225
基本概念与结论	225
应用举例	226
一、关于判别条件	226
二、正定矩阵与半正定矩阵	231
三、正定矩阵与实矩阵	235
习题	241
第七章 线性空间与欧氏空间	243
§ 1 线性空间	243
基本概念与结论	243
应用举例	246
一、线性空间的判定	246
二、维数、基和坐标	249
§ 2 线性子空间	254
基本概念与结论	254
应用举例	257
一、子空间的判定、维数和基	257
二、两个子空间的交与和的维数	262
三、子空间的直和	265
四、线性空间的同构	266
§ 3 欧氏空间	268

基本概念与结论	268
应用举例	272
一、内积与欧氏空间的判定	272
二、标准正交基	275
三、长度、夹角	278
§ 4 正交子空间	281
基本概念与结论	281
应用举例	283
习题	289
第八章 线性变换与正交变换	294
§ 1 线性变换	294
基本概念与结论	294
应用举例	299
一、线性变换的定义	299
二、线性变换与矩阵	301
三、线性变换的核与值域	307
四、特征根、特征向量和不变子空间	310
五、线性变换的对角化	315
§ 2 正交变换与对称变换	318
基本概念与结论	318
应用举例	319
§ 3 线性映射空间	323
习题	331
习题答案与提示	335

第一章 多项式

§ 1 一元多项式的概念与运算

基本概念与结论

一、一元多项式的定义

1. 设 n 是一个非负整数, 形式表达式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (1)$$

其中 $a_0, a_1, \dots, a_n$ 都是数域 P 中的数, 称为数域 P 上的一元多项式.

在多项式(1)中, a_0 叫零次项或常数项, $a_1 x$ 叫一次项, 一般, $a_i x^i$ 叫 i 次项, a_i 叫 i 次项系数.

我们规定: 在一个多项式中, 可以任意添加或去掉一些系数为零的项; 若某个 i 次项 ($i \neq 0$) 的系数是 1, 那么这个系数可以省略不写.

一元多项式常用符号 $f(x), g(x), \dots$ 来表示.

2. 如果数域 P 上的两个一元多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 有完全相同的项或者只相差一些系数为零的项, 那么就说 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等, 记作 $f(x) = g(x)$.

3. 数域 P 上的一个系数不全为零的多项式可以唯一地写成

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0, a_n \neq 0 \quad (2)$$

$a_n x^n$ 就称为多项式(2)的首项, a_n 称为首项系数, 非负整数 n 称为多项式(2)的次数.

系数全为零的多项式叫零多项式, 记作 0, 它是唯一不定义次数的多项式.

多项式 $f(x) (f(x) \neq 0)$ 的次数简记为 $\partial(f(x))$.

二、多项式的运算

1. 设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i X^i$

$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0 = \sum_{i=0}^m b_i X^i$ 是数域 P 上的两个一元多项式, 假定 $m \leq n$, 则多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和 $f(x) + g(x)$ 是指多项式

$$(a_n + b_n)x^n + \cdots + (a_m + b_m)x^m + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

即
$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) x^i$$

这里, 当 $m < n$, 时, 取 $b_{m+1} = \cdots = b_n = 0$.

$f(x)$ 与 $g(x)$ 的积 $f(x)g(x)$ 是指多项式

$$c_{n+m} x^{n+m} + c_{n+m-1} x^{n+m-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

这里,

$$c_k = a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \cdots + a_0 b_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$$

即
$$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) x_k$$

2. 设 $f(x), g(x)$ 都是数域 P 上的多项式, 且 $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$,

则

(1) 当 $f(x) + g(x) \neq 0$ 时

$$\partial(f(x) + g(x)) \leq \max(\partial(f(x)), \partial(g(x)))$$

(2) $\partial(f(x)g(x)) = \partial(f(x)) + \partial(g(x))$

3. 多项式的加法和乘法满足以下运算规则:

(1) 交换律; (2) 结合律; (3) 消去律: 设 $f(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot h(x)$, 若 $f(x) \neq 0$, 则 $g(x) = h(x)$; (4) 乘法关于加法的分配律.

4. 所有系数在数域 P 中的一元多项式的全体, 称为数域 P 上的一元多项式环, 记作 $P[x]$.

5. 带余除法.

设 $f(x), g(x) \in P[x]$, 且 $g(x) \neq 0$, 则存在唯一的一对多项式 $q(x), r(x) \in P[x]$ 使 $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, 其中 $r(x) = 0$ 或; $\partial(r(x)) < \partial(g(x))$. $q(x), r(x)$ 分别称为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商式和余式.

应用举例

例 1 证明: 多项式

$f(x) = (x^{50} - x^{49} + \cdots + x^2 - x + 1)(x^{50} + x^{49} + \cdots + x + 1)$ 的展开式中不含奇数次项.

证明 由于

$$x^{51} + 1 = (x + 1)(x^{50} - x^{49} + \cdots + x^2 - x + 1)$$

$$x^{51} - 1 = (x - 1)(x^{50} + x^{49} + \cdots + x + 1)$$

两式相乘得 $x^{102} - 1 = (x^2 - 1)f(x)$

而 $x^{102} - 1$ 与 $x^2 - 1$ 都不含奇数次项, 故 $f(x)$ 也不含奇数次项.

例 2 设 $f(x) = ah(x) + (x - a)k(x)$, $h(x) \neq 0, k(x) \neq 0$, $g(x) = (x - a)^m h(x)$, $m \geq 1, \partial(f(x)) < \partial(g(x)), a \neq 0$.

求证: $\partial(k(x)) < \partial(h(x)) + m - 1$ (3)

分析 只需证 $\partial(k(x)) + 1 < \partial(h(x)) + m$.

证明 因为 $f(x) - ah(x) = (x - a)k(x)$, 所以 $\partial(k(x)) + 1 = \partial(f(x) - ah(x)) \leq \max(\partial(f(x)), \partial(h(x)))$.

又因为 $\partial(f(x)) < \partial(g(x)) = m + \partial(h(x))$

所以 $\partial(k(x)) + 1 < \partial(h(x)) + m$

从而可得 $\partial(k(x)) < \partial(h(x)) + m - 1$

例 3 设 $f(x), g(x)$ 和 $h(x)$ 都是实数域上的多项式, 证明: 若 $f^{2k}(x) = xg^{2s}(x) + xh^{2t}(x)$, 其中 k, s, t 都是自然数, 则 $f(x) = g(x) = h(x) = 0$.

分析 先证一个多项式为零, 再证其余两个多项式为零.

证明 首先证明 $f(x) = 0$. 如果 $f(x) \neq 0$, 因为

$$f^{2^k}(x) = xg^{2^s}(x) + xh^{2^t}(x) \quad (4)$$

所以 $xg^{2^s}(x) + xh^{2^t}(x) \neq 0$. 从而 $g^{2^s}(x) + h^{2^t}(x) \neq 0$. 分两种情况讨论:

(1) $g^{2^s}(x) \neq 0, h^{2^t}(x) \neq 0$. 假定 $f(x), g(x), h(x)$ 的次数分别是 m, n, l . 比较(4)式两边多项式的次数, 可得 $2km = 1 + \max(2sn, 2tl)$. 这是不可能的.

(2) $g^{2^s}(x)$ 与 $h^{2^t}(x)$ 中只有一个不等于零, 设 $g^{2^s} \neq 0, h^{2^t} = 0$. 此时有 $2km = 1 + 2sn$. 矛盾.

综上所述, 得到 $f(x) = 0$.

由 $f(x) = 0$ 及(4)式, 得

$$g^{2^s}(x) + h^{2^t}(x) = 0 \quad (5)$$

如果 $g(x), h(x)$ 中至少有一个不为0, 由于 $g^{2^s}(x), h^{2^t}(x)$ 的首项系数都是非负实数, 且至少有一个是正实数, 因此 $g^{2^s}(x) + h^{2^t}(x)$ 的首项系数不为零, 与(5)式矛盾. 故 $g(x) = h(x) = 0$.

例4 试求出所有适合于 $f(f(x)) = [f(x)]^n$ 的非零复多项式 $f(x)$ (n 是正整数).

解 (1) 若 $\partial(f(x)) = 0$, 则 $f(x) = c, c \neq 0$. 由 $f(f(x)) = [f(x)]^n$, 得 $f(f(x)) = c^n = c$, 于是 $c^n = c$. 即 $c^{n-1} = 1$. 其解为 $n-1$ 次单位根

$$c_k = \cos \frac{2k\pi}{n-1} + i \sin \frac{2k\pi}{n-1} \quad (k = 0, 1, \dots, n-2)$$

(2) 若 $\partial(f(x)) \geq 1$, 设 $f(x)$ 为 m 次多项式, 由 $f(f(x)) = [f(x)]^n$, 比较等号两端多项式的次数得

$$mn = m^2$$

从而有

$$m = n$$

设 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$

再把 $f(x)$ 代入 $f(f(x)) = [f(x)]^n$ 得

$$(a_0 - 1)[f(x)]^n + a_1[f(x)]^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

逐一从高次到低次考虑首项系数, 使得

$$a_0 = 1, a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

所以 $f(x) = x^n$

当 $f(x) = c_k$ (c_k 是 $n-1$ 次单位根) 或 $f(x) = x^n$ 时, 有 $f(f(x)) = [f(x)]^n$. 故满足 $(f(x))^n = [f(x)]^n$ 的复多项式是 $f(x) = x^n$ 或 $f(x) = c_k$, 其中 $c_k = \cos \frac{2k\pi}{n-1} + i \sin \frac{2k\pi}{n-1}$ ($k = 0, 1, \cdots, n-2$).

§ 2 多项式的整除性

基本概念与结论

一、整除的定义

1. 设 $f(x), g(x) \in P[x]$, 如果存在 $h(x) \in P[x]$ 使 $f(x) = g(x)h(x)$, 则称 $g(x)$ 整除 $f(x)$, 记作 $g(x) | f(x)$, 否则就称 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$, 记作 $g(x) \nmid f(x)$.

当 $g(x) | f(x)$ 时, 就称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的一个因式.

2. 任一多项式 $f(x)$ 必整除它自身; 任一多项式都整除零多项式; P 中非零常数整除 $P[x]$ 中任一多项式.

3. $P[x]$ 中任一多项式 $f(x)$ 都有因式 $c, cf(x)$ (c 是 P 中不为零的数), 称它们是 $f(x)$ 的平凡因式 (或当然因式).

二、整除的基本性质

1. 若 $f(x) | g(x)$ 且 $g(x) | f(x)$, 则 $f(x) = cg(x)$, 这里 c 是数域 P 中非零常数.

2. 若 $f(x) | g(x), g(x) | h(x)$, 则 $f(x) | h(x)$.

3. 若 $f(x), g_1(x), \cdots, g_m(x)$ 都是 $P[x]$ 中的多项式, 且 $f(x) | g_i(x)$ ($i = 1, 2, \cdots, m$), 则对任意的多项式 $u_i(x) \in P[x]$ ($i = 1, 2, \cdots, m$),

恒有

$$f(x) \mid \sum_{i=1}^m u_i(x)g_i(x)$$

三、整除的一个判别法

$f(x), g(x) \in P[x], g(x) \neq 0$, 则 $g(x) \mid f(x)$ 的充分必要条件是 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式为零.

当 $g(x) \mid f(x)$ 时, $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商有时也用 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 来表示.

应用举例

例1 m, p, q 适合什么条件时, 有

$$(x^2 + mx - 1) \mid (x^3 + px + q).$$

解法一

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2 + mx - 1 \\ + px & \\ + q & \\ \hline x^3 + mx^2 - x & x - m = q(x) \\ \hline - mx^2 + (p+1)x + q & \\ - mx^2 - m^2x + m & \\ \hline r(x) = (p+1+m^2)x + (q-m) & \end{array}$$

$(x^2 + mx - 1) \mid (x^3 + px + q)$ 必须且只须余式为 0, 即

$$(p+1+m^2)x + (q-m) = 0$$

所以, 当 $\begin{cases} p+1+m^2=0 \\ q-m=0 \end{cases}$ 时, 有 $(x^2 + mx - 1) \mid (x^3 + px + q)$

解法二 由 $(x^2 + mx - 1) \mid (x^3 + px + q)$, 可设

$$x^3 + px + q = (x^2 + mx - 1)(x + a)$$

$$\text{即 } x^3 + px + q = x^3 + (m+a)x^2 + (ma-1)x - a$$

比较系数得

$$\begin{cases} m+a=0 \\ ma-1=p \\ -a=q \end{cases}$$

消去 a 得

$$\begin{cases} p+1+m^2=0 \\ q-m=0 \end{cases}$$

解法一用的是辗转相除法,解法二用的是比较系数法,在讨论含有参数的多项式时,常用这两种方法.

例 2 设 m 是大于 1 的整数, $f(x) = x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + 1$, 试求所有满足 $f(x) | [f(x^m) + c]$ 的常数 c .

解 当 $c = -m$ 时,

$$\begin{aligned} f(x^m) - m &= x^{m(m-1)} + x^{m(m-2)} + \cdots + x^m + 1 - m \\ &= (x^{m(m-1)} - 1) + (x^{m(m-2)} - 1) + \cdots + (x^m - 1) \\ &= (x^m - 1)q(x) \end{aligned}$$

所以 $(x^m - 1) | (f(x^m) - m)$. 而 $x^m - 1 = (x - 1)f(x)$, 故 $f(x) | (x^m - 1)$. 从而有 $f(x) | [f(x^m) - m]$.

如果常数 c_1 满足 $f(x) | [f(x^m) + c_1]$, 那么

$$f(x) | [f(x^m) - m + (c_1 + m)]$$

已证 $f(x) | [f(x^m) - m]$, 故 $f(x) | (c_1 + m)$. 而 $f(x)$ 次数大于零, 于是 $c_1 + m = 0$. 即 $c_1 = -m$.

所以 $c = -m$ 是满足 $f(x) | [f(x^m) + c]$ 的唯一常数.

例 3 设 $f(x) = (x+1)^{k+1} + (2x)(x+1)^{k+s-1} + \cdots + (2x)^k(x+1)^s$

其中 k, n 都是非负整数, 证明: $x^{k+1} | [(x-1)f(x) + (x+1)^{k+s+1}]$.

分析 注意到 $f(x)$ 中含有 $x+1$ 及 $2x$, 把 $x-1$ 写成 $2x-(x+1)$, 这是证明的关键.

$$\begin{aligned} \text{证明} \quad (x-1)f(x) &= [2x - (x+1)][(x+1)^k \\ &\quad + (2x)(x+1)^{k-1} + \cdots + (2x)^k](x+1)^s \\ &= [(2x)^{k+1} - (x+1)^{k+1}](x+1)^s \\ &= (2x)^{k+1}(x+1)^s - (x+1)^{k+s+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad (x-1)f(x) + (x+1)^{k+s+1} &= (2x)^{k+1}(x+1)^s \\ &= 2^{k+1}x^{k+1}(x+1)^s. \end{aligned}$$