

※ 高等学校教材 ※

普通物理学

原子物理学部分

(修訂本)

苟清泉編

高等教育出版社

高等学校教材



普通物理学

原子物理学部分

(修订本)

苟清泉 编

高等教育出版社

本书第一版是根据编者几年来在吉林大学物理系讲授“普通物理学”课程中原子物理学部分的讲义修改补充而成的。第二版对原有的第六章和第七章作了较大的修改和补充，其余五章作了校正工作。全书共七章，主要内容是：原子结构与原子光谱，量子力学概要，分子结构与分子光谱。

本书可作为综合大学及高等师范学校物理系各专业“普通物理学”课程原子物理学部分的教材，也可供高等工业学校的相近专业选用。

本书原由人民教育出版社出版。现经上级决定，自1965年1月1日起，另行成立“高等教育出版社”，本书今后改用高等教育出版社名义继续印行。

普通物理学

原子物理学部分

(修订本)

荀 清 泉 编

北京市书刊出版业营业许可登记证出字第119号

高等教育出版社出版(北京景山东街)

人民教育印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号 K13010·955 开本 850×1168 1/32 印张 7 3/16

字数 180,000 印数 71,501—79,500 定价(6) ¥0.76

1961年7月第1版 1964年8月第2版 1965年3月北京第10次印刷

第二版序言

本书是1961年7月出版的普通物理学“原子物理学部分”上册的修訂本。根据一年多以来試用的經驗和最近新訂教学計劃的要求，有必要对原书进行一次修訂，特别是原子核物理部分需要作較大的修改和补充。根据新近修訂的物理学专业教学計劃的規定，原子物理学与原子核物理学在普通物理学課程中应作为两个独立的部分。故这次修訂时，决定把原书分成“原子物理”与“原子核物理”两个独立的专册出版。原书的原子物理部分是由我执笔編写的，原子核物理部分是由吳知非同志执笔編写的。現在决定由我負責把原子物理部分加以修訂出专册。原子核物理部分将由吳知非同志負責修訂，另出专册。

由于这次修訂的时间很短促，来不及进行較全面的修訂工作，同时也为了尽可能利用原有的版面起見，只对需要修訂較多的第六章(量子力学概要)和第七章(分子結構与分子光譜)作了較大的修改和补充，其余五章只作了校正工作。待以后有机会再版时，再根据使用經驗进行較全面的修訂。

此次修訂时增加了若干內容。例如，在第六章中，增加了測不准关系式，討論了經典理論对于微观粒子的应用范围，并說明了玻尔軌道概念的缺陷；增加了綫性諧振子，以便为下一章讲分子的振动作准备；增加了对势垒的穿透和隧道效应，为以后原子核物理部分中讲 α 蜕变作准备。在第七章中增加了夫兰克-康登原理，并对原有的若干节进行了修改和补充。

在这一次修訂之前，有好些使用过本书的教师和学生曾主动热誠地向作者指出书中若干印刷上的錯誤和讲解不够清楚地

方,并提出了若干宝贵意见。例如,北京大学教授虞福春同志和西安石油学院张金钟同志等,对内容的选择安排和讲解上都曾提出过若干具体建议和宝贵意见,对修订工作有很大的帮助。黄树勋同志帮助校阅了全书。作者对这些同志们的热诚帮助,表示十分感谢。

苟清泉

1963年2月10日于吉林大学

目 录

第二版序言	Ⅰ
緒論	1
第一章 原子結構初期理論的實驗基礎	6
§ 1.1. α 粒子的散射實驗和原子的核模型(6)	
§ 1.2. 原子光譜的實驗規律(20)	
§ 1.3. 夫兰克与赫茲的實驗(26)	
第二章 氫原子	30
§ 2.1. 玻尔的基本假設(31)	
§ 2.2. 玻尔的氫原子理論(34)	
§ 2.3. 类氫离子的光譜(43)	
§ 2.4. 由于原子核运动所引起的效应(46)	
§ 2.5. 氫原子的橢圓軌道(53)	
§ 2.6. 空間量子化(60)	
§ 2.7. 原子磁矩与史特恩-盖拉赫實驗(66)	
§ 2.8. 正常塞曼效应(69)	
§ 2.9. 索末菲的相对論修正(75)	
§ 2.10. 玻尔的对对应原理(84)	
§ 2.11. 玻尔理論的地位和局限性(89)	
第三章 多电子原子	91
§ 3.1. 碱金屬原子結構及其光譜(92)	
§ 3.2. 碱金屬光譜的双綫結構与电子自旋(107)	
§ 3.3. 电子自旋与軌道运动間相互作用能的計算(116)	
§ 3.4. 氫原子光譜綫的精細結構(120)	
§ 3.5. 原子的矢量模型(125)	
§ 3.6. 具有两个价电子的原子底光譜(130)	
§ 3.7. 反常塞曼效应(135)	
第四章 門捷列夫周期系与原子的电子壳层結構	141
§ 4.1. 門捷列夫周期系(141)	
§ 4.2. 泡利原理和电子壳层結構(146)	
§ 4.3. 电子壳层的建造(149)	
第五章 倫琴光譜	158
§ 5.1. 倫琴射綫(158)	
§ 5.2. 連續倫琴光譜(161)	
§ 5.3. 綫状倫琴光譜(162)	
§ 5.4. 倫琴吸收光譜(167)	
第六章 量子力学概要	168
§ 6.1. 德布罗意的假設(168)	
§ 6.2. 德布罗意假設的實驗验证(169)	
§ 6.3. 粒子的波函数与薛定諤方程式(172)	
§ 6.4. 測不准关系和經典理論对于微观粒子的应用范围(176)	
§ 6.5. 粒子在方匣中的运动(180)	
§ 6.6. 对势坎的反射和透入(183)	
§ 6.7. 对势垒的穿透(188)	
§ 6.8. 綫性諧振子(192)	
§ 6.9. 量子力学对氫原子問題的处理(195)	
§ 6.10. 氫原子的基态(199)	
第七章 分子結構与分子光譜	202
§ 7.1. 分子的形成(202)	
§ 7.2. 分子光譜的特点(205)	
§ 7.3. 分子的振动光譜(206)	
§ 7.4. 分子的轉动光譜(213)	
§ 7.5. 分子的电子振轉光譜(218)	
§ 7.6. 分子的离解能(221)	
§ 7.7. 夫兰克-康登原理(223)	
§ 7.8. 分子的电子状态(226)	
§ 7.9. 光的并合散射現象(228)	
§ 7.10. 液体与固体的发光(233)	

緒 論

在古代的希臘和羅馬就已萌芽了的原子論，在整个物理学发展史中是一个进步的、与唯物論的科学思潮相适应的理論。在十八世紀的40年代，罗蒙諾索夫就发展了物质底原子动力論，证明热現象是由于原子底运动。物理学和化学进一步的发展，证实了物质的結構是不連續的，但不能从这里得出物质是由絕對简单的和不可分割的原子所組成的結論。可是曾有許多科学家认为只用不可分割的原子微粒的結合，就能够說明实际世界底全部多样性，而且认为原子是物质底最后的“本质”。这种观点不是从实验得出的。辩证唯物論断定客观存在着的世界是不可穷尽地多种多样的，而我們关于它的知識永远是近似的，但却逐漸地深化和愈益准确，不但原子是不可穷尽的，电子和其他基本粒子也都是不可穷尽的，二十世紀物理学的发展史完全证实了这个观点。

著名的俄国化学家門捷列夫所发现的周期律是具有重大意义的，周期律指出了各种化学元素的原子間互相关联的性质，是建立原子結構理論时的一个指导原則。下面，我們就要簡略地說明原子結構理論的发展过程。

在1897年前后，科学家們逐漸地确定了电子的各种基本特性，并确立了电子是各种化学元素的原子的共同組成部分。既然一切原子中都有带負电的电子，那么原子中就必然有带正电的物质，这說明原子是一个复杂的带电系統。从实验和理論两方面来研究原子本身的結構、內在的規律性和原子現象的应用等，就形成了原子物理学的丰富內容，在研究原子結構中首先要解决的問題就是原子中带正电的物质的分布情况。二十世紀初期，对这一問

題曾提出了兩種不同的假設。

第一種假設是湯姆孫在 1903 年提出的，他假設原子中的正電荷以均勻的體密度分布在一個大小等於整個原子的球體內，而帶負電的電子則一粒粒地在球內不同的位置上分布着，並可以分別地以某種頻率在各自的平衡位置附近振動，從而發出電磁輻射，輻射的頻率就等於電子振動的頻率。這個模型和實驗的結果相矛盾，所以很快地就被放棄了。

第二種假設是盧瑟福於 1912 年提出的，他假設原子中心是一個重的帶正電的核，電子圍繞這核轉動，與太陽系的構造相似。與整個原子的大小相比，核是很小的。這種模型叫做原子底核模型，是盧瑟福在他所做的著名實驗即 α 粒子散射實驗的基礎上提出來的，同時也和其他實驗結果符合，所以很快地就被公認了。

經典的電磁理論是與原子的核模型有矛盾的。因為根據經典電磁理論，繞核旋轉的電子有加速度，應當自動地放出輻射能來，放出輻射能時，原子的能量要逐漸地減少，頻率也逐漸地改變，因而發射光譜是連續光譜，同時電子因能量的逐漸減少要逐漸地接近原子核而最後和核碰上，因此使原子成為一個不穩定的系統。但事實上原子是穩定的，原子所發射的光譜是綫狀的而不是連續的。這些事實說明了從研究宏觀現象而確立的經典理論，不能適用於原子中的微觀過程，因而就需要進一步分析原子現象，探索原子內部的規律性，並建立適合於微觀過程的原子理論。

原子的發光現象是與原子內部結構有密切聯系的，因此為了要探索原子內部的規律性，也必須對光的本性有進一步的了解。經典的電磁波理論能夠很好地解釋反射、干涉……等光在傳播過程中所表現的現象，但在受熱物體的發光現象——熱輻射——中，經典理論就遇到了困難，不能解釋全部實驗結果。為了解決這個問題，德國物理學家普朗克於 1900 年提出了量子假說，他假設受熱

物體中振動着的帶電粒子所可能具有的能量不是連續的，而是某一最小量值的整數倍，帶電粒子所放出的或吸收的能量也仅是這最小能量的整數倍。這個假說很成功地說明了熱輻射現象。

當紫外光這一類波長較短的光綫照射在金屬表面上時，金屬中有電子逸出來，這現象稱為光電效應。經典的理論更不能解釋這種現象。為了解決這個問題，愛因斯坦於1905年提出了光子的假說，他假設光是由一顆一顆具有一定質量、能量和動量的粒子所組成的粒子流，這種粒子稱為光子。這個假說能夠很好地解釋光電效應，使量子論又向前推進了一步。

原子所發射的綫光譜和原子內部結構的關係問題也是經典理論無法解答的。1913年，丹麥物理學家玻爾（N. Bohr）在盧瑟福所提出的核模型的基礎上，發展了量子概念，提出了有關原子結構的假說。他假設原子所可能具有的能量形成不連續的能級，當原子的能級發生躍遷時，就發射出一定頻率的光。玻爾的假說能夠說明氫原子光譜等某些原子現象，有相當地成功；但對原子問題作進一步的研究時，也顯示出這理論有很大的缺點。

在1924年德布羅意（De Broglie）提出了粒子的波動性的假說後，薛定諤（Schrödinger）和其他學者在這新的基礎上建立起了量子力學，能很好的解釋原子現象，但這並不是說量子力學已經很完全地解決了原子問題。原子是不可窮盡的。由於實驗技術的不斷發展，將能更進一步地認識原子現象，從而理論將進一步發展，比現在形式的量子力學能夠更深入地反映原子的規律性。

原子物理學發展的次一階段是研究原子核的內部結構。在1896—1898年間，法國物理學家貝克勒耳（H. Becquerel）發現鉀鹽能夠發出某種人眼所看不見的射綫來，這種現象稱為天然放射性現象；接着瑪麗亞·斯克拉多夫斯卡·居里（Marie Skłodowska Curie）和彼埃耳·居里（Pierre Curie）夫婦發現具有放射性更強的

鐳元素。1902—1903年間盧瑟福等研究了天然放射綫的組成及天然放射現象的規律性。這些事實說明了原子核是一個複雜體而且按照一定的規律運動變化着。

1919年，盧瑟福利用天然放射綫中的 α 射綫轟擊氮原子，第一次得到了人為的核反應，並發現了質子。1932年，查德維克(Chadwick)發現了中子的存在。接着蘇聯物理學家伊凡寧科(Д. Д. Иваненко)提出了原子核是由質子和中子所組成的假設。科學家們在這一階段中的工作初步奠定了原子核結構問題的基础。

1934年約里奧居里夫婦發現了人為的放射性核；勞倫斯用人工加速粒子產生了放射性核；費密用中子引起了核反應。這些研究打開了同位素應用和核反應研究的途徑。

1939年哈恩和史特拉斯曼發現了重核的分裂，約里奧居里等人研究了鈾核分裂的鏈鎖反應，指出這類核反應中有巨大的能量發生。

1942年費密及其同事們建成了世界上第一個原子核反應堆，實現了原子核的鏈鎖反應，為原子能的利用及製備放射性同位素提供了條件。並提供了新的實驗方法以研究核的結構。

1957年世界上最大的同步穩相加速器，可將質子加速到具有100億電子伏特的能量。

由於高能物理的研究，最近幾年在基本粒子物理方面也取得很大的成就，迄今已預見或發現了許多類型的基本粒子，關於基本粒子的理論方面的研究主要是以量子場論為基礎。

在我國，關於近代物理的研究在1930年前后才略有開始，解放以前，散在全國各地的原子核科學研究人員只有10人左右，設備方面，連一台小型的加速器也沒有，最簡單的觀測粒子用的計數管也不能生產。解放以後，在黨的領導下，我國原子核物理學的研究得到了迅速的發展。1958年6月，我國建成了規模比較大的重

水型研究性反应堆，制成了能把 α 粒子加速到二千五百万电子伏特的迴旋加速器。利用这些加速器和反应堆进行着原子核物理、輻射化学、同位素制备、放射生物等方面的研究工作。在探测仪器方面，制成了核子乳胶和中子計数管及 β 、 γ 計数管等等。关于宇宙綫和高能物理方面，建立了宇宙綫实验室，和观测宇宙綫的設備，研究了重介子和超子的质量及衰变現象等。我国学者还参加了联合原子核研究所的研究工作，取得了若干重要成果。

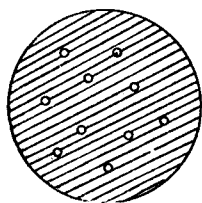
放射性化学和同位素应用的工作亦已建立起来，同位素的应用对于发展生产技术和各种基础科学的科学研究具有广泛的直接意义，我国社会主义工农业建设的迅速发展，給原子能科学展示了无限广阔的远景。

第一章 原子結構初期理論的實驗基礎

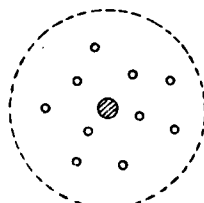
二十世紀初，經過相當長時期的探索後，對原子本身的結構和原子的內部規律才得到比較清楚的了解。本章中將介紹一些對探索原子內部結構和建立原子結構理論起直接作用的基本實驗和實驗規律。盧瑟福的原子的核模型和玻爾的原子結構理論就是在這些實驗的基礎上建立起來的。

§ 1.1. α 粒子的散射實驗和原子的核模型

緒論中曾指出，在二十世紀初期曾提出兩種不同的原子結構模型，一種是 1903 年湯姆孫提出的，他假設原子中的正電荷以均勻體密度分布在一個大小等於整個原子的球體內，而電子則一粒粒地分布在這球內的不同位置上。另一種是 1912 年盧瑟福提出的，他假設原子內部的正電荷聯繫着大的質量而集中在很小的中心體積內（即原子核），帶負電的電子則分布在與原子大小同數量級的封閉軌道上，繞核旋轉，像行星系一樣，對於中性原子，則所有電子所帶負電荷之和等於原子中心的正電荷。由於這個模型假設原子具有一個很小的帶正電荷的核心存在，故稱為原子的核



(1) 湯姆孫的模型



(2) 盧瑟福的模型

圖 1.1. 原子結構模型的示意圖，圖中小圓圈代表電子，斜綫處代表正電荷的分布。

模型。

上面提出的两种模型,究竟哪一种正确,曾由 α 粒子的散射实验来检验。汤姆孙的模型和实验结果相矛盾,所以很快就被放弃了。显然这个模型带有人为的性质,因为在这模型中给与正电荷与负电荷以不同的性质:负电荷以单个的微粒(电子)存在,而正电荷则在甚大的体积内以均匀的体密度分布着。卢瑟福的原子的核模型就是在 α 粒子的散射实验的基础上提出来的,由这个模型出发所作的 α 粒子散射理论与实验结果符合得很好,所以这个模型很快地就被公认了。我们就要在下面叙述 α 粒子的散射实验。

α 粒子的散射实验是用下列原则设计出来的:用高能的 α 粒子去碰撞原子,使与原子发生相互作用并引起可以观察到的散射现象。分析和概括这些观察到的散射现象,可以逐步探索原子内部的结构,从而检验上面所述的原子模型是否正确。在这种实验中用的 α 粒子是从放射性元素中发射出来的原子量为 4 而带有双倍正的元电荷 $+2e$ 的氦离子,这样放射出来的 α 粒子速度高(达光速的 $1/15$),且其质量也较大,约为电子质量的 7400 倍;因而具有很高的能量。用这样的 α 粒子所组成的平行射线注通过很薄的金属箔(金,银或铜等)后,发生散射现象,即一些 α 粒子改变了原来的运动方向而偏转一个角度。 α 粒子的散射情况可用闪烁法直接观察,其原理是当单个的 α 粒子碰撞荧光屏时,能够使荧光屏发出光亮的闪光,用放大镜就可观察到这种闪光。 α 粒子通过金属箔后发生偏转的现象,可以设想是由于高能的 α 粒子深入到金属箔中的原子内部后与其中的正电荷或负电荷相互作用所引起的。由于 α 粒子的质量比电子的质量大很多倍,电子作用于 α 粒子上的力不能显著地改变 α 粒子的运动方向。所以 α 粒子的散射可以看作是由于受到原子内部的正电荷的斥力所产生的。 α 粒子的散射情况应当与原子内正电荷的分布情况有关系,故研究 α 粒子的散

射情况可以探索原子內正電荷的分布情况。

α 粒子散射實驗的裝置可用示意图 1.2 表示。图中 R 为一放

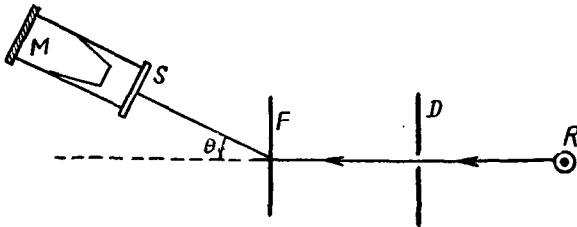


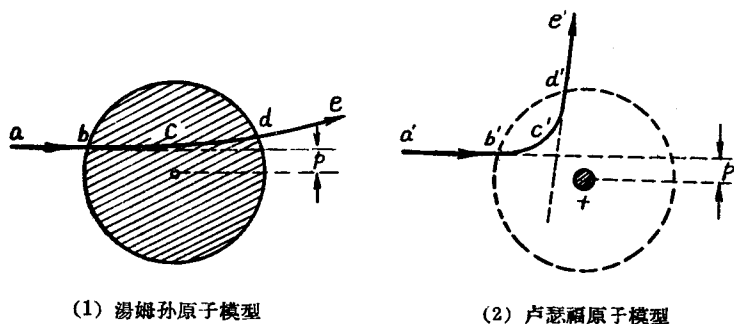
图 1.2. α 粒子散射實驗的示意图。

有少量放射性元素錒 (RaO) 的放射源, 由其中放出的 α 粒子經過柵欄組 D 后, 成为一束狹窄的均匀的 α 射綫, 通过金属箔叶 F 后, 由于各 α 粒子會受金属箔中原子的不同影响, 将沿着不同的方向散射。荧光屏 S 及放大鏡 M 可以沿着以 F 为中心的圓弧上移动。当 S 和 M 对准某一方向时, 通过 F 而在这个方向散射的 α 粒子就射到 S 上而产生閃光, 用放大鏡 M 观察閃光, 就可把单位時間內在这个方向散射的 α 粒子数記錄下来。用这种方法就可以研究 α 粒子通过金属箔叶后按不同的散射角 θ 的分布情况。为了避免空气分子对散射的影响, α 粒子的散射必須在真空中进行, 故图 1.2 所示的仪器除放大鏡外都应放在真空室內。

盖革 (Geiger) 与馬斯敦 (Marsden) 在 1909 年按照上述的實驗方法发现大多数的 α 粒子經過金属箔叶后偏轉的角度是不大的; 但有少数 α 粒子偏轉的角度却很大, 約有 8000 分之一的 α 粒子的散射角度超过 90° 以上, 有的几乎达到 180° , 即和入射时相反的方向散射。

为什么 α 粒子会发生大角度的散射? 这与原子中正电荷的分布情况有密切关系。如果采用湯姆孙的原子模型, 即假設原子的正电荷均匀地分布在整個原子中, 它的半徑的数量級为 10^{-8} 厘米,

则由计算可知， α 粒子通过原子时不会发生实验中所观察到的大角度散射，汤姆孙的原子模型因此就被放弃了。只有原子的正电荷集中在很小的体积的情形下，排斥力才会大到使 α 粒子发生大角度的散射，卢瑟福就是根据这种情况提出了原子的核模型的。 α 粒子在两种不同的原子模型中散射的情况，可用示意图 1.3 表示。



(1) 汤姆孙原子模型

(2) 卢瑟福原子模型

图 1.3. α 粒子在两种原子模型中散射情况的比较。

在图中所示的两种情形中，投射情况一样，即投射方向与原子中心的最短距离均为 p ，称为“瞄准”距离；在 α 粒子尚未进入原子内的一段过程中，即 ab 及 $a'b'$ ，在两种模型下所受的斥力都一样，但在进入原子内部后，在两种模型下所受的斥力就大不一样了。在汤姆孙模型的情况下， α 粒子进入原子后所受的斥力愈来愈小，如图 1.4 所示，当 α 粒子进入原子内离中心 r 远时所受的斥力是包含在半径为 r 的球体内的正电荷所给与的；设原子的半径为 a ，所含的正电荷为 Ze ， Z 为一整数，则正电荷的体密度为 $\rho = Ze / \frac{4}{3}\pi a^3$ ，故包含在半径

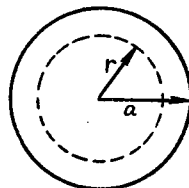


图 1.4.

为 r 的球体内的正电荷为 $Q = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = Zer^3/a^3$ ， α 粒子所带的正电荷为 $2e$ ，当 α 粒子在原子内离中心 r 远处时所受的斥力为 $F_1 =$

$=2eQ/r^2=2Ze^2r/a^3$, 由此可知, 当 α 粒子离中心愈近时所受的斥力愈小; 当其对准中心通过时, r 为零, 所受的斥力为零。在卢瑟福模型的情况下, α 粒子进入原子后所受的斥力愈来愈大, 与在汤姆孙模型中的情况相反, 因为这时排斥 α 粒子的正电荷 Ze 全集中在原子的中心固定不变, 当 α 粒子离中心的距离为 r 时, 所受的斥力为 $F_2=2e \cdot Ze/r^2=2Ze^2/r^2$, 故 α 粒子逐步接近中心时所受的斥力, 按距离的平方反比律随距离的减少而一直增大, 可以大到使 α 粒子偏轉很大的角度。在原子内离中心相同的距离 r 上, 在卢瑟福模型中所受的斥力 F_2 要比在汤姆孙模型中所受的斥力 F_1 大 $F_2/F_1=a^3/r^3$ 倍, 愈接近中心时, 在两种情形中所受的斥力相差愈大。根据以上的分析显然可見, 在汤姆孙模型的情形下 α 粒子不能产生大角度的散射, 而在卢瑟福的情形下可以产生大角度的散射。

在原子的核模型的基础上, 卢瑟福曾提出了下述的 α 粒子散射的定量理論, 以便可与实验結果作定量的比較, 从而可以进一步檢驗这个模型与散射理論。

在原子的核模型中 α 粒子的散射軌道如图 1.5 所示。由于电

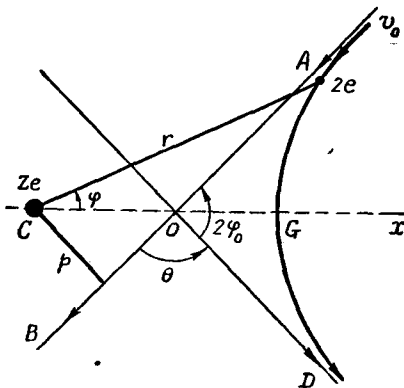


图 1.5. 在原子的核模型中 α 粒子散射时的軌道。

子的质量很小,对 α 粒子的作用很小,可以略去不计。所以,当 α 粒子接近原子核时,可以当作只是有两个带正电的点电荷(α 粒子与原子核)相互以静电斥力作用,而且假设服从库仑定律。已知 α 粒子的电荷为 $2e$,若原子核的电荷为 Ze (Z 为一整数),当两者相距 r 时,相互排斥的作用力为

$$F = \frac{2Ze^2}{r^2}.$$

若原子核的质量比 α 粒子的大很多,则可以把前者看作是静止不动的。由于 α 粒子受原子核的斥力,它将偏转,而沿一双曲线的一支运动,原子核处在其外焦点处。当 α 粒子离开原子核时将沿 OD 方向运动,与其原来射入时的方向 AB 成 θ 的角度,如图 1.5 所示。我们可以算出 α 粒子的散射角度 θ 与粒子投射时的能量和瞄准距离 p 之间的关系。

设 α 粒子的质量为 M , 投射时以速度 v_0 沿 AB 方向向原子核投射,当接近原子核 C 时,受有斥力 F 的作用,在距核为 r 处速度改变为 v ,根据能量守恒与动量矩守恒定律,我们有:

$$\frac{1}{2} M v_0^2 = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{2Ze^2}{r}, \quad (1.1)$$

$$M v_0 p = M \left(r \frac{d\varphi}{dt} \right) r. \quad (1.2)$$

将公式(1.1)中的 v^2 用极坐标表示,则得:

$$v_0^2 = \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(r \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] + \frac{4Ze^2}{Mr}, \quad (1.3)$$

由(1.2)式得

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{p v_0}{r^2}, \quad (1.4)$$

且

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{p v_0}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}. \quad (1.5)$$