

有限单元法教程

王焕定 王伟 编著

哈尔滨工业大学出版社



82

01

有限单元法教程

王焕定 王 伟 编著

哈尔滨工业大学出版社

哈尔滨

内 容 简 介

本书从杆系有限元入手,较全面地介绍了有限单元法的基本原理。全书共分 12 章,作为教材,内容除最基本的弹性力学有限单元法外,还简单介绍了广义变分原理及其应用、加权余量、广义协调、半解析、样条元和边界单元法等基本知识,为适应部分专业研究生应用,还增加了非线性有限元的基础知识内容。

考虑到有限元离不开计算机数值分析,因此,本书附有配书光盘,对前五章内容均有相应的教学参考程序,给读者提供了计算工程模拟问题和真实问题的应用程序。此外,为了给读者学习有限元计算的具体实现提供一定帮助,对平面问题静力弹性分析程序给出了带有较详细注释的源程序。

本书可作为高等学校土木、水利、道路与桥涵及机械等专业高年级学生和研究生教材,也可供相关专业工程设计和研究人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

有限单元法教程/王焕定,王伟编著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2003.9

ISBN 7-5603-1940-8

I.有… II.①王… ②王… III.有限元法-高等学校-教材 IV.0241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 087679 号

出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区教化街 21 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
印 刷 哈尔滨工业大学印刷厂
开 本 787×1092 1/16 印张 20.5 字数 500 千字
版 次 2003 年 10 月第 1 版 2003 年 10 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 7-5603-1940-8/O·157
印 数 1~3 000
定 价 28.00 元

前 言

随着计算机硬、软件的飞速发展,土木、水利、交通(桥涵)和机械等领域的设计工作都已进入计算机辅助设计(CAD)、计算机辅助制造(CAM)阶段,并向智能辅助设计、智能辅助制造(ICAD、ICAM)方向发展。不论是CAD(ICAD),还是CAM(ICAM),其核心都是计算分析,有限单元法则是计算分析的主要手段之一。要想正确使用辅助设计或辅助制造的大型商用软件,要想结合所研究的工作根据需要进行二次开发,或深入研究一些工程问题,都必须要有较扎实的有限单元法知识。因此,几乎所有高校的土木、水利、交通(桥涵)和机械等专业,都为高年级学生安排了有限单元法基础课程,为研究生开设了有限单元法及程序的学位课程。

本书共分为12章:前5章为基础部分,可供上述专业本科高年级学生使用;后7章属提高部分,可供研究生使用。由于有限单元法的文献资料实在太多,在确定本书取材时,作为基础部分的内容较为容易确定。但是,作为提高部分的内容就不好取舍了。根据土木、水利、交通(桥涵)和机械等专业研究工作经常使用的知识,我们选择了广义变分原理及应用、其他数值方法和非线性分析等的基本知识。着重介绍基本思想,为进一步学习和研究打下必要的基础。

本书由哈尔滨工业大学土木工程学院王焕定、王伟在多年教案、讲义的基础上撰写而成。其中第1~6章由王伟撰写;第7~12章由王焕定撰写。全书内容都有相应的计算程序(带有交互输入,且大部分有图形后处理功能),这些程序虽然作为教学程序比较简单,但仍可用来解决工程问题计算。全部程序由王焕定提供。

由于本书公式较多,故以节为单元划分公式编号;同时考虑到临时推导公式的中间过程等式,在后续章节中用不到,或不重要,故为它们以章为单元安排了小序号,特此说明。

在本书编写过程中得到哈尔滨工业大学土木工程学院的领导大力支持,也得到了张金生等老师的大力协助,在此一并表示衷心的感谢。

由于作者水平所限,加之时间太紧,书中难免存在不妥及疏漏之处,望广大读者给予指正。

作 者
2003年9月
于哈尔滨工业大学

目 录

第 1 篇 弹性力学有限元法

| | |
|-----------------------------|-----|
| 第 1 章 预备知识 | 1 |
| 1.1 引言 | 1 |
| 1.2 矩阵符号约定 | 1 |
| 1.3 弹性理论有关方程的矩阵表示 | 2 |
| 1.4 虚位移原理与势能原理 | 6 |
| 1.5 里兹法 | 15 |
| 习题 | 20 |
| 第 2 章 杆系有限元分析 | 22 |
| 2.1 平面等直杆的单元分析 | 22 |
| 2.2 近似分析中虚位移原理的实质 | 28 |
| 2.3 平面杆系结构的整体分析 | 32 |
| 2.4 本章内容小结 | 39 |
| 习题 | 39 |
| 第 3 章 弹性力学平面问题 | 41 |
| 3.1 引言 | 41 |
| 3.2 常应变三角形单元 | 42 |
| 3.3 有限元分析中的误差及收敛性 | 49 |
| 3.4 矩形双线性单元 | 50 |
| 3.5 单元的形函数及高阶单元 | 54 |
| 3.6 等参数单元的单元分析 | 66 |
| 3.7 有限元分析中一些应注意的问题 | 81 |
| 习题 | 85 |
| 第 4 章 空间与轴对称问题 | 89 |
| 4.1 空间问题 | 89 |
| 4.2 轴对称问题 | 105 |
| 4.3 轴对称问题的等参元分析 | 110 |

| | |
|---|------------|
| 4.4 非轴对称荷载 | 111 |
| 习题 | 117 |
| 第 5 章 板壳有限元 | 119 |
| 5.1 12 自由度矩形薄板弯曲单元(R. J. Melosh 单元) | 119 |
| 5.2 9 自由度三角形薄板弯曲单元 | 129 |
| 5.3 弹性地基板的分析 | 137 |
| 5.4 SAP 薄板弯曲单元 | 141 |
| 5.5 建立薄板弯曲协调元方法简介 | 147 |
| 5.6 考虑横向剪切影响的薄板弯曲单元 | 149 |
| 5.7 平面壳体单元 | 155 |
| 5.8 考虑横向剪切变形影响的壳体单元(曲面壳元) | 164 |
| 5.9 轴对称变形的旋转壳单元 | 173 |
| 5.10 广义协调元简介 | 177 |
| 习题 | 181 |
| 第 6 章 广义变分原理及其在有限元分析中的应用 | 183 |
| 6.1 虚力原理与余能原理 | 183 |
| 6.2 泛函的变换格式 | 185 |
| 6.3 含可选参数的广义变分原理 | 188 |
| 6.4 基于 Reissner 原理的混合元分析 | 190 |
| 6.5 薄板弯曲问题的混合元分析 | 192 |
| 6.6 放松边界连续性要求的变分原理及杂交元 | 199 |
| 6.7 本章的几点补充说明 | 205 |
| 习题 | 206 |
| 第 7 章 其他数值方法简单介绍 | 207 |
| 7.1 加权余量法的基本概念 | 207 |
| 7.2 离散型加权余量法 | 211 |
| 7.3 弹性力学平面问题的加权余量法 | 216 |
| 7.4 加权余量有限元及平面稳定温度场计算 | 218 |
| 7.5 广义协调元简介 | 223 |
| 7.6 半解析法 | 229 |
| 7.7 样条有限元 | 236 |
| 7.8 边界单元法的基本概念 | 240 |
| 7.9 弹性力学边界元间接法 | 244 |
| 7.10 弹性力学边界元直接法 | 245 |

第 2 篇 非线性有限元法简介

| | |
|---|-----|
| 第 8 章 非线性代数方程组的数值解法 | 251 |
| 8.1 直接迭代法 | 251 |
| 8.2 牛顿法和修正牛顿法 | 253 |
| 8.3 拟牛顿法 | 254 |
| 8.4 增量法 | 259 |
| 8.5 增量弧长法 | 261 |
| 第 9 章 非线性本构关系简介 | 264 |
| 9.1 弹性介质本构关系 | 264 |
| 9.2 弹塑性介质本构关系 | 265 |
| 9.3 几种常用弹塑性材料模型简介 | 270 |
| 9.4 弹塑性本构关系弹塑性矩阵 D_{ep} 的建立步骤 | 272 |
| 第 10 章 材料非线性有限元分析 | 273 |
| 10.1 非线性弹性问题的有限单元法 | 273 |
| 10.2 弹塑性问题的有限单元法 | 276 |
| 第 11 章 固体力学大变形基础知识 | 279 |
| 11.1 物体运动等的物质描述 | 279 |
| 11.2 格林(Green)和阿耳曼西(Almansi)应变 | 281 |
| 11.3 物体运动等的空间描述和变形率 | 283 |
| 11.4 欧拉(Euler)、拉格朗日(Lagrange)、克希荷夫(Kirchhoff)应力 | 285 |
| 11.5 大变形情况下的平衡方程和虚位移原理的虚功方程 | 288 |
| 11.6 大变形情况的本构关系 | 290 |
| 第 12 章 大变形问题的有限单元法 | 292 |
| 12.1 弹性稳定问题的有限单元法 | 292 |
| 12.2 大变形弹性问题的有限单元法 | 297 |
| 12.3 大变形增量问题的 T.L 法和 U.L 法 | 298 |
| 附录 1 二维和三维问题程序简介 | 306 |
| 附 1.1 简要说明 | 306 |
| 附 1.2 主程序框图 | 306 |
| 附 1.3 数据文件所包含的内容 | 306 |
| 附录 2 向量与张量 | 310 |
| 附 2.1 向量 | 310 |

| | |
|-------------------------------|------------|
| 附 2.2 字母标记法与求和约定 | 311 |
| 附 2.3 张量的概念 | 313 |
| 附录 3 弹性力学问题的张量表示 | 316 |
| 附 3.1 基本方程的张量表示 | 316 |
| 附 3.2 关于应力分析中的一些张量表示 | 316 |
| 附 3.3 关于应变分析中的一些张量表示 | 318 |
| 参考文献 | 319 |

第 1 篇 弹性力学有限元法

第 1 章 预备知识

1.1 引言

有限元法(Finite Element Method)是随着电子计算机的广泛应用而产生的一种计算方法。它是近似求解一般连续体问题的数值方法。

从物理方面看:它是用仅在单元结点上彼此相连的单元组合体来代替待分析的连续体,也即将待分析的连续体划分成若干个彼此相联系的单元。通过单元的特性分析,来求解整个连续体的特性。

从数学方面看:它是使一个连续的无限自由度问题变成离散的有限自由度问题,使问题大大简化,或者说使不能求解的问题能够求解。一经求解出单元未知量,就可以利用插值函数确定连续体上的场函数。显然,随着单元数目的增加,即单元尺寸的缩小,解的近似程度将不断得到改进。如果单元是满足收敛要求的,近似解将收敛于精确解。

有限元法借助于两个重要工具:在理论推导上采用了矩阵方法,在实际计算中采用了计算机技术。

本章将介绍学习有限元法的必要预备知识。下面介绍的弹性理论有关方程的矩阵表示以及虚位移原理与势能原理是建立有限元方程的重要理论基础。

1.2 矩阵符号约定

为书写方便,无论是一般矩阵,还是行阵、列阵均采用黑斜体字母来标记。例如

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{记为 } A; [F_{S1} \ F_{S2} \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ F_{Sn}] \text{记为 } F_S。$$

单位矩阵以特定符号记为 I 或 I_n , 后者的脚标 n 用以表示单位矩阵的阶数。

对角线矩阵以普通矩阵符号标记加脚标 diag 来表示。例如

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & & & \\ & a_{12} & & & & \\ & & a_{33} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & a_{nn} \end{bmatrix} \text{记为 } A_{\text{diag}}$$

块对角矩阵采用如下方式来标记

$$\begin{bmatrix} K_1 & & & & & \\ & K_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & K_n & \\ & & & & & & \end{bmatrix} \text{记为 } K_{\text{bdia}} \text{ 或 } \text{diag}[K_1 K_2 \cdots K_n]。$$

1.3 弹性理论有关方程的矩阵表示

以笛卡儿坐标三维问题为例来说明弹性理论有关方程矩阵的表示方式。

1.3.1 运动方程(内力与体积力的关系方程)

由弹性理论可知,在体积 V 内任意一点的运动方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_{bx} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_{by} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_{bz} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{cases} \quad (1.3.1)$$

当记

$$\begin{cases} \mathbf{d} = [u \ v \ w]^T \text{ (位移列阵)} \\ \mathbf{F}_b = [X \ Y \ Z]^T \text{ (体积力列阵)} \\ \boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}]^T \text{ (应力列阵)} \end{cases} \quad (1.3.2)$$

时,若引入如下微分算子矩阵

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \quad (1.3.3)$$

则根据矩阵乘法规则不难证明,体内一点的运动方程可用如下矩阵方程来表示

$$\text{在 } V \text{ 内} \quad \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F}_b = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{d}}{\partial t^2} \quad (1.3.4)$$

当物体在外力作用下处于平衡状态时,上式变为平衡方程

$$\text{在 } V \text{ 内} \quad \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F}_b = \mathbf{0} \quad (1.3.5)$$

1.3.2 几何方程(应变与位移的关系方程)

由弹性理论可知,在微小变形情况下一点的六个应变分量可用位移表示,即

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{cases} \quad (1.3.6)$$

当记应变列阵 $\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]^T$ (1.3.7)

时,由矩阵乘法不难验证几何方程可用如下矩阵方程表示

在 V 内 $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{A}^T \mathbf{d}$ (1.3.8)

式中 \mathbf{A}^T ——微分算子 \mathbf{A} 的转置矩阵。

1.3.3 本构关系(物理方程——应力与应变的关系方程)

对于各向同性均质线弹性体,由弹性理论可知,应力与应变之间存在如下本构关系

$$\text{在 } V \text{ 内 } \begin{cases} \epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] & \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy} \\ \epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] & \gamma_{yz} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{yz} \\ \epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] & \gamma_{zx} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{zx} \end{cases} \quad (1.3.9)$$

当记

$$\mathbf{a} = \mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ -\mu & 1 & & & & & & \\ -\mu & -\mu & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & & \end{bmatrix} \quad \text{对称} \quad (1.3.10)$$

时,式(1.3.9)的本构关系可用如下矩阵方程表示

在 V 内 $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{a}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma}$ (1.3.11)

或 $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{a}^{-1}\boldsymbol{\epsilon}$ (1.3.12)

上式中 \mathbf{D} 为弹性矩阵,由 \mathbf{a} 矩阵求逆可知

$$\mathbf{D} = \text{diag}[\mathbf{D}_1 \quad \mathbf{D}_2] \quad (1.3.13)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{D}_1 = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}_2 = \frac{E}{2(1+\mu)} \mathbf{I}_3 \end{cases} \quad (1.3.14)$$

当以拉梅系数表示本构关系时,有

$$\begin{cases} \mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}_2 = GI_3 \end{cases} \quad (1.3.15)$$

式中的拉梅系数为

$$\begin{cases} \lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} \\ G = \frac{E}{2(1+\mu)} \end{cases} \quad (1.3.16)$$

1.3.4 变形协调方程

当以应力作为基本未知量求解弹性力学方程时,通过本构关系所得的应变尚须在体积内满足如下变形协调方程

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (1.3.17)$$

在 V 内

引入协调算子矩阵

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial z^2} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} & 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \\ -2\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} & -\frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \\ 0 & -2\frac{\partial^2}{\partial z \partial x} & 0 & \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 0 & 0 & -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -\frac{\partial^2}{\partial z^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \end{bmatrix} \quad (1.3.18)$$

变形协调方程可用如下矩阵方程表示

$$\text{在 } V \text{ 内} \quad \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{0} \quad (1.3.19)$$

1.3.5 边界条件

1.3.5.1 应力边界条件

在已知表面力的边界面 S_σ 上,体内的应力与表面力之间存在如下应力边界条件在 S_σ 上

$$\begin{cases} F_{Sx} = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \\ F_{Sy} = \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n \\ F_{Sz} = \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n \end{cases} \quad (1.3.20)$$

式中 F_{Sx}, F_{Sy}, F_{Sz} ——已知表面力 x, y, z 方向分量;

l, m, n ——表面外法线方向余弦。

当记表面力矩阵为

$$F_S = [F_{Sx} \quad F_{Sy} \quad F_{Sz}]^T \quad (1.3.21)$$

时,表面外法线方向余弦矩阵为

$$L = \begin{bmatrix} l & 0 & 0 & m & 0 & n \\ 0 & m & 0 & l & n & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 & m & l \end{bmatrix} \quad (1.3.22)$$

则应力边界条件可用矩阵方程表示如下

$$\text{在 } S_\sigma \text{ 上} \quad F_S - L\sigma = 0 \quad (1.3.23)$$

1.3.5.2 位移边界条件

在已知位移的边界面 S_u 上,体内的位移满足如下位移边界条件

$$\text{在 } S_u \text{ 上} \quad \begin{cases} u = \bar{u} \\ v = \bar{v} \\ w = \bar{w} \end{cases} \quad (1.3.24)$$

式中 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ ——已知位移沿坐标的分量。

$$\text{若记} \quad \bar{d} = [\bar{u} \quad \bar{v} \quad \bar{w}]^T \quad (1.3.25)$$

为已知位移矩阵,则式(1.3.24)在 S_u 上可改写为

$$d - \bar{d} = 0 \quad (1.3.26)$$

1.3.6 小结

综上所述,线弹性微小变形弹性理论全部方程和边界条件的矩阵表示为

| | | |
|----------------|--------|--|
| 在 V 内 | 运动方程 | $A\sigma + F_b = \rho \frac{\partial^2 d}{\partial t^2}$ |
| | 平衡方程 | $A\sigma + F_b = 0$ |
| | 几何方程 | $\varepsilon = A^T d$ |
| | 本构关系 | $\sigma = D\varepsilon$ |
| | 变形协调方程 | $C\varepsilon = 0$ |
| 在 S_σ 上 | 应力边界条件 | $F_S - L\sigma = 0$ |
| 在 S_u 上 | 位移边界条件 | $d - \bar{d} = 0$ |

1.4 虚位移原理与势能原理

不少书籍、资料中把虚位移原理表述成必要性命题,也即“若平衡,则对一切虚位移虚功方程恒成立”,根本不提原理充分性。个别书籍只证明原理的必要性,却将原理叙述成充要性命题,也即“若对一切虚位移虚功方程恒成立,则变形体必处于平衡状态”。我们曾对变形体虚位移原理的合理表述及证明进行过研究,本节仅就将变形体分割成无限个微元体集合的情况加以介绍。

1.4.1 变形体虚位移原理

1.4.1.1 外力总虚功的计算(无限分割情况)

下面以二维问题来说明外力总虚功的计算,对于三维问题读者可仿此自行建立相应算式。

1. 体内微元体上外力的总虚功计算

由图 1.1(a) 可见,以 A 点 x 方向负坐标面为例,面上应力的合力分别为

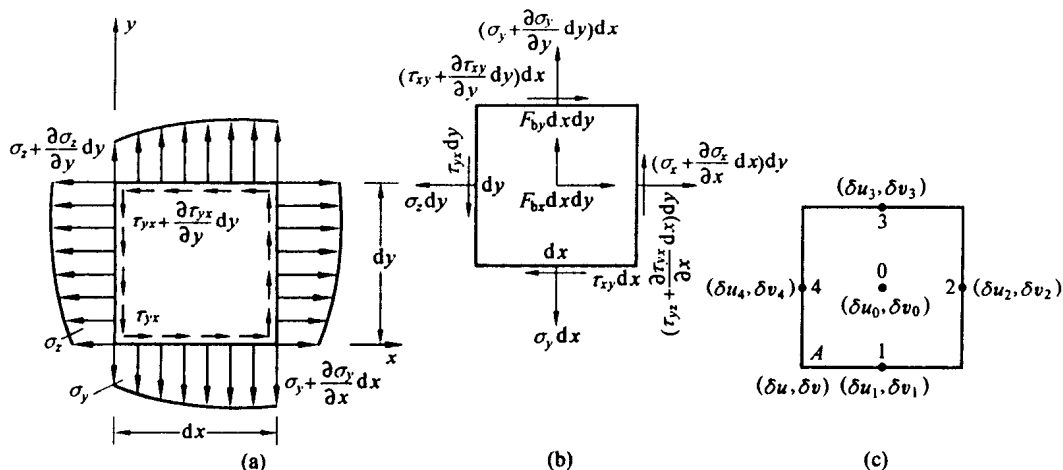


图 1.1 矩形微元体受力、虚位移示意图

$$\frac{1}{2} \left(\sigma_x + \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy \right) \cdot dy + \text{高阶小量(曲线面积)} \approx \sigma_x dy$$

$$\frac{1}{2} \left(\tau_{yx} + \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) \cdot dy + o(dy^3) \approx \tau_{yx} dy$$

其他面上合力均可仿此获得,从而微元体各面所受合力如图 1.1(b) 所示,其中 F_{bx} 、 F_{by} 为微元体上的坐标方向体积力密度。图 1.1(c) 所标各点虚位移是对应图 1.1(b) 各合力作用点选取的。由虚位移的连续性可知,图 1.1(c) 上点 0 至点 4 的虚位移可由基点 A 的虚位移 $(\delta u, \delta v)$ 表示如下(基点可任意取,基点不同则各点的虚位移也不同)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \delta u_0 = \delta u + \frac{1}{2} d(\delta u) & \delta v_0 = \delta v + \frac{1}{2} d(\delta v) \\ \delta u_1 = \delta u + \frac{1}{2} \frac{\partial \delta u}{\partial x} dx & \delta v_1 = \delta v + \frac{1}{2} \frac{\partial \delta v}{\partial x} dx \\ \delta u_2 = \delta u + \frac{\partial \delta u}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial \delta u}{\partial y} dy & \delta v_2 = \delta v + \frac{\partial \delta v}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial \delta v}{\partial y} dy \\ \delta u_3 = \delta u + \frac{\partial \delta u}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \frac{\partial \delta u}{\partial x} dx & \delta v_3 = \delta v + \frac{\partial \delta v}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \frac{\partial \delta v}{\partial x} dx \\ \delta u_4 = \delta u + \frac{1}{2} \frac{\partial \delta u}{\partial y} dy & \delta v_4 = \delta v + \frac{1}{2} \frac{\partial \delta v}{\partial y} dy \end{array} \right. \quad (1.4.1)$$

因此,微元体上的外力在微元体虚位移上所做的总虚功为

$$\begin{aligned} dW_{\text{四}} = & F_{bx} dx dy \delta u_0 + F_{by} dx dy \delta v_0 - \sigma_x dy \delta u_4 - \tau_{yx} dy \delta v_4 - \\ & \sigma_y dx \delta v_1 - \tau_{xy} dx \delta u_1 + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy \delta u_2 + \\ & \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx \right) dy \delta v_2 + \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) dx \delta v_3 + \\ & \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx \delta u_3 \end{aligned}$$

将式(1.4.1)代入上式,公式右端的虚位移均可由 δu 、 δv 表示,经整理并略去高阶微量后

$$\begin{aligned} dW_{\text{四}} = & \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_{bx} \right) \delta u + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_{by} \right) \delta v + \right. \\ & \left. \sigma_x \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right) \right] dx dy \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

将如下矩阵引入式(1.4.2)

$$\text{虚位移列阵} \quad \delta d = [\delta u \ \delta v]^T \quad (1.4.3(a))$$

$$\text{体积力列阵} \quad F_b = [F_{bx} \ F_{by}]^T \quad (1.4.3(b))$$

$$\text{应力列阵} \quad \sigma = [\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}]^T \quad (1.4.3(c))$$

$$\text{虚应变列阵} \quad \delta \varepsilon = [\delta \varepsilon_x \ \delta \varepsilon_y \ \delta \gamma_{xy}]^T \quad (1.4.3(d))$$

微分算子矩阵

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (1.4.3(e))$$

由几何方程有

$$\delta \varepsilon = A^T \delta d \quad (1.4.4)$$

所以式(1.4.2)的矩阵表示为

$$dW_{\text{四}} = [(A\sigma + F_b)^T \delta d + \sigma^T \delta \varepsilon] dx dy \quad (1.4.5)$$

(1) 从推导过程可以看出:

① $(A\sigma + F_b)^T \delta d dx dy$ 是微元体上全部外力在微元体刚性虚位移上所做的总虚功,记为 $dW_{\text{四,刚}}$ 。

② $\sigma^T \delta \varepsilon dx dy = \sigma^T (A^T \delta d) dx dy$ 是微元体上全部外力在微元体变形虚位移上所做的总虚功的主部(略去了高阶微量), 记为 $dW_{变}$ 。

③ $F_b^T \delta d dx dy$ 是微元体上外荷载在虚位移上所做的总虚功的主部, 记为 $dW_{体}$ 。

④ $[\sigma^T \delta \varepsilon + (A\sigma)^T \delta d] dx dy = [(\sigma^T A^T \delta d + \sigma^T A^T \delta d)] dx dy$ 是微元体上切割面力在虚位移上所做的总虚功的主部, 记为 $dW_{切}$ 。

(2) 当如上标记不同的微元体上有外力虚功时, $dW_{四}$ 有以下两种表示方法, 即

$$dW_{四} = dW_{四,刚} + dW_{变} \quad (\text{虚位移分成刚体与变形时})$$

$$dW_{四} = dW_{体} + dW_{切} \quad (\text{外力分成体积力与切割面力时})$$

因为表达的均为 $dW_{四}$ (微元体上外力总虚功), 因此

$$dW_{四,刚} + dW_{变} = dW_{体} + dW_{切}$$

2. 表面微元体上外力的总虚功计算

图 1.2 给出了表面三角形微元体受力及虚位移示意, 其中斜边长为 dS , F_{Sx} 、 F_{Sy} 为微元上的表面力, 微元体上各点的虚位移与微元体各面受力作用点相对应。由虚位移的连续性可知, 图 1.2(b) 中 0 点至 3 点的虚位移可由基点 A 的虚位移 $(\delta u, \delta v)$ 表示如下

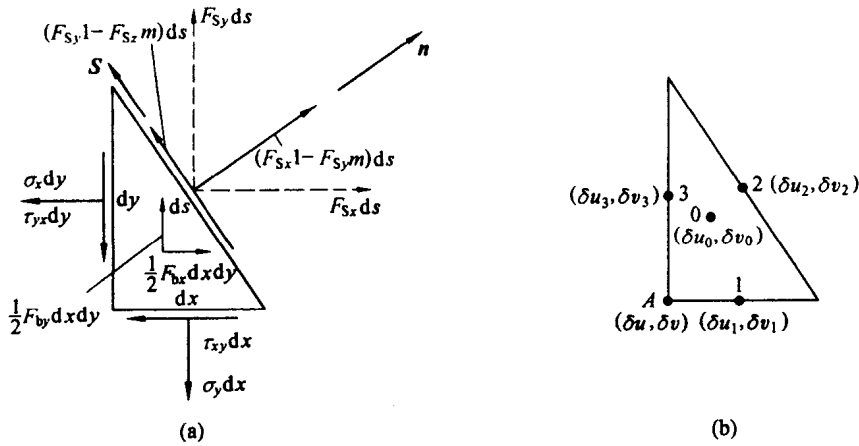


图 1.2 三角形微元体受力、虚位移示意图

$$\begin{aligned} \delta u_0 &= \delta u + \frac{1}{3} d(\delta u) & \delta v_0 &= \delta v + \frac{1}{3} d(\delta v) \\ \delta u_1 &= \delta u + \frac{1}{2} \frac{\partial \delta u}{\partial x} dx & \delta v_1 &= \delta v + \frac{1}{2} \frac{\partial \delta v}{\partial x} dx \\ \delta u_2 &= \delta u + \frac{1}{2} d(\delta u) & \delta v_2 &= \delta v + \frac{1}{2} d(\delta v) \\ \delta u_3 &= \delta u + \frac{1}{2} \frac{\partial \delta u}{\partial y} dy & \delta v_3 &= \delta v + \frac{1}{2} \frac{\partial \delta v}{\partial y} dy \end{aligned}$$

微元体上的外力所做的总虚功, 经整理且略去高阶项后为

$$dW_{三} = \{ [F_{Sx} - (\sigma_x l + \tau_{xy} m)] \delta u + [F_{Sy} - (\tau_{xy} l + \sigma_y m)] \delta v \} dS \quad (1.4.6)$$

其矩阵表示为

$$dW_{三} = (F_S - L\sigma)^T \delta d dS \quad (1.4.7)$$

式中 $F_S = [F_{Sx} \quad F_{Sy}]^T$, 为表面力矩阵;

$$(1.4.8(a))$$

$$L = \begin{bmatrix} l & 0 & m \\ 0 & m & l \end{bmatrix}, \text{为方向余弦矩阵。} \quad (1.4.8(b))$$

从推导可见, $dW_{\text{三}}$ 是边界微元体上全部外力在微元体刚性虚位移上所做的总虚功的主部, 记为 $dW_{\text{三,刚}}$ 。

$F_S^T \delta d dS$ 是微元体上外荷载在虚位移上所做的总虚功的主部, 记为 $dW_{\text{表}}$ 。

$-(L\sigma)^T \delta d dS$ 是微元体上切割面力在虚位移上所做的总虚功的主部, 记为 $dW_{\text{切}}$ 。

同矩形微元体一样, 有

$$dW_{\text{三}} = dW_{\text{三,刚}} = dW_{\text{表}} + dW_{\text{切}}$$

3. 变形体上外力的总虚功

由式(1.4.5)和式(1.4.7)可得变形体上外力的总虚功 $W_{\text{外}}$ 为

$$W_{\text{外}} = \int_A [(\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F}_b)^T \delta \mathbf{d} + \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}] dA + \int_{S_e} (\mathbf{F}_S - \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma})^T \delta d dS \quad (1.4.9(a))$$

在虚位移和微元体上外力作分解时, 上式也可表为

$$\begin{aligned} W_{\text{外}} &= \int_A dW_{\text{体}} + \int_{S_e} dW_{\text{表}} + \int_A dW_{\text{切}} = \int_A dW_{\text{四,刚}} + \int_{S_e} dW_{\text{三,刚}} + \int_A dW_{\text{变}} = \\ &= \int_A [(\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F}_b)^T \delta \mathbf{d} + \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}] dA + \int_{S_e} (\mathbf{F}_S - \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma})^T \delta d dS \end{aligned} \quad (1.4.9(b))$$

式(1.4.9)虽然是由二维问题推出的, 但只要所有矩阵都用三维问题情况代替, 即可变成三维的外力总虚功算式。

1.4.1.2 变形体虚位移原理(无限分割情况)

由上述分析可得, 任何变形连续体处于平衡状态的必要和充分条件是: 对任意虚位移, 外力所做的总虚功恒等于变形体所接受的总虚变形功, 也即恒满足如下虚功方程

$$W_{\text{外}} \equiv W_{\text{变}}$$

$$\text{或} \quad \int_V \mathbf{F}_b^T \delta \mathbf{d} dV + \int_{S_e} \mathbf{F}_S^T \delta d dS \equiv \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (1.4.10)$$

1. 必要性证明

如果变形体处于平衡状态, 则由外力的总虚功可知

$$W_{\text{外}} = \int_V dW_{\text{四}} + \int_{S_e} dW_{\text{三}}$$

设虚位移为刚性虚位移和变形虚位移时, 则

$$W_{\text{外}} = \int_V (dW_{\text{四,刚}} + dW_{\text{变}}) + \int_{S_e} dW_{\text{三,刚}}$$

由刚体虚位移原理知

$$\int_V dW_{\text{四,刚}} + \int_{S_e} dW_{\text{三,刚}} = 0$$

所以有

$$W_{\text{外}} = \int_V dW_{\text{变}} = W_{\text{变}} = \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV$$

若将作用在微元体上的外力分为体积力、表面力和切割面外力, 则

$$W_{\text{外}} = \int_V (dW_{\text{体}} + dW_{\text{切}}) + \int_{S_e} (dW_{\text{表}} + dW_{\text{切}})$$