

清  
**初等数学  
解题思路**

中

CHU DENG  
SHU XUE  
JIE TI SI LU

海洋出版社

# 初等数学解题思路

中 册

邓禹绩 肖 钰 编  
薛川坪 靳尚成  
吕 风 翥 审校

海洋出版社

1983年·北京

## 内 容 提 要

本书是根据全日制十二年制《中学数学教学大纲》(草案)及十年制中学数学新编通用教材并结合多年的教学经验编成的。其目的在于加深读者对中学数学基本内容的理解,开阔读者的解题思路,提高解数学题的能力。

全书分上、中、下三册。上册内容为解题方法总论(怎样解数学题)和代数;中册内容为平面几何、立体几何、三角;下册内容为解析几何、微积分。作者对上述内容作了系统整理,着重分析讨论了解题思路和方法。每章附有练习及答案,对有一定难度的练习作了提示或解答。其内容可适应今后五年内高中数学教学需要。

本书可供中学生课外阅读,也可作为具有中等文化程度的中青年同志自学用书。对中学数学教师、大专师范院校师生也是一部很有价值的参考书。

## 初等数学解题思路

### 中 册

邓禹绩 肖 钰 编  
薛川坪 靳尚成  
吕 风 薰 审校

---

海洋出版社出版(北京市复兴门外大街)  
新华书店北京发行所发行 机工印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/32 印张: 11<sup>1</sup>/<sub>4</sub> 字数: 340千字  
1983年9月第一版 1983年9月第一次印刷  
印数: 100,000

---

统一书号: 7193·0245 定价: 1.15元

# 目 录

<b>第三篇 平面几何</b> .....	( 1 )
<b>第一章 直线形</b> .....	( 1 )
基本内容.....	( 1 )
(一) 直线和角.....	( 1 )
(二) 平行线.....	( 3 )
(三) 命题.....	( 3 )
(四) 全等三角形及其应用.....	( 5 )
(五) 等腰三角形和直角三角形.....	( 8 )
(六) 三角形中的不等关系.....	( 9 )
(七) 多边形和一些特殊多边形.....	( 10 )
(八) 比例线段.....	( 12 )
(九) 相似三角形及其应用.....	( 14 )
(十) 相似多边形及位似形.....	( 16 )
(十一) 勾股六线段.....	( 17 )
(十二) 直线形的面积和等积变换.....	( 18 )
例题类型和解法.....	( 21 )
(一) 证明线段或角的相等.....	( 21 )
(二) 证明线段或角的和、差、倍、分问题.....	( 26 )
(三) 证明线段或角的不等.....	( 29 )
练习1—1.....	( 32 )
练习1—2.....	( 34 )
<b>第二章 圆</b> .....	( 35 )
基本内容.....	( 35 )
(一) 定义.....	( 35 )

(二) 点、直线、圆的相互间的关系·····	( 36 )
(三) 圆周长和圆面积·····	( 39 )
例题类型和解题方法·····	( 40 )
(一) 证明两条直线的垂直和平行·····	( 40 )
(二) 证明比例线段·····	( 44 )
(三) 其它证明问题·····	( 48 )
(四) 计算题·····	( 50 )
(五) 关于辅助线问题·····	( 55 )
练习2—1·····	( 61 )
练习2—2·····	( 62 )
<b>第四篇 三角</b> ·····	( 65 )
<b>第一章 三角函数定义和基本性质</b> ·····	( 65 )
基本内容·····	( 65 )
(一) 角的概念的扩充及度量·····	( 65 )
(二) 任意角的三角函数·····	( 66 )
例题类型和解题方法·····	( 68 )
(一) 角的概念的扩充和度量·····	( 68 )
(二) 用三角函数定义解决的问题·····	( 69 )
(三) 用三角函数基本性质解决的问题·····	( 72 )
练习1—1·····	( 83 )
练习1—2·····	( 86 )
<b>第二章 三角函数式的恒等变换</b> ·····	( 90 )
基本内容·····	( 90 )
例题类型和解题方法·····	( 90 )
(一) 求值·····	( 90 )
(二) 化简·····	( 96 )
(三) 化积·····	( 97 )
(四) 恒等式证明·····	( 104 )
(五) 三角形内角的三角函数证明题·····	( 107 )
(六) 条件等式的证明·····	( 109 )

(七) 综合题	(117)
练习2—1	(118)
练习2—2	(123)
<b>第三章 三角函数和反三角函数</b>	(125)
基本内容	(125)
(一) 三角函数的图象和性质	(125)
(二) 反三角函数	(128)
例题类型和解题方法	(131)
(一) 比较大小	(131)
(二) 解最简单的三角不等式	(132)
(三) 比较大小, 三角不等式的应用	(136)
(四) 三角函数值域的应用	(137)
(五) 三角函数的极值问题	(139)
(六) 求三角函数的最小正周期	(143)
(七) 作函数的图象	(144)
(八) 三角不等式的证明	(146)
(九) 求反三角函数的定义域和值域	(150)
(十) 反三角函数求值题	(151)
(十一) 反三角函数证明题	(154)
(十二) 用反三角函数表示角的和、差、倍、半	(155)
练习3—1	(156)
练习3—2	(161)
<b>第四章 三角方程</b>	(162)
基本内容	(162)
(一) 一般概念	(162)
(二) 最简单的三角方程的解	(163)
(三) 一般的三角方程解法	(164)
例题类型和解题方法	(164)
(一) 含有同一未知数的同一个三角函数的方程	(164)
(二) 可化成同一未知数的同一个三角函数的	

方程解法·····	(165)
(三) 使方程一边为零而把另一边分解因式的解法 ·····	(166)
(四) $\sin x$ 和 $\cos x$ 的齐次方程·····	(168)
(五) 增根和遗根问题·····	(171)
(六) 三角方程的讨论·····	(174)
(七) 解三角不等式·····	(175)
练习4—1·····	(176)
练习4—2·····	(178)
<b>第五章 解三角形</b> ·····	(178)
基本内容·····	(178)
(一) 解直角三角形·····	(178)
(二) 解斜三角形·····	(179)
例题类型和解题方法·····	(181)
(一) 解直角三角形和可以化成直角三角形的凸多边形 ·····	(181)
(二) 解斜三角形·····	(185)
(三) 三角形证明题·····	(195)
(四) 确定三角形形状·····	(203)
(五) 综合题·····	(205)
(六) 应用题·····	(209)
练习5—1·····	(219)
练习5—2·····	(226)
<b>第五篇 立体几何</b> ·····	(229)
<b>第一章 直线和平面</b> ·····	(229)
基本内容·····	(229)
(一) 平面的基本性质·····	(229)
(二) 两条直线的位置关系·····	(229)
(三) 直线与平面的位置关系·····	(229)
(四) 平面和平面位置关系·····	(229)

(五) 有关垂直的问题·····	(231)
(六) 角的比较与线段的比较·····	(233)
例题类型和解题方法·····	(233)
(一) 有关基本概念的判断题·····	(233)
(二) 有关在同一平面内的问题和异面直线的问题·····	(238)
(三) 有关直线和平面平行的问题·····	(241)
(四) 有关三垂线定理的问题·····	(242)
(五) 有关异面直线所成的角、直线和平面所成的角及 二面角的问题·····	(245)
(六) 有关距离的问题·····	(249)
(七) 有关二平面平行、垂直的问题及其它·····	(257)
练习1—1·····	(261)
练习1—2·····	(263)
<b>第二章 多面体和旋转体</b> ·····	(264)
基本内容·····	(264)
(一) 多面体·····	(264)
(二) 旋转体·····	(269)
例题类型和解题方法·····	(276)
(一) 有关面积的问题·····	(276)
(二) 有关体积的问题和与体积有联系的问题·····	(286)
(三) 证明题·····	(294)
练习2—1·····	(297)
练习2—2·····	(299)
答案·····	(301)
[附] 上、下册要目·····	(351)



# 第三篇 平面几何

## 第一章 直线 形

### 基本内容

#### (一) 直线和角

##### 1. 直线

##### 1) 直线的概念

###### (1) 直线

###### (2) 射线

###### (3) 线段

##### 2) 直线的性质

(1) 过任意两点能且仅能作一条直线。

(2) 两条不相重合的直线，最多有一个公共点。

(3) 连接两点间的一切线中，以线段为最短。

##### 2. 角

##### 1) 定义

(1) 从一点发出的两条射线所组成的图形叫做角，这个点叫做角的顶点，这两条射线叫做角的边。

(2) 平面内一条射线由原来的位置，绕着它的端点旋转到另一位置，也形成一个角，旋转开始时的射线叫做角的始边，旋转终止时的射线叫做角的终边。

##### 2) 角的分类（按大小分）

###### (1) 平角

(2) 周角

(3) 直角

(4) 锐角

(5) 钝角

(6) 优角

3) 角的度量

(1) 度量单位 度(''), 分(''), 秒('')

(2) 进率 度和分、分和秒之间都是60进位

4) 相关的角

(1) 对顶角

(2) 余角

(3) 补角

5) 相关角的性质

(1) 对顶角相等。

(2) 同(等)角的余角相等。

(3) 同(等)角的补角相等。

3. 有关角的线

1) 定义

(1) 垂线

(2) 斜线

(3) 角的平分线

2) 垂线的基本性质

(1) 过一点有且只有一条直线垂直于已知直线。

(2) 从直线外一点到这条直线的所有线段中, 以垂直于这直线的线段为最短。

4. 等量公理

1) 等量加等量, 和相等。

- 2) 等量减等量，差相等。
- 3) 等量的同倍量相等。
- 4) 等量的同分量相等。
- 5) 在等式中，一个量可以用它的等量来代替（等量代换）。
- 6) 全量等于各分量之和。

## (二) 平行线

### 1. 定义

在同一平面内，不相交的两条直线叫做平行线。

### 2. 平行公理

过直线外一点能且只能引一条直线和这直线平行。

### 3. 平行线的性质

如果两条平行线和第三条直线相交，那么：

- 1) 同位角相等。
- 2) 内错角相等。
- 3) 同旁内角互补。

### 4. 平行线的判定

1) 两条直线和第三条直线相交，如果具有下列条件之一，那么这两条直线平行：

- (1) 有一对同位角相等；
  - (2) 有一对内错角相等；
  - (3) 有一对同旁内角互补。
- 2) 垂直于同一直线的二直线平行。
  - 3) 平行于同一直线的二直线平行。

## (三) 命题

### 1. 命题的概念

被人们表达出来的某种判断叫做命题。

(注意): 1) 每个命题都可以分为题设和结论两个部分。题设是已知事项, 结论是由题设推出的事项。

2) 命题有真有假。正确的命题叫做真命题, 错误的命题叫做假命题。

3) 公理和定理都是命题, 而且是真命题。

## 2. 命题的四种形式

逆命题: 把一个命题的条件和结论互相交换, 所得的命题叫做原命题的逆命题。

否命题: 把一个命题的条件和结论分别加以否定, 所得的命题叫做原命题的否命题。

逆否命题: 把一个命题的条件和结论互换后, 再分别加以否定, 所得的命题叫做原命题的逆否命题。

原命题、逆命题、否命题和逆否命题这四个命题的关系如图2-1-1

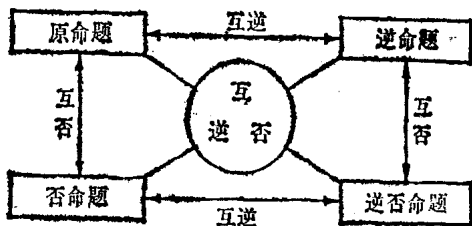


图 2-1-1

## 3. 命题的等效关系

1) 互为逆否的两个命题是等效命题 (真则同真, 假则同假)。

2) 互逆或互否的两个命题不一定等效。即从原命题的正确性不能推出其逆命题或否命题的正确性。

3) 如果互逆或互否的两个命题同真, 则其四个命题都真。

#### (四) 全等三角形及其应用

##### 1. 三角形的有关概念

###### 1) 定义

(1) 三角形

(2) 三角形的高

(3) 三角形的中线

(4) 三角形的内角平分线

###### 2) 表示三角形中有关元素的常用字母

名 称	表 示 字 母		
顶 点	A	B	C
边	BC	CA	AB
	a	b	c
角	$\triangle BAC$	$\triangle ABC$	$\triangle ACB$
高	$h_a$	$h_b$	$h_c$
中 线	$m_a$	$m_b$	$m_c$
内角平分线	$t_a$	$t_b$	$t_c$

##### 2. 三角形的一般性质

1) 三角形的内角和为 $180^\circ$ 。

2) 三角形的任意一个外角等于不相邻的两个内角的和。

3) 三角形两边中点连线平行于第三边, 并且等于第三边的一半。

4) 过三角形一边中点平行于第二边的直线平分第三边。

### 3. 全等三角形的判定

1) 边、边、边 ( $s, s, s$ )

2) 边、角、边 ( $s, a, s$ )

3) 角、边、角 ( $a, s, a$ )

4) 角、角、边 ( $a, a, s$ )

5) 斜边一直角边 ( $H, L$ )

[注意] 边、边、角 ( $s, s, a$ ), 不能判定三角形全等。如图2-1-2,  $\triangle ABC$  与  $\triangle A'B'C'$  中  $AB=A'B'$   $AC=A'C'$ ,  $\angle B=\angle B'$ , 但是这两个三角形并不全等。而  $\triangle A'B'C''$  却与  $\triangle ABC$  全等

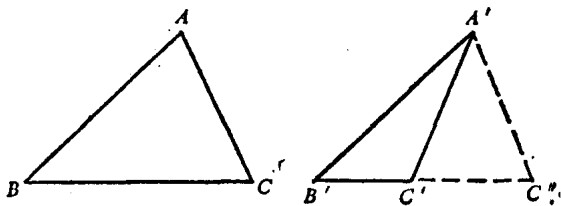


图 2-1-2

### 4. 三角形的心

1) 重心 三角形的三条中线交于一点, 这点叫做三角形的重心, 记为  $G$ 。重心到每一个顶点的距离等于它到对边中点距离的二倍。

2) 外心 三角形的三边垂直平分线相交于一点, 这点叫做三角形的外心, 记为  $O$ , 外心到三个顶点的距离相等。

外心是三角形外接圆的圆心。

3) 垂心 三角形的三条高相交于一点, 这点叫做三角形的垂心, 记为 $H$ 。垂心到每一个顶点的距离等于外心到对边距离的2倍。

4) 内心 三角形的三条内角平分线相交于一点, 这点叫做三角形的内心, 记为 $I$ 。内心到三边的距离相等, 内心是三角形内切圆的圆心。

5) 旁心 三角形的一条内角平分线和两条外角平分线相交于一点, 这点叫做旁心, 记为 $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$ 。旁心到三边的距离相等, 旁心是三角形旁切圆的圆心。

5. 线段的垂直平分线和角平分线的性质

1) 线段的垂直平分线上的点到线段两端距离相等。

到线段两端距离相等的点在这条线段的垂直平分线上。

2) 角平分线上的点到角的两边距离相等。

到角的两边距离相等的点在这个角的平分线上。

6. 全等三角形的性质

全等三角形的各对应元素相等。此为全等三角形的基本性质, 应用较多。

为了判定两个三角形全等, 要了解和熟悉下面的基本思路。

判定全等三角形的思路

{	有两对角相等时: 找	{	夹边相等
			任一对应边相等
			有两对边相等时: 找
{	{	夹角相等	
		第三对边相等	
		有一角是直角	
{	有一边一角相等时: 找	{	夹等角的另一对边相等
			任一对角相等

## (五) 等腰三角形和直角三角形

### 1. 等腰三角形

#### 1) 定义

#### 2) 性质

(1) 两个底角相等 (或: 在同一三角形中, 等边对等角。)

(2) 顶角平分线也是底上的中线和高三 (简称三线合一)。

(3) 是轴对称图形, 底边的垂直平分线是它的对称轴。

(4) 两腰上的中线相等; 高相等; 两个底角平分线相等。

#### 3) 判定 判定等腰三角形的方法主要是:

(1) 有两个角相等的三角形是等腰三角形 (或: 在同一三角形中, 等角对等边)。

(2) 有一条对称轴的三角形是等腰三角形。

### 2. 等边三角形

#### 1) 定义

#### 2) 性质

(1) 三个内角相等, 都等于 $60^\circ$

(2) 有三条对称轴。

(3) 各角的平分线都是对边的中线和高三, 各边上的高相等; 中线相等; 角平分线相等。

(4) 边长为 $a$ 时, 高为 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ , 面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

#### 3) 判定 常用的判定方法是

(1) 三个角都相等的三角形是等边三角形。



(2) 有一个角是 $60^\circ$ 的等腰三角形是等边三角形。

(3) 有三条对称轴的三角形是等边三角形。

### 3. 直角三角形

#### 1) 定义

#### 2) 性质

(1) 两腰垂直。

(2) 两锐角互余。

(3) 斜边上的中线等于斜边之半。

(4) 两直角边的平方和等于斜边的平方。

#### 3) 判定

(1) 有一角等于直角的三角形是直角三角形。

(2) 两角互余的三角形是直角三角形。

(3) 一边上的中线等于这边之半的三角形是直角三角形。

(4) 两边的平方和等于第三边的平方的三角形是直角三角形。

### 4. 特殊直角三角形

1) 等腰直角三角形 $\iff$ 有一锐角是 $45^\circ$ 的直角三角形。

2) 有一锐角为 $30^\circ$ 的直角三角形 $\iff$ 此锐角对边等于斜边之半。

## (六) 三角形中的不等关系

### 1. 不等量公理

1) 不等量加上等量，原大者仍大。

2) 不等量加上不等量，大量之和大于小量之和。

3) 不等量减去等量，原大者仍大。

4) 等量减去不等量，减去大者其差反小。

5) 不等量乘（除）以相同的正数，原大者仍大。