



挑战 中考

· 乔家瑞 主编

数学

世界图书出版公司

图书在版编目(CIP)数据

挑战中考数学/乔家瑞 主编. —上海:上海世界图书出版公司,
2004.3

ISBN 7-5062-6356-4

I. 挑... II. 乔... III. 数学课—初中—解题—升学参考资料
IV. G632.479

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 007849 号

挑战中考数学

乔家瑞 主编

上海世界图书出版公司 出版发行

上海市尚文路 185 号 B 楼

邮政编码 200010

北京泰山兴业印务有限公司印刷

如发现印刷质量问题,请与印刷厂联系

(质检科电话:010-80586988)

各地新华书店经销

开本:850×1168 1/32 印张:8.875 字数:195 000

2004 年 3 月第 1 版 2004 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 7-5062-6356-4/G·89

定价:12.80 元

前 言

考上一所好高中有多重要？它是你继续学习，升入大学，迈向理想人生的开始。到了初中三年级的下学期，每个考生都想抓住短暂而关键的复习阶段，做最后的冲刺，使自己在激烈的竞争中脱颖而出，考取心目中理想的学校。

鉴于上述需求，我们精心编写了本套丛书。它不仅能够帮助考生总结学习要点、梳理知识脉络，并通过典型例题的分析讲解将知识点与考试题目联系起来，使考生学会灵活应用所学知识，更好地掌握解题技巧并提高应试能力。同时本套丛书紧扣近年来中考出现的新题型、新考点，有针对性地进行讲解和练习，确保考生在使用时做到有的放矢，不浪费宝贵的复习时间。

本套丛书的主要特色如下：

1. 根据新课标并综合近年中考命题特征，紧跟新一轮教改的发展趋势，贴合教育政策导向精心编写，在内容上尽可能详尽、精炼，拓展解题思路，总结解题技巧和方法，使考生真正能做到融会贯通，举一反三。

2. 本套丛书不以繁杂的习题充斥内容，耗费考生宝贵的时间，而全部是编者群体智慧、心得体会的汇总，每道例题、每个练习都经过反复推敲、认真筛选，做到了精益求精。

3. 本套丛书最具特色之处是书中的典型例题，以及题后精辟详尽的分析。这些不仅是本丛书的精华，也是考生同他人拉开分数的法宝。中考中，这些题目主要考察学生对知识的综合能力、拓展能力和自我创新能力，虽然通常在考卷中只有两至三道此类题目，但却是真正可以拉开考生差距，划分分数档次的门槛。

本套丛书的作者都是重点中学的高级、特级教师，多年来一直工作在教学第一线，具有丰富的教学经验，对于中考的难点、要点以及近年来的发展趋势，都有精准的把握。希望广大考生好好利用，争取以优异成绩考取理想的高中。

本套丛书根据最新课程标准编写，可以与国内现有任何版本的教材配套使用。

编 者

目 录

第一部分 综合题

一、代数综合题	(1)
(一)方程、不等式综合题	(1)
(二)函数综合题	(25)
(三)方程与函数综合题	(66)
二、几何综合题	(82)
(一)四边形中的三角形全等与相似	(82)
(二)圆中的三角形全等与相似	(92)
三、代数、几何综合题	(105)
(一)方程与几何综合题	(105)
(二)函数与几何综合题	(128)

第二部分 建模题

一、方程(组)类型	(153)
二、不等式(组)类型	(161)
三、函数类型	(167)
(一)一次函数类型	(167)
(二)二次函数类型	(171)
四、统计类型	(175)
五、解直角三角形类型	(185)

第三部分 创新题

一、阅读理解题	(201)
(一)对比—判断型	(201)

(二)理解—概括型	(202)
(三)归纳—猜想型	(204)
(四)迁移—运用型	(206)
(五)拓展—提高型	(208)
二、方案设计题	(214)
(一)多种方案设计题	(214)
(二)最优方案设计题	(218)
三、图表信息题	(227)
(一)图像信息题	(227)
(二)表格信息题	(231)
(三)图表信息题	(234)
四、几何演变题	(239)
五、分类讨论题	(247)
六、数学探索题	(258)
(一)条件探索题	(258)
(二)结论探索题	(260)
(三)存在探索题	(262)
(四)规律探索题	(264)

第一部分 综合题

一、代数综合题

(一) 方程、不等式综合题

1. 一次方程(组)与不等式的综合题

1. 利用不等式的有关知识确定一次方程(组)的解的取值范围

例1 m 为何值时, 关于 x 的方程

$$\frac{3x-2m}{5} - \frac{2x+5m}{6} = \frac{x-m-5}{15}$$

的解是非负数。

分析 本题是由一元一次方程与不等式构成的综合题。

解 (1) 先用 m 的代数式表示一元一次方程的解:

去分母, 得 $6(3x-2m) - 5(2x+5m) = 2(x-m-5)$.

去括号, 得 $18x - 12m - 10x - 25m = 2x - 2m - 10$.

移项、合并, 得 $6x = 35m - 10$.

系数化1, 得 $x = \frac{35m-10}{6}$.

(2) 根据“方程的解是非负数”列出关于 m 的不等式, 并解此不等式求出 m 的取值范围。

$\because$ 方程的解是非负数,

$$\therefore x = \frac{35m-10}{6} \geq 0.$$

解关于 m 的不等式, 得 $m \geq \frac{2}{7}$.

$\therefore m \geq \frac{2}{7}$ 时, 方程的解是非负数。

例 2 如果方程组 $\begin{cases} 3x+y=k+1, \\ x+3y=3 \end{cases}$ 的解为 x, y , 且 $-2 < k \leq 6$, 求

$x-y$ 的取值范围。

分析 要求 $x-y$ 的取值范围, 必须利用方程组用 $x-y$ 的代数式表示 k , 再利用 $-2 < k \leq 6$ 求出 $x-y$ 的取值范围。

解 两方程相减, 得 $2x-2y=k-2$.

$$\therefore k=2(x-y)+2.$$

$$\therefore -2 < k \leq 6,$$

$$\therefore -2 < 2(x-y)+2 \leq 6.$$

$$\therefore -4 < 2(x-y) \leq 4$$

$$\therefore -2 < x-y \leq 2.$$

评注 在求解过程中用 $x-y$ 的代数式表示 k , 实际上是使用了整体变形思想。如果解方程组把 x, y 分别用 k 的代数式表示为 $x = \frac{3k}{8}, y = 1 - \frac{k}{8}$, 则 $x-y = \frac{k}{2} - 1$, 然后再使用 $-2 < k \leq 6$ 求解, 则思路不流畅, 求解过程较繁。

例 3 k 为何值时, 关于 x, y 的方程组

$$\begin{cases} 5x+7y-5=k, \\ 3x+5y=3k+5 \end{cases}$$

的解满足 $x < 0, y > 0$?

分析 本题是二元一次方程组与不等式的综合题。

解 (1) 用 k 的代数式表示方程组的解 x, y .

$$\text{解方程组 } \begin{cases} 5x+7y-5=k, \\ 3x+5y=3k+5 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x=-4k-\frac{5}{2}, \\ y=3k+\frac{5}{2}. \end{cases}$$

(2) 根据“ $x < 0, y > 0$ ”列出关于 k 的不等式组, 并解此不等式组求出 k 的取值范围。

$$\therefore x < 0, y > 0,$$

$$\therefore \begin{cases} -4k - \frac{5}{2} < 0, \\ 3k + \frac{5}{2} > 0 \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} k > -\frac{5}{8}, \\ k > -\frac{5}{6}. \end{cases}$$

因此 $k > -\frac{5}{8}$ 时, 方程组的解满足 $x < 0, y > 0$.

例 4 已知 $5a + 3b = 7, 4a - 7b = 15$, 解关于 x 的不等式组

$$\begin{cases} 2a - 3 - \frac{x-b}{2} \leq x + a, \\ x(x + 2b + 1) > x^2 - (a + 5b)^2. \end{cases}$$

分析 应将已知条件看做是关于 a, b 的方程组, 解此方程组求出 a, b 的值, 并代入不等式组, 进而解不等式组。

解 (1) 将已知条件看做是关于 a, b 的方程组, 并解此方程组求出 a, b 的值。

$$\text{解关于 } a, b \text{ 的方程组} \begin{cases} 5a + 3b = 7, \\ 4a - 7b = 15 \end{cases} \text{ 得} \begin{cases} a = 2, \\ b = -1. \end{cases}$$

(2) 将 a, b 的值代入不等式组, 并解此不等式组。

$$\therefore \text{不等式组化为} \begin{cases} 1 - \frac{x+1}{2} \leq x+2, \\ x(x-1) > x^2 - 9. \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} x \geq -1, \\ x < 9. \end{cases}$$

$$\therefore -1 \leq x < 9.$$

例 5 已知方程 $\frac{x-a}{16} - \frac{x+3a}{12} = 1$ 的解是 $x = -3$, 解关于 y 的不等式 $\frac{y+a}{15} - \frac{2y+3a}{9} < 1$.

解 (1) $\because x = -3$ 是方程的解,

$$\therefore \frac{-3-a}{16} - \frac{-3+3a}{12} = 1.$$

解之, 得 $a = -3$.

$$(2) \therefore \text{不等式化为 } \frac{y-3}{15} - \frac{2y-9}{9} < 1.$$

$$\therefore 3y-9-10y+45 < 45.$$

$$\therefore y > -\frac{9}{7}.$$

例 6 已知整数 t 满足不等式组

$$\begin{cases} 2(t-4)+1 < 1-3(t-2), \\ 2+\frac{t-1}{4} < t-\frac{2-3t}{6}, \end{cases}$$

试解关于 x, y 的方程组

$$\begin{cases} (1-t)x + (2t+1)y = 17, \\ (3t-2)x - (5-6t)y = 40. \end{cases}$$

解 (1) 解关于 t 的不等式

$$\text{由原不等式组, 得 } \begin{cases} 2t-7 < 7-3t, \\ 24+3t-3 < 12t-4+6t. \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} t < \frac{14}{5}, \\ t > \frac{5}{3}. \end{cases}$$

$$\therefore \frac{5}{3} < t < \frac{14}{5}.$$

又 t 是整数, 从而 $t=2$.

(2) 将 $t=2$ 代入方程组, 解关于 x, y 的方程组。

将 $t=2$ 代入关于 x, y 的方程组, 得

$$\begin{cases} x-5y = -17, \\ 4x+7y = 40. \end{cases}$$

解关于 x, y 的方程组, 得 $\begin{cases} x=3, \\ y=4. \end{cases}$

练 习 一

1. m 是什么值时, 方程组 $\begin{cases} x-2y=0, \\ 2x+my= \end{cases}$ 的解是正数? 是正整数?

并求出解来。

2. m 是什么值时, 关于 x, y 的方程组

$$\begin{cases} (m+2)x - (m+3)y = 1, \\ (m+1)x - (m+2)y = 1 \end{cases}$$

的解满足 $x < 0, y < 0$.

3. 已知 $\frac{a+2}{3} - \frac{3a-1}{4} = \frac{4a-1}{6}$, 解关于 x 的不等式组

$$\begin{cases} (x-a)^2 - (x+a+1)^2 \geq -3, \\ \frac{x+2a-3}{2} - \frac{2x-a}{3} < 1. \end{cases}$$

4. 已知 t 是奇数, 并满足不等式组

$$\begin{cases} 5(t-1) - t(7-t) < t^2, \\ (t+1)^2 < (t-1)^2, \end{cases}$$

试解关于 x 的方程

$$t+1 - \frac{2x-1}{6} - \frac{3x+2t-1}{4} = \frac{4x-t-3}{3} - (x-1).$$

5. 已知关于 x, y 的方程组

$$\begin{cases} 2x-3y=5m+1, \\ 3x+2y=2-3m \end{cases}$$

的解满足 $y-1 < x < y+1$, 求 m 的取值范围。

2 联合使用判别式、根与系数关系解答二次方程综合题

例 1 已知 x_1, x_2 是关于 x 的方程

$$4x^2 + 4(m-1)x + m^2 = 0$$

的两个非零实数根, 问 x_1 与 x_2 是否同号? 若能同号, 请求出相应的 m 的取值范围; 若不能同号, 请说明理由。

分析 判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 只能判别二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 有没有实数根; 如果有实数根, 实数根等不等。要想进一步判别根的符号, 则必须使用根与系数关系 $x_1 x_2 = \frac{c}{a}, x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ 。

解 $\because \Delta = 16(m-1)^2 - 16m^2 \geq 0,$

$$\therefore -32m + 16 \geq 0.$$

$$\therefore m \leq \frac{1}{2}.$$

(1) 若 x_1, x_2 同正号, 即 $x_1 > 0, x_2 > 0$, 则

$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 0, \\ x_1 x_2 > 0. \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} -(m-1) > 0, \\ \frac{1}{4}m^2 > 0. \end{cases}$$

$$\therefore m < 1 \text{ 且 } m \neq 0.$$

$$\therefore m \leq \frac{1}{2} \text{ 且 } m \neq 0, \text{ 方程两根同正号.}$$

(2) 若 x_1, x_2 同负号, 即 $x_1 < 0, x_2 < 0$, 则

$$\begin{cases} x_1 + x_2 < 0, \\ x_1 x_2 > 0. \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} -(m-1) < 0, \\ \frac{1}{4}m^2 > 0. \end{cases}$$

$$\therefore m > 1.$$

但 $m > 1$ 与 $m \leq \frac{1}{2}$ 矛盾, 从而 x_1, x_2 不可能同负号.

综上, 当 $m \leq \frac{1}{2}$ 且 $m \neq 0$ 时, 方程两根同正号.

评注 如果关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有两个正(负)根, 应满足的条件为

$$\begin{cases} \Delta \geq 0, \\ x_1 + x_2 > 0, \\ x_1 x_1 > 0. \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta \geq 0, \\ x_1 + x_2 < 0, \\ x_1 x_2 > 0. \end{cases}$$

例 2 m 为何值时, 关于 x 的方程

$$x^2 - (3m+5)x + 6m+7 = 0$$

的两实根的平方和等于 11.

解 设方程的两实根为 x_1, x_2 , 则由根与系数关系, 有

$$x_1 + x_2 = 3m + 5, \quad x_1 x_2 = 6m + 7.$$

$$\therefore x_1^2 + x_2^2 = 11,$$

$$\therefore (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 11.$$

$$\text{即 } (3m+5)^2 - 2(6m+7) = 11.$$

$$\text{整理,得 } m^2 + 2m = 0.$$

$$\text{解之,得 } m=0 \text{ 或 } m=-2.$$

$$\therefore \Delta = (3m+5)^2 - 4(6m+7) = 9m^2 + 6m - 3,$$

$$\therefore m=0 \text{ 时, } \Delta = -3 < 0, \text{ 应舍去;}$$

$$m=-2 \text{ 时, } \Delta = 36 - 12 - 3 = 21 > 0.$$

$$\therefore m = -2.$$

评注

由于判别式 $\Delta = 9m^2 + 6m - 3$ 是关于 m 的二次式,目前无法列不等式求解。这就需要我们注意使用根与系数关系及判别式的顺序:

使用根与系数关系,根据题设条件求出未知系数的值



将所求未知系数的值代入判别式检验,使 $\Delta < 0$ 者应舍去

例 3 已知关于 x 的方程 $x^2 + 3x + a + 1 = 0$ 的两个实数根的倒数和等于 3;

继之,当关于 x 的方程 $(k-1)x^2 + 3x - 2a - 2 = 0$ 有实数根,且 k 为正整数时,求代数式 $\frac{3k-4}{2k+1}$ 的值。

解 设方程 $x^2 + 3x + a + 1 = 0$ 的两实根为 x_1, x_2 , 则 $x_1 + x_2 = -3, x_1x_2 = a + 1$.

$$\therefore \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3,$$

$$\therefore \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = 3, \quad \text{即} \quad \frac{-3}{a+1} = 3.$$

$$\therefore a = -2.$$

$a = -2$ 满足方程 $\frac{-3}{a+1} = 3$ 且使方程 $x^2 + 3x - 1 = 0$ 有实数根.

将 $a = -2$ 代入 $(k-1)x^2 + 3x - 2a - 2 = 0$, 得

$$(k-1)x^2 + 3x + 2 = 0.$$

(1) $k=1$ 时, 原方程为一元一次方程 $3x+2=0$, 有实根.

$$\therefore \frac{3k-4}{2k+1} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3};$$

(2) $k \neq 1$ 时, $(k-1)x^2 + 3x + 2 = 0$ 是二次方程, 且 $\Delta = 9 - 8(k-1) \geq 0$.

$$\therefore k \leq \frac{17}{8}.$$

又 k 为正整数, 且 $k \neq 1$, 从而 $k=2$.

$$\therefore \frac{3k-4}{2k+1} = \frac{2}{5}.$$

评注

在审题时应注意下面说法的区别:

(1) 对“关于 x 的方程”要具体分析, 如对 $x^2 + 3x + a + 1 = 0$ 则是指“关于 x 的二次方程”, 而没有必要特别说明是“关于 x 的二次方程”; 而对 $(k-1)x^2 + 3x - 2a - 2 = 0$ 而言, 则是指该方程可能是一元一次方程 ($k=1$ 时), 也可能是一元二次方程 ($k \neq 1$ 时)。如果此时说是关于 x 的二次方程, 则应排除 $k=1$ 。

(2) 判别式和根与系数关系只有一元二次方程的标准方程才能使用, 非标准形式不能使用, 其他方程, 如一元一次方程不能使用。

(3) “有两个实根”的含义是“有两个相等实根或两个不等实根”, 对应于“ $\Delta \geq 0$ ”, 而“有实根”则可能有一个实根或两个实根, 此时不能冒然使用判别式, 应分清是一元一次方程还是一元二次方程。

例 4 已知关于 x 的方程 $x^2 - (2k-3)x + 2k-4 = 0$, 根据下列条件分别求 k 的取值范围:

(1) 有两个不等正根;

(2) 有两个异号根, 且正根的绝对值较大;

(3) 一个根大于 3, 一个根小于 3。

解 (1) $\because$ 方程有两个不等正根,

$$\therefore \begin{cases} \Delta = (2k-3)^2 - 4(2k-4) > 0, \\ 2k-3 > 0, \\ 2k-4 > 0. \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} (2k-5)^2 > 0, \\ k > \frac{3}{2}, \\ k > 2. \end{cases} \quad \therefore k > 2 \text{ 且 } k \neq \frac{5}{2} \text{ 时, 方程有两个不等正根.}$$

(2) $\because$ 方程有两个异号根, 且正根的绝对值较大,

$$\therefore \begin{cases} 2k-4 < 0, \\ 2k-3 > 0. \end{cases} \quad \text{即 } \begin{cases} k < 2, \\ k > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

$\therefore \frac{3}{2} < k < 2$ 时, 两根异号, 且正根的绝对值较大。

(3) 设 $x-3=t$, 则 $x=t+3$.

$\therefore$ 原方程化为 $t^2 - (2k-9)t - 4k + 14 = 0$.

由题设条件知两根 x_1, x_2 满足 $x_1 - 3 > 0, x_2 - 3 < 0$.

$\therefore t_1 > 0, t_2 < 0$.

$\therefore$ 方程 $t^2 - (2k-9)t - 4k + 14 = 0$ 两根异号。

$\therefore -4k + 14 < 0$.

$\therefore k > \frac{7}{2}$.

因此 $k > \frac{7}{2}$ 时, 方程一个根大于 3, 一个根小于 3。

评注 二次方程 $ax^2+bx+c=0 (a \neq 0)$ 有一正根、一负根的条件是

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} < 0, \text{ 而不必使用判别式, 这是因为}$$

$$\because \frac{c}{a} < 0, \therefore ac < 0, \text{ 从而 } -4ac > 0.$$

$$\text{又} \because b^2 \geq 0, \therefore b^2 - 4ac > 0.$$

$$\text{这说明 } \frac{c}{a} < 0 \text{ 之中已包含 } \Delta = b^2 - 4ac > 0.$$

如果方程有一正根、一负根时, 值得注意的是不要误用判别式。

二次方程 $ax^2+bx+c=0 (a \neq 0)$ 一个根大于常数 m , 另一根小于 m , 可以使用换元法 $x-m=t$, 使之转化成关于 t 的方程有一正根、一负根进行求解。

例 5 已知关于 x 的方程 $x^2+2x+m-1=0$ 的两个实数根为 x_1 和 x_2 且 $x_1 > x_2$, 求一个关于 x 的一元二次方程, 使它的两个根为 $|x_1|$ 和 $|x_2|$ 。

分析 解答本题的关键是求 $|x_1| + |x_2|$ 及 $|x_1| \cdot |x_2|$, 但这需根据 m 的取值去掉绝对值符号。

解 $\because$ 方程有两个不相等的实数根,

$$\therefore \Delta = 4 - 4(m-1) > 0, \text{ 从而 } m < 2.$$

由根与系数关系, 有 $x_1 + x_2 = -2, x_1 x_2 = m-1$.

(1) 当 $1 < m < 2$ 时, $x_1 + x_2 = -2 < 0, x_1 x_2 = m-1 > 0$.

由 $x_1 > x_2$, 得 $x_1 < 0, x_2 < 0$.

$$\therefore |x_1| + |x_2| = (-x_1) + (-x_2) = -(x_1 + x_2) = 2,$$

$$|x_1| \cdot |x_2| = (-x_1)(-x_2) = x_1 x_2 = m-1.$$

因此所求方程为 $x^2 - 2x + m - 1 = 0$.

(2) 当 $m = 1$ 时, 原方程为 $x^2 + 2x = 0$, 从而 $x_1 = 0, x_2 = -2$.

$$\therefore |x_1| + |x_2| = 0 + 2 = 2, |x_1| \cdot |x_2| = 0,$$

因此所求方程为 $x^2 - 2x = 0$.

(3) 当 $m < 1$ 时, $x_1 + x_2 = -2 < 0$, $x_1 x_2 = m - 1 < 0$.

由 $x_1 > x_2$, 得 $x_1 > 0, x_2 < 0, x_1 - x_2 > 0$.

$$\therefore |x_1| + |x_2| = x_1 - x_2 = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{4 - 4(m-1)} = 2\sqrt{2-m},$$

$$|x_1| \cdot |x_2| = -x_1 x_2 = -(m-1) = 1-m.$$

因此所求方程为 $x^2 - 2\sqrt{2-m}x + 1-m = 0$.

评注 应根据 $m < 2$ 及 $x_1 x_2 = m - 1$ 去掉绝对值, 从而导致分情况讨论求解。在使用判别式、根与系数关系的同时, 又融入了绝对值的有关概念及计算, 从而增加了题目的难度。

例 6 已知关于 x 的方程 $2x^2 - (m+2)x - 12 = 0$ 有一个根是关于 x 的方程 $2x^2 - mx + 6 = 0$ 的一个根的 2 倍, 另一个根互为相反数, 求实数 m 的值。

解 设方程 $2x^2 - mx + 6 = 0$ 的两个根为 α, β , 则方程 $2x^2 - (m+2)x - 12 = 0$ 的两个根为 $2\alpha, -\beta$.

由根与系数关系, 得

$$\alpha + \beta = \frac{m}{2}, \alpha\beta = 3;$$

$$2\alpha - \beta = \frac{m+2}{2}, -2\alpha\beta = -6.$$

$$\text{由方程组 } \begin{cases} 2\alpha + 2\beta = m, \\ \alpha\beta = 3, \\ 4\alpha - 2\beta = m+2 \end{cases} \quad \text{得 } \begin{cases} \alpha - 2\beta = 1, \\ \alpha\beta = 3. \end{cases}$$

消去 α , 得 $2\beta^2 + \beta - 3 = 0$.

解之, 得 $\beta = 1$ 或 $\beta = -\frac{3}{2}$.

当 $\beta = 1$ 时, $\alpha = 3, m = 2\alpha + 2\beta = 6 + 2 = 8$;

当 $\beta = -\frac{3}{2}$ 时, $\alpha = -2, m = 2\alpha + 2\beta = -4 - 3 = -7$.

当 $m = 8$ 时, $2x^2 - 8x + 6 = 0$ 有实数根;

当 $m = -7$ 时, $2x^2 + 7x + 6 = 0$ 有实数根;

并且 $m = 8, m = -7$ 时, 方程 $2x^2 - (m+2)x - 12 = 0$ 一定有实数根。

$\therefore m = 8$ 或 $m = -7$ 。

评注 本题涉及到两个二次方程的根之间的关系, 现提出下面规律, 供同学们思考:

(1) 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 与 $ax^2 - bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两个根分别互为相反数;

(2) 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 与 $cx^2 + bx + a = 0 (a \neq 0, c \neq 0)$ 的两个根分别互为倒数。

解答这类问题同样需要联合使用判别式及根与系数关系。

练习二

1. 已知 x_1, x_2 是关于 x 的方程 $x^2 + \sqrt{p}x + q = 0$ 的两个实数根, 且 $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = \frac{3}{2}, \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{5}{2}$, 求 p, q 。

2. 已知关于 x 的方程 $x^2 + (8-4m)x + 4m^2 = 0$ 。

(1) 如果这个方程有两个相等的实数根, 求 m 的值, 并求出此时方程的根;

(2) 是否存在正数 m , 使方程的两个实数根的平方和等于 136? 如果存在, 请求出满足条件的 m 的值; 如果不存在, 请说明理由。

3. 已知关于 x 的方程 $(m+1)x^2 - m^2(m-1)x + (m-1)^3 = 0$ (m 为实数)。

(1) 解方程并对根的情况进行讨论;

(2) 当 m 为何值时, 方程有两个不等正根?

4. 已知关于 x 的方程 $4x^2 - 8(n-1)x - 3n + 1 = 0$ ① 和 $x^2 - (n+2)x - 2n^2 + 4n = 0$ ②。问是否存在这样的 n 的值, 使方程①的两个实数根的差的平方等于方程②的一个整数根? 若存在, 求出这样的 n 的值; 若不存在, 请说明理由。