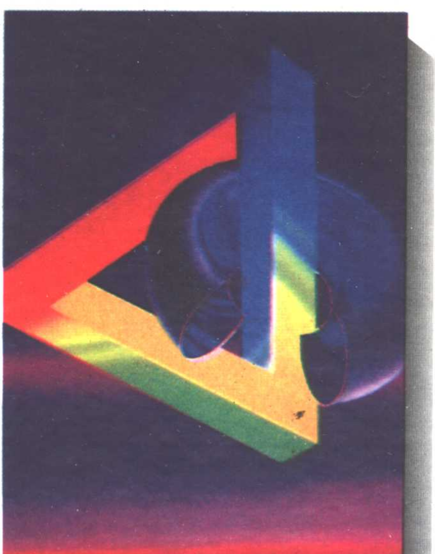
WEI FEN
JI HE

微分几何的理论与问题

杨文茂／著

江西教育出版社



WEI FEN JI HE

微分幾何的理論與問題

楊文茂 著

李國平署簽

江西教育出版社

书　名：微分几何的理论与问题
编　著：杨文茂　　李全英
出版发行：江西教育出版社(南昌市老贡院 8 号)
经　销：各地新华书店
印　刷：南昌市光华印刷厂
开　本：850×1168mm　　1/32
印　张：8
字　数：200 千
版　次：1995 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
印　数：1—1255
定　价：14.50 元
书　号：ISBN7—5392—2649—8/G·2611

邮政编码：330003
(赣教版图书凡属印刷、装订错误请随时向承印厂调换)

序

微分幾何於高校數學系基础課中
居重要地位通常以三維歐氏空間內
曲线與曲面為討論對象本書作者楊文茂
教授主講微分幾何三十餘年其數學創作與
數學經驗均極豐富本書收集問題殆
近千數在各章節內容提要中充分顯出
作者在應用系統工程於微分幾何理論中
成效卓著發人深省余故樂為之序

一九九三年十二月六日李國平謹序

编 者 的 话

本书是高等院校中微分几何课程的教学参考书。书中系统地介绍了三维欧氏空间中曲线与曲面的局部与整体的理论与问题，全书共分四章。第一章作为预备知识介绍了向量的代数运算与向量的微分和积分运算。第二章叙述曲线的基本理论，包括曲线的基本公式与曲线的存在唯一定理以及各种特殊的曲线 第三章叙述曲面的基本理论，包括曲面的第一、第二与第三基本齐式，与曲面有关的各种曲率及曲面上的各种特殊曲线，还有曲面的基本公式、基本方程以及曲面的存在唯一定理。第四章介绍了曲线和曲面的一些整体的理论和问题。

在叙述几何理论时，本书力求作到全面系统并高度概括，在许多地方通过列表格来提示各有关概念之间的内在联系，例如，关于曲线论的第二章的§2.3节；关于曲面论的第三章的§3.4节。对书中的问题都作出了答案、提示或解法，便于参考。希望本书无论对微分几何课的教者或学者都有所裨益。

编者于1995年1月

目　　录

第一章　预备知识

§1.1　向量的代数运算

一、内容提要

1. 向量的线性运算与向量的乘法运算

设 V^3 或 R^3 是一个 3 维的欧氏向量空间。我们用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\cdots$ 表示空间的向量，而用 $\lambda,\mu,\upsilon,\cdots$ 表示实数或纯量。下面将列举关于向量的线性运算与乘法运算，以及这些运算所具有的规律。

(1)线性运算及其运算规律

两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，从 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 到 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的运算称为加法。数量 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的积记为 $\lambda\boldsymbol{a}$，从 λ 与 $\boldsymbol{a}$ 到 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的运算称为数乘。向量的加法与数乘合称为向量的线性运算，具有如下运算规律。

加法交换律　　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

加法结合律　　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

数乘结合律　　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\mu\boldsymbol{a}$

数乘关于数的分配律　　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$

数乘关于向量的分配律　　$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$

(2)乘法运算及其运算规律

两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的乘法有两种，分别称为内乘或外乘，所得结果前者为一数量后者为一向量，分别称为内积与外积。

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的内积记为 $\boldsymbol{ab}$ 或 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 或 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，定义为

$$\boldsymbol{ab}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$$

其中$|\boldsymbol{a}|$表示向量$\boldsymbol{a}$的长度，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$表示$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角，$0\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi$

向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的外积记为$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$或$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$，定义为

(i) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$

(ii) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a}$且$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{b}$

(iii) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$依次成右手系

当$\boldsymbol{a}$平行于$\boldsymbol{b}$，规定$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$

外积$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$的长度为以$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$为边的平行四边形的面积。

三个向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$的混合积记为$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$或$(\boldsymbol{abc})$，或$\boldsymbol{abc}$，它定义为

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

关于向量的乘法运算具有如下运算规律。

内积交换律　$\boldsymbol{ab}=\boldsymbol{ba}$

数乘与内积的结合律　$(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{ab})$

内积分配律　$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ac}$

数乘与外积的结合律　$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$

外积分配律　$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$

外积反交换律　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$

混合积关于三个向量改变次序的规律

$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$或　$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})=-(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$$

混合积分配律　$(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$

混合积的绝对值$|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})|$为以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{c}$为棱的平行六面体的体积，而$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$的符号为正或负表示三个向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$依次构成右手系还是左手系。

2. 在正交坐标系中用坐标作向量的运算

设在欧氏空间 V^3 或 R^3 中选取正交标架$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$，即基向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{k}$ 是正交单位且构成右手系的向量：

$$\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=1,\ \boldsymbol{jk}=\boldsymbol{ki}=\boldsymbol{ij}=0$$

$$(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})=1$$

对于任意向量 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，称 x,y,z 为 $\boldsymbol{a}$ 在正交标架中或正交坐标系中的坐标，记为 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$。

设向

$$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1),\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$$

$$\boldsymbol{c}=(x_3,y_3,z_3),$$

利用坐标作向量的运算有如下公式

公式 1.1　两向量的和　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$

公式 1.2　数乘向量　$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1)$

公式 1.3　两向量的内积　$\boldsymbol{ab}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

公式 1.4　两向量的外积

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$$

$$=\left(\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}z_1 & x_1\\ z_2 & x_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right)$$

公式 1.5　三向量的混合积

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$$

3. 三个向量构成正交基的条件

引理 1.6（用内积表示）　设在向量空间 V^3 中三个非零向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$，则

$$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3 \text{ 组成正交基} \longleftrightarrow \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij},\quad i,j=1,2,3$$

$$e_1, e_2, e_3 \text{ 依次成右或左手系} \longleftrightarrow (e_1, e_2, e_3) = 1 \text{ 或 } -1$$

引理 1.7(用外积表示)　设在向量空间 V^3 中三个非零向量 e_1, e_2, e_3，则

$$e_1, e_2, e_3 \text{ 组成正交基} \longleftrightarrow \begin{cases} e_1 \times e_2 = \pm e_3 \\ e_2 \times e_3 = \pm e_1 \\ e_3 \times e_1 = \pm e_2 \end{cases}$$

e_1, e_2, e_3 依次成右或左手系 $\longleftrightarrow$ 等式右边者取"+"或"−"。

4. 关于向量的一些公式

公式 1.8(*Cauchy−Schwarz* 不等式)　关于两个向量的内积，有

$$|ab| \leqslant |a| \cdot |b|$$

当且仅当 a 与 b 平行时，等号成立。关于两个向量的外积，也有

$$|a \times b| \leqslant |a| \cdot |b|$$

公式 1.9(三个向量的二重外积公式)

$$a \times (b \times c) = (ac)b - (ab)c$$

公式 1.10(***Lagrange*** 公式)

$$(a \times b)(c \times d) = \begin{vmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{vmatrix}$$

特别地，式中令 $a = c, b = d$，得

$$(a \times b)^2 = a^2 c^2 - (ab)^2$$

公式 1.11(四个向量的三重外积公式)

$$(a \times b) \times (c \times d) = (a, c, d)b - (b, c, d)a$$

公式 1.12(四个向量的一个线性关系式)

$$(b, c, d)a - (c, d, a)b + (d, a, b)c - (a, b, c)d = 0$$

公式 1.13(五个向量的一个数量式)

$$(a_2 a_3 a_4)(a_1 a_5) - (a_1 a_3 a_4)(a_2 a_5)$$

$$+(a_1a_2a_4)(a_3a_5)-(a_1a_2a_3)(a_4a_5)=0$$

公式 1.14(行列式乘法公式,六个向量的一个数量式)

$$(a_1a_2a_3)(b_1b_2b_3)=\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{vmatrix}$$

公式 1.15(六个向量的一个数量式)

$$(a_1\times a_2, b_1\times b_2, c_1\times c_2)=\begin{vmatrix} (a_1a_2b_2) & (b_2c_1c_2) \\ (a_1a_2b_1) & (b_1c_1c_2) \end{vmatrix}$$

公式 1.16(六个向量的一个数量式)

$$(a,b,c_1)(d,b,c_2)-(a,b,c_2)(d,b,c_1)$$
$$=(a,b,d)(c_1,b,c_2)$$

5. 利用向量的运算表示它们之间平行,垂直或共面的条件

引理 1.17　向量 $a\perp b\leftrightarrow ab=0$

引理 1.18　向量 $a/\!/b\leftrightarrow a\times b=0$

引理 1.18′　向量 $a/\!/b\leftrightarrow \exists\lambda,\mu,(\lambda,\mu)\neq0$,使得

$$\lambda a+\mu b=0$$

引理 1.19　向量 a,b,c 共面$\leftrightarrow(a,b,c)=0$

引理 1.19′　向量 a,b,c 共面$\leftrightarrow\exists\ \lambda,\mu,j,(\lambda,\mu,j)\neq0$,使得

$$\lambda a+\mu b+jc=0$$

二、问题

1. 证明公式 1.8:$|ab|\leqslant|a|\cdot|b|$

$$|a\times b|\leqslant|a|\cdot|b|$$

2. 证明三角不等式

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|$$
$$|a+b+c|\leqslant|a|+|b|+|c|$$

3. 证明二重外积公式 1.9 与 *Lagranye* 公式 1.10 之间的等价性

4. 利用坐标法分别直接证明公式 1.9 与 1.10

5. 证明公式 1.11

6. 证明公式 1.12

7. 证明公式 1.13

8. 证明公式 1.14

9. 证明公式 1.15

10. 证明公式 1.16

11. 证明公式

$$(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_3)\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{b}_2\times\boldsymbol{b}_3+(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_2)\boldsymbol{b}_3\times\boldsymbol{b}_1+(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_3)\boldsymbol{b}_1\times\boldsymbol{b}_2$$

12. 证明公式

$$(\boldsymbol{b}_1\times\boldsymbol{b}_2)(\boldsymbol{b}_3\times\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}_2\times\boldsymbol{b}_3)(\boldsymbol{b}_1\times\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}_3\times\boldsymbol{b}_1)(\boldsymbol{b}_2\times\boldsymbol{a})=0$$

13. 已知三个不共面的向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$，证明向量组

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3}{(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3)},\boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{a}_3\times\boldsymbol{a}_1}{(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3)},\boldsymbol{e}_3=\frac{\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2}{(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3)}$$

满足公式

$$(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{a}_j)=\delta_{ij},i,j=1,2,3$$

§1.2 向量的微分运算

一、内容提要

1. 向量函数的求导及运算规律

设以纯量 $t\in I=[t_0,t_1]$为自变量的向量函数 $\boldsymbol{r}(t)\in V^3$，于是

$$\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)),t\in I$$

向量 $\boldsymbol{r}(t)$对 t 的导数

$$\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}=\left(\frac{dx(t)}{dt},\frac{dy(t)}{dt},\frac{dz(t)}{dt}\right),t\in I$$

关于向量函数求导法则满足如下运算规律。设 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 都是 t

的向量函数，而 λ 为 t 的纯量函数，则有

$$\frac{d}{at}(\boldsymbol{u} \pm \boldsymbol{v}) = \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} \pm \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

$$\frac{d}{at}(\lambda \boldsymbol{u}) = \lambda \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} + \frac{d\lambda}{dt}\boldsymbol{u}$$

$$\frac{d}{at}(\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}) = \frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

$$\frac{d}{at}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = (\frac{d\boldsymbol{u}}{dt},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) + (\boldsymbol{u},\frac{d\boldsymbol{v}}{dt},\boldsymbol{w}) + (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\frac{d\boldsymbol{w}}{dt})$$

对于以多个纯量为自变量的多元向量函数，例如 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$，$u \in [a,b]$，$v \in [c,d]$，向量函数 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 关于 u 或 v 求偏导的法则也具有如上运算规律。

引理 2.1　　$\boldsymbol{r}=\text{const}$*　$\leftrightarrow$　$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=0$

2. 向量函数的积分及运算规律

(1)不定积分

在 I 上的两个向量函数 $\mu(t)$ 与 $\mu(t)$，如果 $\frac{dU}{dt}=\boldsymbol{u}$，称 U 为 $\boldsymbol{u}$ 的原函数或不定积分，记为

$$\int \boldsymbol{u}(t)dt = \boldsymbol{U}(t) + \boldsymbol{c},$$

其中 $\boldsymbol{c}=\text{const}$.

求一个函数的不定积分的方法称为积分法或求积。关于求积有如下运算规律

$$\int [\boldsymbol{u}(t) \pm \boldsymbol{v}(t)]dt = \int \boldsymbol{u}(t)dt \pm \int \boldsymbol{v}(t)dt$$

$$\int c\boldsymbol{u}(t)dt = c\int \boldsymbol{u}(t)dt, c = \text{const}$$

* 关于此类等式，如果左边为向量(或纯量)，则 const 表示常向量(或常数)。

$$\int c\boldsymbol{u}(t)dt = c\int \boldsymbol{u}(t)dt, c = \text{const}$$

$$\int \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{u}(t)dt = \boldsymbol{c} \times \int \boldsymbol{u}(t)dt, \boldsymbol{c} = \text{const}$$

(2)定积分

如果对于区间 I=[a,b]上的向量函数 $\boldsymbol{u}(t)$的积分和在 I 上分法无穷细密过程中有极限，则称这极限为函数 $\boldsymbol{u}$ 在 I 上的定积分，记为

$$\int_a^b \boldsymbol{u}(t)dt = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{u}(\xi_i)\triangle t_i$$

其中 T 表示分法

$$T: t_0 = a < t_1 < \cdots < t_i < \cdots < t_n = b$$

$$t_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant t_i, \triangle t_i = t_i - t_{i-1},$$

$$\lambda(T) = Max\triangle t_i, i = 1, 2, \cdots, n$$

关于一个向量函数的定积分及其原函数之间有如下引理

引理 2.2　设 $\boldsymbol{U}(t)$为 $\boldsymbol{u}(t)$的一个原函数，则 $\boldsymbol{u}(t)$在[a,b]上的定积分

$$\int_a^b \boldsymbol{u}(t)dt = \boldsymbol{U}(b) - \boldsymbol{U}(a)$$

(3)向量函数的 Taylor 公式

对于纯量函数，在微分学中我们知道，不但有 Taylor 公式而且还有各种形式的中值定理。但是对于向量函数，中值定理一般不成立，但仍有如下 Taylor 公式

公式 2.3(Taylor)　设向量函数 $\boldsymbol{u}(t)$在区间 I 上存在直到 n 阶的连续导数。当 $t_0 \in I, t_0 + \triangle t \in I$，则有

$$\boldsymbol{u}(t_0 + \triangle t) = \boldsymbol{u}(t_0) + \boldsymbol{u}'(t_0)\triangle t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{u}''(t_0)(\triangle t)^2 + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n!}\boldsymbol{u}^{(n)}(t_0)(\triangle t)^n + \boldsymbol{\varepsilon}(\triangle t)^n$$

式中已记 $\boldsymbol{u}^{(i)}=\dfrac{d^i\boldsymbol{u}}{dt^i}$,$\boldsymbol{\varepsilon}$ 为满足 $\lim\limits_{\triangle t\to 0}\boldsymbol{\varepsilon}=0$ 的向量。

如果在正交坐标系中向量函数用坐标表示为

$$\boldsymbol{u}(t)=(x(t),y(t),z(t)),$$

上述公式也可写为

$$\boldsymbol{u}(t_0+\triangle t)=\boldsymbol{u}(t_0)+\boldsymbol{u}'(t_0)\triangle t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{u}''(t_0)(\triangle t)^2+\cdots$$

$$+\frac{1}{(n-1)}\boldsymbol{u}^{n-1}(t_0)(\triangle t)^{n-1}+\frac{1}{n!}\boldsymbol{R}_n(\triangle t)^n$$

其中

$$\boldsymbol{R}_n=\left(x^{(n)}(t_1),y^{(n)}(t_2),z^{(n)}(t_3)\right)$$

$$t_0\leqslant t_1,t_2,t_3\leqslant t_0+\triangle t$$

虽然有

$$\lim_{\triangle t\to 0}\boldsymbol{R}_n=\boldsymbol{u}^{(n)}(t_0)$$

但一般说来 t_1,t_2,t_3 各不相同,没有一个适合三个函数 x,y,z 的中间值。

(4)几种特殊向量函数满足的微分方程

引理 2.4(定长向量函数)　设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(t)$是区间 I 上的可微函数,则

$$|\boldsymbol{u}|=\text{const}\leftrightarrow \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'=0,\forall\ t\in I$$

引理 2.5(定方向向量函数)　设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(t)$是区间上 I 的可微函数,则

$$\boldsymbol{u}\parallel \boldsymbol{c}=\text{const}\leftrightarrow \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{u}'=0,\forall\ t\in I$$

引理 2.6(平行于定平面的向量函数)　设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(t)$是区间 I 上二阶可微的向量函数,则

$$\boldsymbol{u}\parallel\pi(\text{固定的平面})\leftrightarrow(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}',\boldsymbol{u}'')=0,\forall\ t\in I$$

二、问题

1. 设向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$在 $t=t_0$ 处连续,且 $\boldsymbol{r}(t_0)\neq 0$,证明存在一