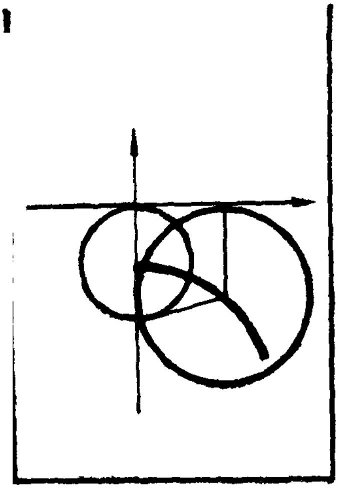
1982
研究生入学数学试题汇解

YANJIUSHENG RUXUESHUXUE SHITIHUIJIE

安徽教育出版社



安徽教育出版社

研究生入学数学试题汇解

（下）

严镇军 苏家铎 朱功勤 卢树铭 戴俭华 何天晓 合编

研究生入学数学试题汇解

（全书分上、中、下册）

严镇军　苏家铎　朱功勤

卢树铭　戴俭华　何天晓

*

安 徽 教 育 出 版 社 出 版

（合肥市跃进路 1 号）

安徽省新华书店发行　　安徽新华印刷厂印刷

*

开本787×1092　1/32　印张　28　字数610.000

1982年12月第1版　　1982年12月第1次印刷

印数：1—45,000

统一书号：13276·3　　定价：3.00元

$$-\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{x}-1}} dx$$

$$= 4 \cdot \frac{\pi}{4} - \int_1^4 \frac{\sqrt{x}\, d\sqrt{x}}{2\sqrt{\sqrt{x}-1}}$$

$$= \pi - \frac{1}{2}\left[\int_1^4 \sqrt{\sqrt{x}-1}\, d(\sqrt{x}-1)\right.$$

$$\left. + \int_1^4 \frac{d(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{\sqrt{x}-1}}\right]$$

$$= \pi - \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(\sqrt{x}-1)^{\frac{3}{2}} + 2(\sqrt{x}-1)^{\frac{1}{2}}\right]\Bigg|_1^4$$

$$= \pi - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} + 2\right)$$

$$= \pi - \frac{4}{3}.$$

(2).求 $\oint_L \frac{2xydx + x^2dy}{|x| + |y|}$ 之值，其中 L 为闭合回路 $ABCDA$，A、B、C、D 的坐标分别为 $A(1,\ 0)$，$B(0,\ 1)$，$C(-1,\ 0)$，$D(0,\ -1)$.

解 L 由 C_1，C_2，C_3，C_4 组成．C_1：$x+y=1$，C_2：$-x+y=1$，C_3：$-x-y=1$，C_4：$x-y=1$．故正方形的方程为 $|x|+|y|=1$．所以

$$\oint_L \frac{2xydx + x^2dy}{|x| + |y|} = \oint_L 2xydx + x^2dy.$$

令 $M=2xy$，$N=x^2$，则

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 2x.$$

故

$$\oint_L \frac{2xydx + x^2dy}{|x| + |y|} = 0.$$

(3)若函数 $f(x)$ 满足

$$\frac{d}{dx}f(x) = \int_0^1 e^{x-t} f(t)dt + 1,$$

且 $f(0)=0$，求 $f(x)$.

解 对等式两边关于 x 由 0 到 x 积分，得

$$f(x) = (e^x - 1)\int_0^1 e^{-t} f(t)dt + x.$$

将 $f(t) = (e^t - 1)\int_0^1 e^{-u} f(u)du + t$ 代入，整理得

$$(e^x - 1)\int_0^1 e^{-t} f(t)dt + x$$

$$= (e^x - 1)\int_0^1 e^{-u} f(u)du$$

$$+ (e^x - 1)(e^{-1} - 1)\int_0^1 e^{-u} f(u)du + (e^x - 1)(1 - 2e^{-1}) + x.$$

因此

$$\int_0^1 e^{-t} f(t)dt = \frac{1 - 2e^{-1}}{1 - e^{-1}} = \frac{e - 2}{e - 1},$$

最后

$$f(x) = \frac{e - 2}{e - 1}(e^x - 1) + x.$$

四．(15分)(1) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3}\left(\frac{x}{3}\right)^{n-1}$ 的和函数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$.

解 易知原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3}\left(\frac{x}{3}\right)^{n-1}$ 的收敛区间为$(-3，3)$.

因此，当 $x\in(-3, 3)$ 时

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3}\left(\frac{x}{3}\right)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{x}{3}\right)^{n}\right]'$$

$$=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^{n}\right]'$$

$$=\left[\frac{x}{3-x}\right]'$$

$$=\frac{3}{(3-x)^2}.$$

而 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{3}{(3-1)^2}=\frac{3}{4}.$$

(2).将函数 $y=\sin\left(\arcsin\frac{x}{\pi}\right)$ 在其定义域内展开成付立叶级数.

解 因为$y(x)$在其定义域$[-\pi, \pi]$内是奇函数. 故付立叶系数

$$a_n=0,\ n=0,\ 1,\ \cdots$$

而

$$b_n=\int_{-\pi}^{\pi}\sin\left(\arcsin\frac{x}{\pi}\right)\sin nx dx(n=1,\ \cdots)$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x}{\pi}\sin nx dx$$

$$=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

因此 $y(x)$的付立叶展式为

$$y(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

五．（8分）一质量为2克的质点M，在大小为$8x$的引力的作用下，从离原点为12厘米的静止状态沿x轴向原点O运动，阻力为瞬时速度的8倍，求其运动规律．

解 依题意，可列出下面的方程

$$\begin{cases} 2\ddot{x}=8x-8\dot{x}; \\ x(0)=12, \ \dot{x}(0)=0. \end{cases}$$

方程的通解为

$$x=e^{-2t}(A\cos 2\sqrt{2}\,t+B\sin 2\sqrt{2}\,t).$$

代入初始条件得

$$A=12, \quad B=6\sqrt{2}.$$

因此 $x(t)=6e^{-2t}(2\cos 2\sqrt{2}\,t+\sqrt{2}\sin 2\sqrt{2}\,t)$.

六．(10分)(1).单位向量$\mathbf{e}_1=(1,0,0)$，$\mathbf{e}_2=(0,1,0)$，$\mathbf{e}_3=(0,0,1)$，是否可以分别表示成$\alpha_1=(1,2,3)$，$\alpha_2=(2,3,1)$，$\alpha_3=(-1,1,12)$的线性组合？

解 因为

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 12 \end{vmatrix}=0,$$

所以a_1，a_2，a_3线性相关。因此e_1，e_2，e_3不可以表示成a_1，a_2，a_3的线性组合．

(2).若

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}X=X\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

求X．

解 令$X=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$，依题意有

$$\begin{cases} 2a_{11}+a_{21}=2a_{11}+3a_{12}; \\ 2a_{12}+a_{22}=a_{11}+2a_{12}; \\ 3a_{11}+2a_{21}=2a_{21}+3a_{22}; \\ 3a_{12}+2a_{22}=a_{21}+2a_{22}, \end{cases}$$

解出 $a_{22}=a_{11}$，$a_{21}=3a_{12}$，a_{11}，a_{12} 为任何数.

因此

$$X=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 3a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

七. (15分)(1).验证函数

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}\,x}e^{-\frac{(\ln x-a)^2}{2\sigma^2}}, & x>0 \\ 0 & , x\leqslant 0 \end{cases}$$

为随机变量 ζ 的分布密度，并求 $P\{|\zeta|>e^a\}$.

解 因为 $f(x)\geqslant 0$，又易知

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}\,x}e^{-\frac{(\ln x-a)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt$$

$$=1,$$

所以 $f(x)$ 是随机变量 ζ 的分布密度.

$$P\{|\zeta|>e^a\}=\int_{e^a}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}\,x}e^{-\frac{(\ln x-a)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt$$

$$=\frac{1}{2}.$$

(2).如果随机变量ζ的分布密度关于$x=a$对称，即

$$f(a+x)=f(a-x),$$

证明ζ的数学期望$E\zeta=a$。

证明 $E\zeta=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$

$$=\int_{-\infty}^{a}xf(x)dx+\int_{a}^{+\infty}xf(x)dx$$

$$=-\int_{+\infty}^{0}(a-x)f(a-x)dx$$

$$+\int_{0}^{+\infty}(a+x)f(a+x)dx$$

$$=a\int_{0}^{+\infty}f(a-x)dx+a\int_{0}^{+\infty}f(a+x)dx$$

$$=a\left[\int_{-\infty}^{a}f(x)dx+\int_{a}^{+\infty}f(x)dx\right]$$

$$=a.$$

八.（8分）设$f(x)$在$[a,\ b]$上二次可微，且$f'(x)>0$，$f''(x)>0$，试证

$$(b-a)f(a)<\int_{a}^{b}f(x)dx<(b-a)\frac{f(b)+f(a)}{2}.$$

证明 首先，设$F(x)$在$(a,\ b)$内处处>0，仅在两端点处可能为零，则

$$\int_{a}^{b}F(x)dx>0.$$

事实上，任取a'，b'，满足$a<a'<b'<b$，则

$$\int_{a}^{b}F(x)dx\geqslant\int_{a'}^{b'}F(x)dx=F(\zeta)(b'-a'),$$

其中$\zeta\in[a',\ b']$，故$F(\zeta)>0$，因此

$$\int_{a}^{b}F(x)dx>0.$$

由题设$f'(x)>0$，$f''(x)>0$，故$f(x)$是严格增及严格凹的．因此当$x\in(a, b)$时

$$f(a)<f(x)<\frac{x-a}{b-a}f(b)+\frac{x-b}{a-b}f(a).$$

或

$$f(x)-f(a)>0,$$

$$\frac{x-a}{b-a}f(b)+\frac{x-b}{a-b}f(a)-f(x)>0.$$

因此

$$\int_a^b\left[f(x)-f(a)\right]dx>0,$$

$$\int_a^b\left[\frac{x-a}{b-a}f(b)+\frac{x-b}{a-b}f(a)-f(x)\right]dx>0.$$

即

$$\int_a^b f(x)dx>\int_a^b f(a)dx=f(a)(b-a).$$

$$\int_a^b f(x)dx<\int_a^b\left[\frac{x-a}{b-a}f(b)+\frac{x-b}{a-b}f(a)\right]dx$$

$$=(b-a)\frac{f(b)+f(a)}{2}.$$

结论成立．

四十四、上海机械学院

高等数学

一．共(15分)计算下列各题

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

解 令 $y=(1+x^2e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$，有

$$\ln y=\frac{\ln(1+x^2e^x)}{1-\cos x},$$

由 *L'Hospitale* 法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2e^x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2xe^x+x^2e^x}{(1+x^2e^x)\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2e^x+xe^x}{1+x^2e^x}\cdot\frac{x}{\sin x}=2.$$

即 $\lim\limits_{x\to 0}\ln y=2$.

所以 $\lim\limits_{x\to 0}y=\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}=e^2$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(a+\frac{\beta}{n}\right)+\left(a+\frac{2\beta}{n}\right)+\cdots+\left(a+\frac{n-1}{n}\beta\right)\right]$.

解 由等差数列的求和公式，得

所求极限$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{(n-1)(2a+\beta)}{2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}\left(a+\frac{\beta}{2}\right)=a+\frac{\beta}{2}.$$

(3) $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin\theta-\sin^3\theta}\,d\theta$.

解 $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin\theta-\sin^3\theta}\,d\theta=\int_0^{\pi}\sqrt{\sin\theta\cos^2\theta}\,d\theta$

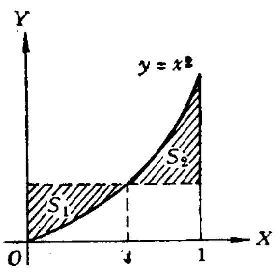
$$=\int_0^{\pi}\sqrt{\sin\theta}\,|\cos\theta|\,d\theta$$

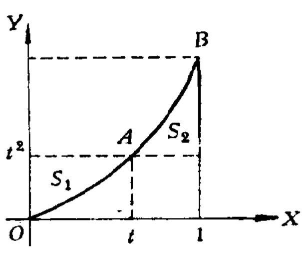
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin\theta}\cos\theta d\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{\sin\theta}(-\cos\theta)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin\theta}\,d\sin\theta-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{\sin\theta}\,d\sin\theta$$

$$=\frac{2}{3}(\sin\theta)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{3}(\sin\theta)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{4}{3}.$$

二、(8分)在区间〔0,1〕上给定函数 $y=x^2$，问当 t 为何值时，图中的阴影部分 S_1 与 S_2 的面积之和最小？何时最大？





解 如图，A 点的坐标为 $(t,\ t^2)$，故

$$S_1=t\cdot t^2-\int_0^t x^2dx=\frac{2}{3}t^3.$$

$$S_2=\int_t^1 x^2dx-(1-t)t^2=\frac{1}{3}-\frac{t^3}{3}-t^2+t^3$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}t^3-t^2.$$

所以 $$S_1+S_2=f(t)=\frac{4}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3}.$$

于是，问题变成求$f(x)$在〔0,1〕内的最小值和最大值.

由$f'(t)=4t^2-2t=t(2t-1)=0$，求得驻点$t=0$，$t=\frac{1}{2}$. 再考虑到另一个边界点$t=1$，将以下三个值进行比较：

$$f(0)=\frac{1}{3},$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4},$$

$$f(1)=\frac{2}{3}.$$

得$f\left(\frac{1}{2}\right)<f(0)<f(1)$.由此可知，当$t=\frac{1}{2}$时，$S_1+S_2$取最小值；当$t=1$时，$S_1+S_2$取最大值.

三.（14分）.

（1）将函数$f(x)=\pi^2-x^2$在区间〔$-\pi,\pi$〕内展成富里哀级数.

解 $f(x)=\pi^2-x^2$，因π^2为常数，为简单起见，可先求$g(x)=x^2$在区间$(-\pi,\pi)$内的富氏级数．而$g(x)$是一偶函数，故其富氏系数

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=0.$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}g(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\ \frac{x^3}{3}\bigg|_0^{\pi}=\frac{2}{3}\pi^2.$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}g(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^3}\int_0^{\pi}(nx)^2\cos nxd(nx)$$

$$=\frac{2}{n^3\pi}\int_0^{n\pi}\ u^2\cos udu$$

$$=\frac{2}{n^3\pi}\int_0^{n\pi}u^2 d\sin u$$

$$=\frac{2}{n^3\pi}\left[u^2\sin u\bigg|_0^{n\pi}-\int_0^{n\pi}2u\sin udu\right]$$

$$=\frac{4}{n^3\pi}\int_0^{n\pi}ud\cos u$$

$$=\frac{4}{n^3\pi}\left[u\cos u\bigg|_0^{n\pi}-\int_0^{n\pi}\cos udu\right]$$

$$=\frac{4}{n^3\pi}\left[n\pi(-1)^n-\sin u\bigg|_0^{n\pi}\right]$$

$$=\frac{(-1)^n4}{n^2}.$$

这样，根据收敛定理，有

$$g(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

$$=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.\qquad -\pi<x<\pi$$

又由 $$\frac{g(\pi+0)+g(-\pi+0)}{2}=\pi^2=g(\pi)=g(-\pi),$$

得知上面展开式在 $[-\pi,\pi]$ 上成立. 所以

$$f(x)=\pi^2-g(x)=\frac{2\pi^2}{3}+4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$$

$$-\pi\leqslant x\leqslant\pi.$$

(2) 求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)}{n!}x^{2n}$ 的和函数.

解 因 $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n!}\Big/\frac{2n+3}{(n+1)!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(n+1)}{2n+3}=+\infty,$$

故级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$. 令

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)}{n!}x^{2n},$$

两边积分，得

$$\int_0^x f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{2n+1}{n!}x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}$$

$$=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}=xe^{x^2},$$

两边微分，得

$$f(x)=e^{x^2}(1+2x^2).$$

四. (5分)试证：若 $P(A)>0, P(B)>0$，则随机事件 A、B相互独立与A、B互不相容不能同时成立.

证 用反证法. 设事件A、B相互独立与A、B互不相容同时成立，则有

$$\begin{cases}P(AB)=P(A)P(B),\\ P(AB)=0.\end{cases}$$

于是 $$P(A)P(B)=0,$$

这样 $P(A)$、$P(B)$ 中至少有一个为零，这与所设的条件 $P(A)>0$，$P(B)>0$ 矛盾.

五．(10分)设有长度为 l 的弹簧，其上端固定，用五个质量都为 m 的重物同时挂于弹簧的下端，使弹簧伸长了 $5a$. 今突然取出其中一个重物，使弹簧由静止状态开始振动，若不计弹簧本身的重量，求所挂重物的运动规律.

解 取 X 轴铅直向下，原点设在与弹簧固定端相距 $l+4a$ 处. 设重物的位移为 $x=x(t)$，即时刻 t 时弹簧伸长量为 $x+4a$. 这时重物受重力 $P=4mg$ 和弹簧的作用力 $F=-k(x+4a)$ 的作用，故得方程

$$4m\frac{d^2x}{dt^2}=4mg-k(x+4a).$$

因弹簧受 $5mg$ 的力作用时，伸长了 $5a$，由虎克定律知 $mg=ka$. 因此上述方程可化简为

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{g}{4a}x,$$

初始条件 $x|_{t=0}=4a$，$\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0}=0$.

由方程 $x''+\dfrac{g}{4a}x=0$，特征方程 $r^2+\dfrac{g}{4a}=0$，

$$r=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}\,i.$$

其通解为 $x=c_1\cos\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{g}{a}}\,t+c_2\sin\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{g}{a}}\,t$,

由初始条件可定出 $c_1=4a$ $c_2=0$.

故 $x=4a\cos\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{g}{a}}\,t$ 即所求重物的运动规律.

六．（8分）设Ω是空间区域，S是Ω的边界面，函数$u(x,y,z)$，$v(x,y,z)$在闭区域Ω上有连续的二阶偏导数，试证

$$\iiint_{\Omega} u\Delta V d\Omega = \oint\!\!\!\oint_{S} u\frac{\partial v}{\partial n}ds - \iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right]d\Omega.$$

其中 $\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$，$\frac{\partial v}{\partial n}$代表$v$沿$S$的外法线方向的方向导数．

证明 设α，β，γ表示外法线方向n的方向角，有

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma,$$

于是，由Gauss公式，有

$$\oint\!\!\!\oint_{S} u\frac{\partial v}{\partial n}ds = \oint\!\!\!\oint_{S} u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma\right)ds$$

$$= \oint\!\!\!\oint_{S} u\frac{\partial v}{\partial x}dydz + u\frac{\partial v}{\partial y}dzdx + u\frac{\partial v}{\partial z}dxdy$$

$$= \iiint_{\Omega}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right\}d\Omega$$

$$= \iiint_{\Omega}\left\{u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right\}d\Omega.$$

即 $$\iiint_{\Omega} u\Delta v d\Omega = \oint\!\!\!\oint_{S} u\frac{\partial v}{\partial n}ds - \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)d\Omega.$$