中央财经大学重点系列教材

微积分

WEIJIFEN

（第二版）

综合类

ZONGHELEI

曹克明　主编

综合类　管理类　经济类

中国财政经济出版社

中央财经大学重点系列教材(综合类)

微　积　分

(第二版)

主　编　曹克明
副主编　单立波

中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

微积分/曹克明主编. －北京：中国财政经济出版社，2002.4

中央财经大学重点系列教材

ISBN 7－5005－5701－9

Ⅰ.微… Ⅱ.曹… Ⅲ.微积分－高等学校－教材 Ⅳ.O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2002）第020905号

中国财政经济出版社出版

URL：http：//www.cfeph.com

E－mail：cfeph@drc.go.cn.net

（版权所有　翻印必究）

社址：北京海淀区阜成路甲28号　邮政编码：100036

发行处电话：88190406　财经书店电话：64033436

北京财经印刷厂印刷　各地新华书店经销

850×1168毫米　32开　18.5印张　436 000字

2002年9月第2版　2002年9月北京第1次印刷

印数：1—8 000　定价：24.00元

ISBN 7－5005－5701－9/O·0021

（图书出现印装问题，本社负责调换）

序

为全面贯彻落实《中国教育改革和发展纲要》，适应我国社会主义市场经济发展的需要，根据国家教委《“九五”期间普通高等学校教材建设与改革的意见》精神，我校组织了本校有优势和特色的学科（专业）教材规划工作，并决定编写、出版《中央财经大学重点系列教材》。

中央财经大学是财政部直属的一所面向全国的以经济学和管理学科为主的大学，拥有一批在财政税收、金融保险、会计、经济管理、经济信息、法律等学科享有盛誉的专家、学者。编写、出版《中央财经大学重点系列教材》是我校面向21世纪，顺应学科重大调整和素质型人才培养目标而采取的重要教育改革措施之一。编者有较丰富的教学经验和较高的学术造诣，力求使教材能够反映该学科的基本理论体系和当代国内外经济科学发展的水平，紧密结合改革实践，处于学科学术前沿，富有创新精神。该重点系列教材分为经济、管理、综合三大类，将在几年内陆续出版。

《中央财经大学重点系列教材》主要供我校相关专业使用，也欢迎兄弟院校和社会各界选用。

《微积分》作为综合类教材之一，已经校教材编审委员会审定。书中如有不妥，请读者指正。

中央财经大学教材编审委员会

1998年2月

再 版 说 明

《微积分》是中央财经大学重点系列教材，自出版发行以来，深受教师及学生的好评，还在一定程度上满足了兄弟院校教学的需要。

为使再版教材更完善、更成熟，我们在保持原教材已有内容、风格的基础上，一方面对原版编写及印刷中的疏漏进行了修正，另一方面，对原版内容进行了适当的补充。

参加本次再版修订工作的有于伟红（修订第一、二、三、四、十章）、屈英（修订第五、六、七、八、九章）。

由于编者水平有限，经修订后的教材难免还会存在缺点、错误，敬请读者和同行指正。

作　者

2002 年 8 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

前　言

本书根据1989年10月国家教育委员会高等教育司审定的高等学校财经类专业核心课程《经济数学基础教学大纲》编写，供高等学校财经类专业本科生使用，是《经济数学基础》的第一册。

全书的主要内容有：函数与极限、导数与微分、不定积分与定积分、无穷级数、多元函数微积分学、微分方程与差分方程。各节配有一定数量的练习题，以利读者及时消化基本概念、掌握基础知识、加强基本训练。每章末还配有综合性习题，以提高读者使用数学方法分析和解决问题的能力。除第一、七、九、十章外，其他各章的习题分（A）、(B）两类，(A）类为计算、证明、应用题；(B）类为填空、选择题。

书中部分内容标有“*”号的，可根据教学需要和学时安排决定选讲与否；标有“*”号的例题或习题是难度较大的题。

参加本书编写的有：曹克明（主编并编写第一、二章），单立波（副主编并编写第八章），于伟红（第三、四章），屈英（第五、六章），车炬（第七、九、十章）。

北京理工大学葛渭高教授详细审阅了本书，并提出了宝贵的意见，在此表示衷心感谢。

编写本书时，虽然我们力求既体现数学学科的严密性、科学性和系统性，又充分考虑到财经类各专业对数学内容的实际需要，体例尽量贴近经济应用，但由于受到经验和水平的限制，书

中一定还存在尚未被编者觉察到的错漏，恳请使用本书的读者不吝指正。

编 者

1998 年 4 月

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　函　　数

§1.1　预 备 知 识

一、集　合

集合是数学中的基本概念。通常把具有某种特性的对象的全体称为集合，简称为集，其中每个对象叫作集合的元素，简称元。如某大学一年级所有的学生；北京、天津、上海三城市；平面上的所有直线，都是集合的例子。通常用大写字母 $A, B, C, \cdots, X, Y$ 表示集合，用小写字母 $a, b, c, \cdots, x, y$ 表示集合的元素。以数字为元素的集合称为数集，特别地，常用 N 表示自然数集、Z 表示整数集、Q 表示有理数集、I 表示无理数集、R 表示实数集。

设 A 是一个集合，若 a 是 A 的元素，称元素 a 属于集合 A，记为 $a \in A$（读作 a 属于 A）；若 b 不是 A 的元素，称元素 b 不属于集合 A，记为 $b \notin A$（读作 b 不属于 A）。

把集合中的元素一一列举出来，加上花括号，这种表示集合的方法叫做列举法。

例 1　小于 6 的自然数集合 A

记为：
$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

例 2　全体自然数的集合 N

记为：
$$N = \{1, 2, 3, \cdots\cdots\}$$

通过描述元素的共同属性来表示集合，叫做描述法。如集合

M 是由满足性质$P(x)$的全体元素 x 所组成,则记为:

$$M=\{x|P(x)\}$$

例 3　能被 3 整除的所有自然数集合 B,

记为:

$$B=\{x|x=3n,n\in N\}$$

例 4　全体整数的集合 Z,

记为:

$$Z=\{全体整数\}$$

若集合中只有有限个元素,则称该集合是有限集,例 1 是有限集。若集合中元素的个数无限,则称该集合是无限集,例 2、3、4 都是无限集。不含任何元素的集合称为空集,记为 Φ,例如,方程 $x^2+1=0$实数根的集合是空集,即

$$\{x|x^2+1=0,x\in R\}=\Phi$$

设 A 与 B 是两个集合,若 A 的任意元素都是 B 的元素,则称 A 是 B 的子集,记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$,读作 A 包含于 B 或 B 包含 A;若 $A\subset B$,同时 $B\subset A$,则称 A 与 B 相等,记为 $A=B$。

由集合 A 和 B 的所有元素组成的集合,称为 A 与 B 的并集,记为 $A\cup B$,即

$$A\cup B=\{x|x\in A 或 x\in B\}$$

由集合 A 与 B 的所有公共元素组成的集合,称为 A 与 B 的交集,记为 $A\cap B$,即

$$A\cap B=\{x|x\in A 且 x\in B\}$$

由属于集合 A,但不属于集合 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的差集或 B 对 A 的余集,记为 $A-B$,即

$$A-B=\{x|x\in A 但 x\notin B\}$$

例 5　设 $A=\{1,2,3,4\}$,$B=\{2,3,4,5\}$

　　则　$A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$

$$A\cap B=\{2,3,4\}$$
$$A-B=\{1\}$$
$$A\supset A\cap B, A\supset A-B$$

并集、交集的概念可以推广到有限个集合或无限多个集合的情形。

二、符　号

微积分学中的一些专门符号将在正文中依次引入，这里介绍在数学推理中经常使用的符号“$\forall$”和“$\exists$”。

符号“$\forall$”表示“对任意的”或“对任一的”。

符号“$\exists$”表示“至少存在一个”或“至少能找到”。

例如，集合 A 是集合 B 的子集，即 $A\subset B$，用符号表示为：

$$\forall x\in A\Rightarrow x\in B$$

$A=B$ 用符号表示为：

$$A=B\Leftrightarrow \forall x\in A\Rightarrow x\in B \text{ 且 } \forall x\in B\Rightarrow x\in A$$

三、实　数

1．实数与数轴上的点

有理数集 Q 与无理数集 I 的并集称为实数集 R，即

$$R=Q\cup I$$

实数集的几何表示就是“数轴”或“坐标轴”上的点集。数轴上任意一点都对应一个实数，反之，任意一个实数都对应数轴上的一点，从而，实数集与数轴上的点集一一对应。实数集 R 由小到大是有序的，实数集 R 在数轴上对应的点集由左到右也是有序的，因此，有时为了说明问题方便起见，常常将“数 a”说成“点 a”，反之亦然。

任何两个不相等的有理数之间总存在着无穷多个有理数，即

数轴上任何两个不同的有理点之间存在无穷多个有理点。因此数轴上的有理点处处稠密。同样地，无理点也具有处处稠密性。

由几何直观易见，数轴上的点集是“连续”的，由此不难推想，实数集也是连续的。

2. 实数的绝对值

定义 1.1 设 a 为一个实数，a 的绝对值 $|a|$ 定义为：

$$|a|=\begin{cases} a, & a\geqslant 0 \\ -a, & a<0 \end{cases}$$

设 a,b 是两个实数，由定义 1.1 知

$$|a-b|=\begin{cases} a-b, & a\geqslant b \\ b-a, & a<b \end{cases}$$

从几何上来说，$|a|$ 在数轴上表示点 a 与原点 O 之间的距离；$|a-b|$ 表示点 a 与点 b 之间的距离。

例 6

$$\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases} -x, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x, & x>0 \end{cases}$$

绝对值及其运算有下列基本性质：

(1) $|x|\geqslant 0$；$|x|=|-x|$；$|x|=\sqrt{x^2}$

(2) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$

(3) $|x|<\delta,(\delta>0)\Leftrightarrow -\delta<x<\delta$

(4) $|x|>k,(k>0)\Leftrightarrow x>k$ 或 $x<-k$

(5) $|x+y|\leqslant |x|+|y|$

一般地 $|x_1+x_2+\cdots+x_n|\leqslant |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$

(6) $|x-y|\geqslant |x|-|y|$

(7) $|xy|=|x||y|$

一般地 $|x_1x_2\cdots x_n|=|x_1||x_2|\cdots|x_n|$

(8) $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|},(y\neq 0)$

3. 区间

区间是数学中使用得较多的一类数集。介于某两个定数(点)之间的一切实数(点)构成的集合叫作有限区间,这两个定数(点)叫做区间的端点。若用 a,b 表示这两个数(点),则

$\{x\mid a<x<b\}=(a,b)$ 称为开区间;

$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}=[a,b]$ 称为闭区间;

$\{x\mid a<x\leqslant b\}=(a,b]$ 称为左开右闭区间;

$\{x\mid a\leqslant x<b\}=[a,b)$ 称为左闭右开区间。

数 $b-a$ 称为区间的长度。从数轴上看,这些有限区间的长度是线段,点 a 是该线段的左端点,b 是右端点。对于开区间 (a,b),$a\notin(a,b)$,$b\notin(a,b)$,在数轴上点 a 和点 b 用空心圈表示,如图 1-1(a);对于闭区间$[a,b]$,$a\in[a,b]$,$b\in[a,b]$,在数轴上点 a 和点 b 用实心圈表示,如图 1-1(b)。$[a,b)$和$(a,b]$统称为半开区间,在数轴上都分别只有一个端点用实心圈,另一个端点用空心圈表示(请读者画出它们的示意图)。

符号"$+\infty$"读作"正无穷大",它表示大于任意一个实数;符号"$-\infty$"读作"负无穷大",它表示小于任意一个实数。以下数集统称为无穷区间:

$\{x\mid a<x<+\infty\}=\{x\mid a<x\}=(a,+\infty)$

$\{x\mid a\leqslant x<+\infty\}=\{x\mid a\leqslant x\}=[a,+\infty)$

$\{x\mid -\infty<x<b\}=\{x\mid x<b\}=(-\infty,b)$

$\{x\mid -\infty<x\leqslant b\}=\{x\mid x\leqslant b\}=(-\infty,b]$

$\{x\mid -\infty<x<+\infty\}=R=(-\infty,+\infty)$

图 1-1(c)、(d)是无穷区间$(a,+\infty)$、$(-\infty,b]$的几何表示。

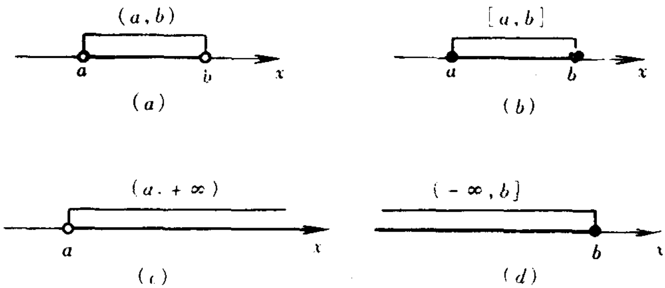

图 1-1

4. 邻域

定义 1.2 设 a 和 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，称满足不等式

$$|x-a|<\delta \tag{1.1}$$

的一切实数 x 的集合为 a 的 δ 邻域，点 a 叫作邻域的中心，δ 叫作邻域的半径，记作 $N(a,\delta)$，读作"a 的 δ 邻域"。

由于不等式 $|x-a|<\delta$ 与不等式 $a-\delta<x<a+\delta$ 等价，因此 $N(a,\delta)$ 是以 a 为中心，长度等于 2δ 的开区间 $(a-\delta,a+\delta)$，即

$$N(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta) \tag{1.2}$$

图 1-2(a)是 $N(a,\delta)$ 的示意图。

若在 $N(a,\delta)$ 内去掉中心点 a，则此集合称为 a 的 δ 空心邻域，记作 $N(\hat{a},\delta)$，它可以用不等式表示为：

$$0<|x-a|<\delta \tag{1.3}$$

这里 $0<|x-a|$ 表示 $x\neq a$，或用区间表示为

$(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$ 即

$$N(\hat{a},\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta) \tag{1.4}$$

其中 $(a-\delta,a)$ 为点 a 的左邻域，$(a,a+\delta)$ 为点 a 的右邻域，如图 1-2(b)。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com