成人高中结业应试必读

数学

上册

段云鑫　杨三阳　张　锬　编著

科学普及出版社

成人高中结业应试必读

数　　学

上　册

段云鑫　杨三阳　张　铁　编著

科学普及出版社

内 容 提 要

本书是《成人高中结业应试必读》的数学部分。全书共五篇，分为上、下两册。上册为代数、三角；下册为平面几何、立体几何、解析几何。

本书是为了满足广大成年人参加高中结业考试或报考成人各类高等学校复习文化知识的需要，根据教育部1985年全国各类成人高等学校招生考试复习大纲而编写的。本书特点是知识归类相对集中，简明扼要，重点突出，并尽量采用图表、口诀等形式加强学员的记忆。

科学普及出版社出版（北京海淀区白石桥路32号）
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
河北省保定市科技印刷厂印刷

开本：787×1092毫米1/32　印张：15.375　字数：333千字
1986年 0月第一版　1986年10月第一次印刷
印数：1—24，000册　定价：2.40元
统一书号：7051·1061　本社书号：1044

出版说明

当前，我国经济建设蓬勃发展，体制改革方兴未艾，全国各地正在掀起学习文化科学知识的热潮。为了满足高中没有结业的广大职工干部的文化学习或报考各类成人高等学校的迫切需要，我们组织了长期从事成人教育的老教师和具有相当丰富教学经验的普通中学的高中教师，编写了这套《成人高中结业应试必读》，（以下简称《应试必读》）。《应试必读》包括政治、语文（上、下册）、数学(上、下册)、物理（上、下册）、化学、地理、历史等。

这套《应试必读》是以教育部制订的《全日制十年制学校中学教学大纲（试行草案）》、教育部1985年全国各类成人高等学校招生考试复习大纲和“速成的联系实际的”成人教育方针为依据，并充分考虑到成人理解力强、记忆力较差、学习时间少而分散等特点，以及近年来职工高中结业和各类成人高等学校招生考试的实际。《应试必读》从内容来说，既重视知识的科学性和系统性，深度和广度；又力求少而精，兼顾一般，重点突出，简明扼要。从方法来说，既重视传授学习方法（特别是自学方法）、思维方法、又注意培养学员独立思考、独立分析问题和解决问题的能力；既要由浅人深，循序渐进，通俗易懂；又要善于指导，加强练习，提高时效。只有这样，才能便于学员扬长避短，在较短的时间内，通过学习和必要而适量的练习实践，巩固和深化所学的知识，为日后深造打下良好的基础。

本套《应试必读》是广大成年人参加高中结业考试的复习用书，也是报考各类成人高等学校的有益参考书，还是具有初中结业水平的成年人学习高中文化知识的良师益友。

科学普及出版社

一九八四年十月

编 者 的 话

为了满足广大城乡职工干部和知识青年学习文化和参加成人高中结业考试及报考各类成人高等学校的需要，我们编写了这套《应试必读》的数学部分。全书共五篇，分为上、下两册。上册为代数、三角；下册为平面几何、立体几何、解析几何。

本书按照《一九八五年全国各类成人高等学校招生考试复习大纲》的要求，参照历届成人高等学校招生考试的命题范围和我们在教学实践中积累的经验，慎重选材，加强双基训练。并且避开非典型的解题技巧，以求内容精练，重点突出，能在较短时间内复习完应试必需的数学知识。

根据成人理解力强、记忆力较差、学习时间少而分散的特点，本书除文词力求通俗外，在例题的前后加强了分析与说明，指出解题的思路和问题的多种解法，总结了同类问题的解题关键和规律；并且尽量采用图表、口诀等形式以帮助记忆。

本书在编排上采取知识归类、相对集中的原则；各部分知识以三课时为一段分节编写；每章后面都有小结；并且配备了自我检查题。自学者除全面系统地学习数学知识外，临试前只须重点复习各章的小结和自我检查题等题目，可起到提纲挈领的作用。这样安排既有利于成人自学，也有利于复习辅导班作为教材使用。

由于我们水平有限，时间又很仓促，书中可能有不少不妥、甚至错误之处，恳切希望各界读者批评指正。

编者

目　录

第一篇 代　数

第一章 数

数的概念在代数中占有重要地位。一方面，数与生产、生活实际联系密切，另一方面，代数学的主要内容（如代数式、方程和函数）都是建立在数的基础上，并且在某一数集范围内进行讨论的。

本章主要学习实数和复数。在实数中，要重点掌握数轴、相反数、绝对值等知识和实数的运算；在复数概念中，要掌握复数的各种表示法，复数的模和幅角、复数代数形式与三角形式的运算，并会在复数集合上解代数方程和因式分解等。

本章的第二节与第三节的复数部分，涉及到很多的三角知识。读者也可以根据自己的实际水平把这部分内容移到第二篇三角的后面去学习。

一、实　数

（一）内容

1. 自然数　自然数就是1，2，3，…，n，…。也称它们为正整数。自然数集合用N表示。自然数的主要性质有：在自然数集合内，有最小数1，没有最大数；任何两个自然数可以比较大小；相邻的两个自然数只相差1；在自然数集合内，可以施行加、乘与乘方运算。

2.整数　正整数(自然数)、零、负整数统称为整数．整数集合用Z表示。整数的主要性质有：在整数集合内没有最小数，也没有最大数；任意两个整数可以比较大小；在整数集合内可以施行加、减、乘、乘方运算。

3.有理数　设p、q为整数，且$q\neq0$，形如$\frac{p}{q}$的数叫做有理数。

有理数包括正整数、正分数、零、负整数和负分数。有理数集合用Q表示。

有理数的主要性质有：在有理数集合内，没有最小数，也没有最大数；任何两个有理数可以比较大小；任何两个不相等的有理数之间有无穷多个有理数；在有理数集合内，可以施行加、减、乘、除（除数不为零）与乘方运算。

4.实数　有理数和无理数总称为实数。实数集合用R表示。

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数（自然数）}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\left.\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\right\}\text{有限小数和无限循环小数}\end{cases}\\ \text{无理数—无限不循环小数}\end{cases}$$

（1）数轴　规定了原点、方向与长度单位的直线叫做数轴．实数集合和数轴上点的集合是一一对应的。因而，可用数轴上的点表示实数。

（2）相反数　在数轴上位于原点两侧且与原点距离相等的点所表示的两个实数，称它们互为相反数；零的相反数为零。

（3）绝对值　正数和零的绝对值是其本身，负数的绝对值是它的相反数。实数a的绝对值用符号$|a|$表示。显然

$$|a|=\begin{cases}a, & \text{当}a\geqslant 0\text{时；}\\ -a, & \text{当}a<0\text{时。}\end{cases}$$

$|a|$表示数轴上实数a到原点的距离。

（4）近似数和有效数字　表示量的准确值的数叫做准确数。用一个和准确数接近的有理数来表示准确数，这个有理数就是准确数的近似数。例如用四舍五入法求得的近似数可以精确到最后一个数位的一半。在这类近似数里，从第一个不是零的数字起到保留的数位为止，所有的数字都叫做这个近似数的有效数字。例如，$\pi=3.14159\cdots$，取精确到0.01的近似数为3.14，它的有效数字有3位。

（5）实数运算　在实数范围内，可以施行加、减、乘、除（除数不为零）和乘方五种运算。正数也可施行开方运算。运算时，如果式子里没有括号，就要先算乘方、开方，再算乘、除，最后算加、减。如果有括号（表示运算顺序），就要先进行括号里面的运算。

运算律：

①　交换律　$a+b=b+a$；　$ab=ba$。

②　结合律　$(a+b)+c=a+(b+c)$；

$(ab)c=a(bc)$。

③　分配律　$a(b+c)=ab+ac$。

（二）题型

1.实数运算

例1　计算：$\left(3\frac{1}{3}\right)^2-(-6.5)\times\frac{12}{13}+(-2)^4\div[(-2)^3+2]$。

解 原式$=\left(\frac{10}{3}\right)^2-\left(-\frac{13}{2}\right)\times\frac{12}{13}+16\div(-8+2)$

$$=\frac{100}{9}+6-\frac{8}{3}=14\frac{4}{9}.$$

说明 计算时要注意运算顺序。

2. 求算术根和绝对值

例2 设a为任意实数，化简：

$$\sqrt{a^2}+\sqrt{(1-a)^2}.$$

解 原式$=|a|+|1-a|$

$$=\begin{cases}-a+1-a=1-2a, & (a<0)\\ a+1-a=1, & (0\leqslant a<1)\\ a+a-1=2a-1, & (a\geqslant 1)\end{cases}$$

说明 (1)注意不要产生a一定表示正数，$-a$一定表示负数的错误；(2)当去掉绝对值的符号时，要考虑使每个绝对值为零的值，以这几个零值为界，把数轴分为几段，再分段讨论。

3. 整除知识的运用

例3 求用32、36、48去除都余15的数。

解 设所求的数是$nQ+15$，其中Q是32、36、48的最小公倍数，n是整数。

$\because$ 32、36、48的最小公倍数是288，

$\therefore$ 能用32、36、48除余15的数是

$$288n+15\ (n\text{是正整数}).$$

例4 设n是整数，求证n^3+3n^2+2n能被6整除。

证明 $n^3+3n^2+2n=n(n^2+3n+2)$

$$=n(n+1)(n+2).$$

$\because$ n、$n+1$、$n+2$是三个连续整数，其中必有一个是

3 的倍数，至少有一个是偶数，

∴　这三个连续整数之积必能被 6 整除。

4．无理数的证明

例5　证明$\sqrt{2}$是无理数。

证明　用反证法。

假设$\sqrt{2}$不是无理数，即$\sqrt{2}$是有理数，则按有理数定义，$\sqrt{2}$可以表示成一个既约分数的形式，

设$\sqrt{2}=\dfrac{m}{n}$（m，n是整数，且m、n互质），

两边同时平方有

$$2=\frac{m^2}{n^2},\quad \therefore\quad m^2=2n^2.$$

因m^2是偶数，故m是偶数，可设$m=2k$，又有$4k^2=2n^2$，∴　$2k^2=n^2$．于是n是偶数。因而m与n有公因数 2，与m，n互质的假设矛盾，

所以$\sqrt{2}$不是有理数，因而$\sqrt{2}$是无理数。

（三）练习

1．计算 $\left[\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2\times\left(-\dfrac{4}{3}\right)^2\div\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2-3^2-(-3)^2\right]\times(-1)^{119}$．

2．求证：奇数的平方减 1，能被 8 整除。

3．已知 $|x+y-3|+\sqrt{(x-y-1)^2}=0$，求$x$、$y$。

4．如果$2x+1<0$，试求 $\sqrt{4x^2-12x+9}-\sqrt{1+4x+4x^2}$的值。

5．设$(x-y\sqrt{2})^2=9-4\sqrt{2}$，求整数$x$、$y$的值。

6. 已知$\sqrt{2}$是无理数，证明$\sqrt{3}+\sqrt{2}$是无理数。

练习的提示或答案

1. 26。

2. 设奇数为$2n+1$（n是整数），

则 $(2n+1)^2-1=4n^2+4n+1-1$

$$=4n^2+4n=4n(n+1).$$

∵ n，$n+1$是两个连续整数，其中必有一个能被2整除。因此$n(n+1)$必有一个是2的倍数，

∴ $4n(n+1)$能被8整除。

3.因为$|x+y-3|$与$\sqrt{(x-y-1)^2}$均为非负数，而其和为零，所以它们分别为零。

$\begin{cases} x+y-3=0, \\ x-y-1=0, \end{cases}$ 解得$x=2$，$y=1$。

4. ∵ $2+1<0$，即$x<-\dfrac{1}{2}$，

∴ 原式$=|2x-3|-|1+2x|$

$$=-(2x-3)-[-(2x+1)]$$

$$=-2x+3+2x+1$$

$$=4$$

5. 由于x、y是整数，所以它们的和与积仍是整数。这样可利用整数部分等于整数部分，$\sqrt{2}$的系数等于$\sqrt{2}$的系数，来建立关系式，从而求得x、y。

由$x^2-2xy\sqrt{2}+2y^2=9-4\sqrt{2}$，得

$\begin{cases} x^2+2y^2=9, \\ xy=2. \end{cases}$ 解得$\begin{cases} x=1, \\ y=2; \end{cases}$ 或$\begin{cases} x=-1, \\ y=-2. \end{cases}$

6．用反证法．设$\sqrt{3}+\sqrt{2}=m$（m是有理数），

则有　　　　$\sqrt{3}=m-\sqrt{2}$，

两边平方，得　$3=m^2-\sqrt{2}m+2$，

$\therefore\quad \sqrt{2}=\dfrac{m^2-1}{2m}$．

因此　$\sqrt{2}$是有理数，这与已知$\sqrt{2}$是无理数是矛盾的．

$\therefore\quad \sqrt{3}+\sqrt{2}$是无理数．

二、复　　数

（一）内容

1．复数定义　形如$a+bi$（a、$b\in R$）的数叫做复数．其中i叫做虚数单位．（a、$b\in R$，是表示a、b都是实数的符号）．a叫做复数的实部，b叫做复数的虚部．复数集合用C表示．

i满足以下条件：

（1）　$i^2=-1$；

（2）　i可以与实数在一起按实数的运算律进行四则运算．

由i的定义知，i有周期性，即

$$i^{4n}=1,\ i^{4n+1}=i,\ i^{4n+2}=-1,\ i^{4n+3}=-i\ (n\in N).$$

（$n\in N$，是n为正整数的符号）

$$\begin{array}{c}\text{复数}\\(a+bi,a、b\in R)\end{array}\left\{\begin{array}{l}\text{实数}\ (b=0)\\ \text{虚数}\left\{\begin{array}{l}\text{纯虚数}\ (a=0,\ b\neq0)\\ \text{非纯虚数}\ (a\neq0\ \ b\neq0)\end{array}\right.\end{array}\right.$$

2．复数相等　规定当且仅当两个复数的实部与虚部分别相等时，这两个复数是相等的．即 $a+bi=c+di\Longleftrightarrow a=c$，$b=d$．

特别情况：当$a+bi=0$时，则$a=0$，$b=0$。

在复数集里，如果两个复数中至少有一个数是虚数，那么不能比较它们的大小。

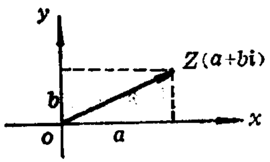

图 1-1

3．复数的几何表示　复数$z=a+bi$，可以用坐标平面上的一个点$Z(a、b)$来表示，见图1-1。这个坐标平面叫做复平面；x轴叫做实轴，y轴叫做虚轴（注意：虚轴不包括原点，原点在实轴上，表示实数o）。表示实数的点在x轴上，表示纯虚数的点在y轴上。复数集合与复平面上点的集合是一一对应的。

如图1-1所示，连结oZ，把oZ看成向量（方向是从o点指向Z），记作$\vec{Z}$或$\overrightarrow{oZ}$。这样，就把复数和向量连在一起了。长度相等，方向相同的向量，不管它们的起点在哪里，都认为是相等的向量。向量可以根据需要进行平移，一般把向量的起点移到原点。复数集合与复平面内所有从原点出发的向量所成的集合也是一一对应的。

为了方便，可以把复数$z=a+bi$说成点Z或向量$\overrightarrow{oZ}$。

4．复数的模和幅角　向量$\overrightarrow{oZ}$的长r叫做复数$z=a+bi$的模（或绝对值），记作$|z|$。由图1-1可以看出：$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$。其中，如果$b=0$，那么$a+bi$是一个实数$a$。它的模等于$|a|$（即$a$的绝对值）。

$\overrightarrow{oZ}$与x轴正方向的夹角θ叫做复数$z=a+bi$的幅角。满足$0\leq\theta<2\pi$的幅角θ的值叫做幅角的主值通常记作$\arg z$。

当复数为0时，它所对应的向量是零向量。零向量的方向不定，所以0没有确定的幅角。