中学生之友

数学辅导

下

中学生之友丛书

数　学　辅　导

（下）

华宏祖　张　立　编

江苏科学技术出版社

本书根据教育部颁布的全日制十年制学校中学数学教学大纲及其新编教材内容编写而成。全书共分十章，系统介绍了微积分初步知识、二进制与布尔代数、概率与数理统计。内容丰富，结构紧凑，深入浅出，通俗易懂。配有较多例题，有助中学生开拓思路，加深对教材的理解。每节后有一定数量的习题，并附有答案。可供在校中学生课余参考阅读、系统复习，也可供知青、青工自学和中学数学教师教学参考。

本书承扬州师院左宗明、沈宗华、庄亚东审稿，江苏师院沈树民、周英、秦淦编辑加工。

中学生之友丛书

数学辅导（下）

华宏祖　张　立　编

出版：江苏科学技术出版社

发行：江苏省新华书店

印刷：苏州印刷厂

开本 787×1092 毫米　1/32　印张 11.875　字数 263,000

1981 年 5 月第 1 版　1981 年 5 月第 1 次印刷

印数：1—101,000 册

书号：13196·055　定价：0.87 元

责任编辑　沈绍绪

目　录

第一章　函数与极限

微积分是数学的一个分支，是近代自然科学与工程技术中一种基本的数学工具，十七世纪以来，由于生产实践的需要，力学和天文学等基础学科的推动，在长期积累大量数学成果的基础上产生了微积分，以后又回到生产、技术与科学中，得到了广泛的应用．如今，微积分已是研究现代化生产科学技术所必须具备的基础知识．

微积分研究变量的变化，它具有朴素的辩证法思想，是研究客观世界运动变化的有力工具．学好微积分，不仅可以使我们掌握一门数学工具，以解决科学技术领域里的许多问题，而且，对于更深刻地理解和运用唯物辩证法也有帮助．

随着教育水平的不断提高，微积分的初步知识将在中学阶段进行讲授，这对提高整个中华民族的科学文化水平，促使我国加速实现社会主义四个现代化起着积极的作用．

微积分是研究变量的数学，函数概念是微积分中最重要的概念，它是建立在变量基础之上的；极限则是从变化趋势上来研究函数的一种方法．因此，理解函数概念以及掌握极限方法，对于学好微积分有着重要的意义．

§1 常量和变量

恩格斯说："纯粹数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系"。在研究数量关系时，我们经常遇到不同的量。例如：时间、长度、面积、体积、重量、速度、温度等等，在同一个问题中，有的量是保持不变的，通常叫做**常量**，一般用字母 a、b、c、……等来表示；有的量是不断变化的，通常叫做**变量**，一般用 x、y、z、……等来表示。

常量、变量并不是绝对的，情况变了，变量可能转化为常量，常量也可能转化为变量。

有的量，虽然也有变化，但是它的变化并不明显，因此也可以把这种变量当作常量来处理。

例如，在自由落体运动公式 $h=\frac{1}{2}gt^2$ 中，$\frac{1}{2}$ 是常量，g 是重力加速度，通常也可以看作是常量。h 和 t 都是变量，而且竖直落下的距离 h 随着时间 t 的变化而变化，通常把 t 叫做自变量，h 叫做因变量。

又如，一个物体所受的重力，是随着物体所处的不同纬度与高度而不同的。不过这种变化很微小，因此，一般仍把同一物体所受的重力看作是常量。

变量有一定的变化范围，在取连续的实数值时，可以用区间来表示。

两个实数间的实数全体叫做**区间**，这两个实数叫做区间的端点。

例如设 a 与 b 为两个实数，且 $a<b$，满足不等式 $a<x<b$ 的实数 x 的全体叫做以 a、b 为端点的**开区间**，并用记号 (a, b) 表示．

满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的实数 x 的全体叫做以 a、b 为端点的**闭区间**，用记号 $[a, b]$ 表示．

满足不等式 $a<x\leqslant b$ 或 $a\leqslant x<b$ 的实数 x 的全体叫做以 a、b 为端点的**半开区间**，分别用记号 $(a, b]$ 或 $[a, b)$ 来表示．

除了上面的有限区间外，还有无限区间．

$(-\infty, +\infty)$ 表示全体实数．

$(a, +\infty)$ 表示大于 a 的实数全体．

$(-\infty, b)$ 表示小于 b 的实数全体．

$[a, +\infty)$ 表示不小于 a 的实数全体．

$(-\infty, b]$ 表示不大于 b 的实数全体．

注意："$-\infty$"、"$+\infty$"仅仅是个符号，我们不能把它们作为一般的数来看待．"$-\infty$"读作"负无穷大"，"$+\infty$"读作"正无穷大"；今后还会遇到不带符号的无穷大，即"∞"，读作"无穷大"．

§2 函数概念

每一事物的运动都和它周围其他事物互相联系着和互相影响着的．变量与变量之间通常也是互相联系和互相影响的．比如正方形的面积随着边长的增加而增加，两个物体之间的引力随着它们间的距离的增大而减小．这种变量与变量间的

关系，通常用函数来表达.

定义　设 x 和 y 是两个变量，如果按照某一确定的对应关系(或规律)，当变量 x 每取一确定的值时，变量 y 总有一确定的值和它对应，那么变量 y 就叫做变量 x 的函数，记作

$$y = f(x) \text{ 或 } y = y(x).$$

其中，x 叫做自变量，y 叫做变量 x 的函数(或因变量). 两个变量间的这种依从关系，叫做函数关系.

$y = f(x)$表示 y 是 x 的函数，而当 x 取某一定值 x_0 时，对应的 y 所取的值 $y_0 = f(x_0)$ 称为函数 $y = f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处的函数值，有时也记作 $y_0 = y|_{x=x_0}$.

例如自由落体运动公式可表示为函数关系：

$$s = s(t) = \frac{1}{2}gt^2.$$

当 $t = 1$ 秒与 $t = 2$ 秒时，函数值分别为：

$$s(1) = s|_{t=1} \approx 4.9(\text{米})；$$

$$s(2) = s|_{t=2} \approx 19.6(\text{米}).$$

使函数有意义的自变量的变化范围，称为函数的**定义域**. 而把相应的函数值变化的范围称为函数的**值域**.

在用公式表示函数时，它的定义域由数学式子本身来确定，即是在实数范围内使函数的数学表达式有意义的 x 值的全体.

例 1　试确定下列函数的定义域：

① $y = x^3$；　　② $y = \dfrac{x+3}{x-2}$；

③ $y = \sqrt{x^2 + x - 2}$；　④ $y = \lg[\lg(x+1)]$.

解　① 当 x 取任何值时，x^3 都有意义. 所以函数 $y = x^3$

的定义域为全体实数，即$(-\infty,+\infty)$；

② 要使函数$y=\dfrac{x+3}{x-2}$有意义，必须要求分母不等于零，即$x-2\neq 0$，$x\neq 2$，所以该函数的定义域为：

$x\neq 2$的实数全体，即$(-\infty,2)$和$(2,+\infty)$；

③ 对于函数$y=\sqrt{x^2+x-2}$，要使它在实数范围内有意义，根号内的数值必须大于或等于零，即

$$x^2+x-2=(x+2)(x-1)\geqslant 0,$$

所以该函数的定义域为：

$x\leqslant -2$和$x\geqslant 1$即$(-\infty,-2]$和$[1,+\infty)$；

④ 由于负数和零没有对数，因此函数$y=\lg[\lg(x+1)]$中的x必须满足

$$\lg(x+1)>0,$$

即 $\quad x+1>1,\ x>0.$

所以，该函数的定义域为所有正实数，即$(0,+\infty)$。

一般说来，讨论由公式表示的函数的定义域时，要注意到分母不能为零，负数不能开平方，零和负数没有对数，以及反三角函数的主值范围。至于讨论由实际问题所确定的函数的定义域，则还必须根据实际的意义来定。例如，面积不能为负数，人数不能为分数等等。

例 2 试求函数$y=\arcsin(x^2-3)$的定义域。

解 要使$y=\arcsin(x^2-3)$有意义，必须

$$|x^2-3|\leqslant 1,$$

即 $\quad -1\leqslant x^2-3\leqslant 1,\ 2\leqslant x^2\leqslant 4,$

也就是 $\quad -2\leqslant x\leqslant -\sqrt{2}$和$\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 2$.

所以，该函数的定义域为$[-2,-\sqrt{2}]$和$[\sqrt{2},2]$。

由函数的定义可知，一个函数包含定义域、值域和对应关系三个方面.如果两个函数在这三方面均一致，那么我们可以说这两个函数相等，或说这两个函数为同一函数.

例如函数

$$f(x)=\frac{1-x^4}{1+x^2} \text{ 与 } g(x)=1-x^2$$

是相等的，即 $f(x)=g(x)$，

但函数

$$f(x)=\frac{x^2}{x} \text{ 与 } g(x)=x$$

就不一致，因为它们的定义域不相等，$f(x)$ 的定义域是 $x\neq 0$ 的实数全体，而 $g(x)$ 的定义域是全体实数.

练　习　一

求下列函数的定义域：

1. $y=\dfrac{1}{2x^2-5x-3}$.

2. $y=\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}$.

3. $y=1-\dfrac{1}{\sqrt{2-3x}}$.

4. $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-3}$.

5. $y=\dfrac{\sqrt{3-2x}}{\sqrt[3]{3x-1}}$.

6. $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x+1)}$.

7. $y=\lg\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}}$.

8. $y=\arcsin(1-2x)$.

9. $y=\sqrt{\lg\left(\dfrac{5x-x^2}{4}\right)}$.

10. $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$.

11. $y=\operatorname{ctg}\sqrt{x}$.

12. $y=\lg\sin x$.

说明下列各题中的$f(x)$与$g(x)$是否表示同一个函数?

13. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$, $g(x)=x+1$.

14. $f(x)=\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}$, $g(x)=\sqrt{x^2-1}$.

15. $f(x)=(\sqrt{x})^2$, $g(x)=x$.

16. $f(x)=\log_2 x^2$, $g(x)=2\log_2 x$.

17. $f(x)=\lg(x+1)+\lg(x-1)$, $g(x)=\lg(x^2-1)$.

答　　案

1. $x\neq-\dfrac{1}{2}, x\neq 3$.　2. $3\leqslant x\leqslant 5$.　3. $x<\dfrac{2}{3}$.

4. $x\geqslant 1, x\neq 3$.　5. $x\neq\dfrac{1}{3}$, $x\leqslant\dfrac{3}{2}$.

6. $-1<x\leqslant 0$.　7. $0<x\leqslant 1$.　8. $0\leqslant x\leqslant 1$.

9. $1\leqslant x\leqslant 4$.　10. $0\leqslant x\leqslant\pi$, $-4\leqslant x\leqslant-\pi$.

11. $x>0$, $x\neq(n\pi)^2$, $(n=1,2,\cdots\cdots)$.

12. $2k\pi<x<(2k+1)\pi$, $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots)$.

§3 函数关系的表示法

既然函数关系是表示变量之间的对应关系，那么，就有一个如何表达这种关系的问题．函数关系的表示通常有三种方法，即公式法、列表法和图象法．就微积分所讨论的函数来说，主要是研究由公式所表达的函数．

1．公式法

由数学运算的等式来表达自变量与因变量之间对应关系的方法，叫函数的公式表示法，简称**公式法**．例如

$$y=3x^2-2x+1;\quad y=\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{x-1};\quad s=4\pi r^2$$

等函数关系，就是由数学运算的等式来表示的．这类等式，通常也叫做函数的解析表达式，简称**解析式**．

由公式法表示的函数，其函数关系比较明确，对于每一个确定的x值，通过解析式中所给的运算过程，一般能计算出相应的函数值．

例3 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，试计算 $f(1)$、$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$、$f(a)$、$f(a^2)$．

解 $f(1)=\dfrac{1}{1+1^2}=\dfrac{1}{2}$；

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{5};$$

$$f(a)=\frac{1}{1+a^2};$$

$$f(a^2)=\frac{1}{1+(a^2)^2}=\frac{1}{1+a^4}.$$

一个函数，有时要用几个算式表达．在计算这类函数的值时，就要根据自变量所在的取值范围，注意选择相应的算式进行计算．

例4 设

$$f(x)=\begin{cases}3x+1, & 若 x\geqslant 0;\\ x^2, & 若 -1\leqslant x<0;\\ -x, & 若 x<-1.\end{cases}$$

试计算 $f(3)$、$f(0)$、$f\left(-\frac{1}{2}\right)$、$f(-3)$．

解 $f(3)=3\cdot 3+1=10;$

$f(0)=3\cdot 0+1=1;$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4};$$

$f(-3)=-(-3)=3$.

有时，一个函数也可以用几种不同形式的算式来表示．例如函数 $y=|x|$，它可以用 $y=\sqrt{x^2}$ 表示，又可以用

$$y=\begin{cases}x, & 若 x\geqslant 0;\\ -x, & 若 x<0.\end{cases}$$

来表示．

2. 列表法

列表法的特点是用若干组对应值来表示函数关系。例如，通常采用的对数表、三角函数表等等，它们都是由列表法来表示函数关系的．根据所列的表，能够很快地查出某些函数值．但是，由于所列出的对应值有限，因此在使用时，也会受到限制．

3. 图象法

用直角坐标系(或其他坐标系)中的曲线来表示变量之间的函数关系的方法，叫做函数的图象表示法，简称**图象法**．例如，温度自动记录仪描出的某日一昼夜间温度(T)与时间(t)的曲线如图(1—1)：

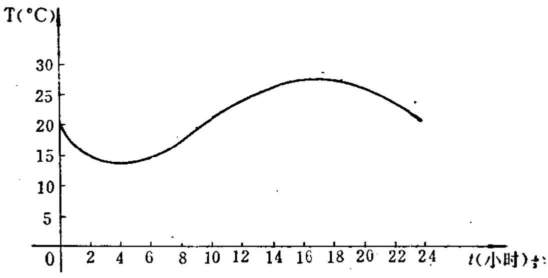

图 1—1

这种用图象表示函数的方法，给人以直观的形象．由图1—1我们可以一目了然地了解这一天一昼夜间温度的变化情形．不过由于受仪器精度的限制，通常得到的曲线不够精确，也不便于对函数作深入的理论研究．

§4　函数的图象与性质

1．函数的图象

在直角坐标系里，以自变量 x 的值表示横坐标，函数值 y 表示纵坐标，那么动点 $(x、y)$ 在坐标系里便形成一条曲线，它就是函数 $y=f(x)$ 的**图象**．例如，函数 $y=x+2$ 的图象是一条直线(图 1—2)．函数 $y=|x|$ 的图象是由同一点引出的两条射线（图 1—3)．函数 $y=\sqrt{9-x^2}$ 的图象是以原点为圆

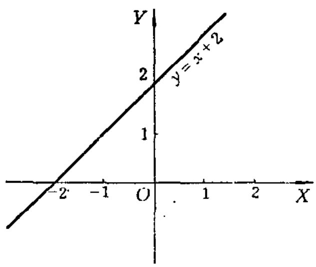

图　1—2

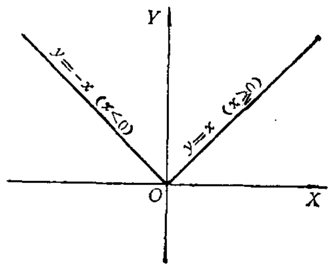

图　1—3

心，3 为半径的半圆形（图 1—4)．函数 $y=\begin{cases}0, & (x\leqslant 0)\\ 1, & (x>0)\end{cases}$

的图象是两条射线，其中一条没有端点（图 1—5)．其他如指数函数 $y=a^x(a>0, a\neq 1)$ 的图象为图 1—6．对数函数 $y=\log_a x(a>0, a\neq 1)$ 的图象为图 1—7．正弦函数 $y=\sin x$ 与余弦函数 $y=\cos x$ 的图象为图 1—8．

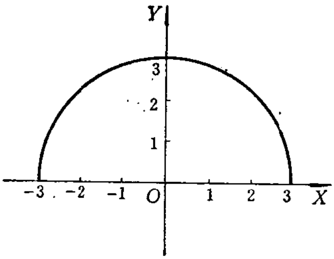

图 1—4

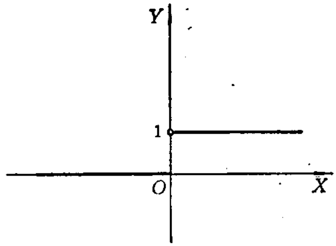

图 1—5

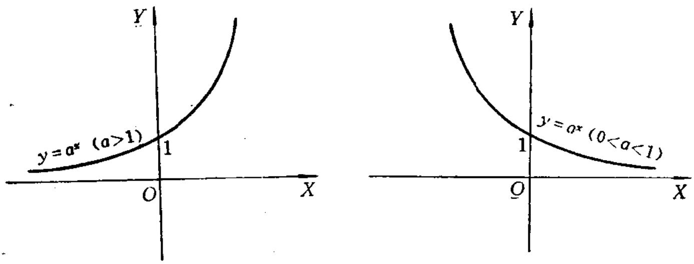

图 1—6

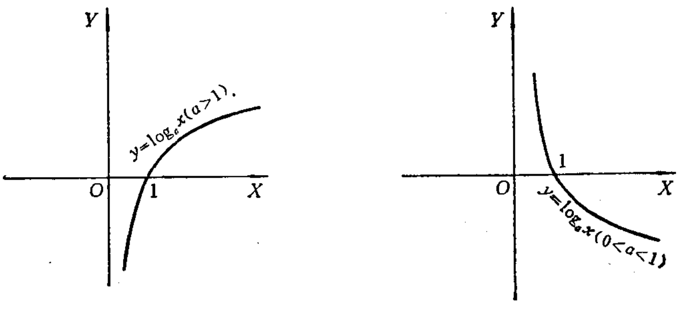

图 1—7