

计算机图象处理

(上册)

容观澳

清 华 大 学

1989.8.

1990.9.

图象复原是图象处理的另一重要课题。它的主要目的是改善给定的图象质量。当给定了一幅退化了的或者受到噪声污染了的图象后,利用退化现象的某种先验知识来重建或恢复原有图象是图象复原处理的基本过程。可能的退化有光学系统中的衍射,传感器非线性畸变,光学系统的象差,摄影胶片的非线性,大气湍流的扰动效应,图象运动造成的模糊以及几何畸变等等。噪声干扰可以由电子成象系统传感器、信号传输过程或胶片颗粒性造成的。各种退化图象的复原都可归结为一种过程,具体的说就是把退化模型化,并且采用相反的过程进行处理,以便恢复出原图象。本章将主要讨论代数复原技术。

§ 6-1 退化模型

图象恢复处理的关键问题在于建立退化模型。在第一章已提到在用数学方法描述图象时,它的最普遍的数学表达式为 $I = f(x, y, z, \lambda, t)$ 。这样一个表达式可以代表一幅活动的、彩色的立体电视图象。当研究的是静止的、单色的、平面的图象时,则其数学表达式就简化为 $I = f(x, y)$ 。基于这样的数学表达式,可建立退化模型如图 6-1-1 所示的形式。由图 6-1-1 的模型可见,一幅纯净的图象 $f(x, y)$ 是由于通过了一个系统 H 及加入外来加性噪声而使其退化为一幅图象 $g(x, y)$ 的。

图象复原可以看成是一个估计过程。如果已经给出了退化图象 $g(x, y)$ 并估计出系统参数 H ,从而可近似地恢复 $f(x, y)$ 。这里, $n(x, y)$ 是一种统计性质的信息。

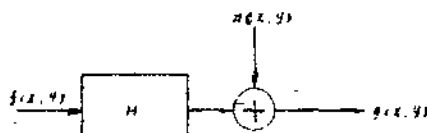


图 6-1-1 图象退化模型

当然,为了对处理结果作出某种最佳的估计,一般应首先明确一个质量标准。

一、系统 H 的基本定义

根据图象的退化模型及复原的基本过程可见,复原处理的关键在于对系统 H 的基本了解。就一般而言,系统是某些元件或部件以某种方式构造而成的整体。系统本身所具有的某些特性就构成了通过系统的输入信号与输出信号的某种联系。

系统的分类方法很多。例如,系统可分为线性系统和非线性系统;时变系统和非时变系统;集中参数系统和分布参数系统;连续系统和离散系统等等。

线性系统就是具有均匀性和相加性的系统。对于图 6-1-1 所示的系统来说,可表示成下式

$$g(x, y) = H[f(x, y)] + n(x, y) \quad (6-1-1)$$

如果暂不考虑加性噪声 $n(x, y)$ 的影响,而令 $n(x, y) = 0$ 时,则

$$g(x, y) = H[f(x, y)] \quad (6-1-2)$$

如果输入信号 $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, 对应的输出信号为 $g_1(x, y)$, $g_2(x, y)$, 通过系统后有下式成立

$$\begin{aligned}
& H[k_1 f_1(x, y) + k_2 f_2(x, y)] \\
&= H[k_1 f_1(x, y)] + H[k_2 f_2(x, y)] \\
&= k_1 g_1(x, y) + k_2 g_2(x, y) \quad (6-1-3)
\end{aligned}$$

那么, 系统H是一个线性系统。其中 k_1, k_2 为一常数。如果 $k_1 = k_2 = 1$, 则

$$\begin{aligned}
& H[f_1(x, y) + f_2(x, y)] \\
&= H[f_1(x, y)] + H[f_2(x, y)] \\
&= g_1(x, y) + g_2(x, y) \quad (6-1-4)
\end{aligned}$$

式(6-1-3)及式(6-1-4)说明, 如果H为线性系统, 那么, 两个输入之和的响应等于两个响应之和。显然, 线性系统的特性为求解多个激励情况下的输出响应带来很大方便。

如果一个系统的参数不随时间变化, 即称为时不变系统或非时变系统。否则, 就称该系统为时变系统。与此概念相对应, 对于二维函数来说, 如果

$$H[f(x-\alpha, y-\beta)] = g(x-\alpha, y-\beta) \quad (6-1-5)$$

H是空间不变系统(或称为位置不变系统), 式中的 α 和 β 分别是空间位置的位移量。这说明了图象中任一点通过该系统的响应只取决于在该点的输入值, 而与该点的位置无关。

由上述基本定义可见, 如果系统H有式(6-1-3)和式(6-1-5)的关系, 那么, 系统就是线性的和空间位置不变的系统。在图象复原处理中, 尽管非线性和空间变化的系统模型更加普遍和准确, 但是, 它却给处理工作带来巨大的困难, 它常常没有解或者很难用计算机来处理。因此, 在图象复原处理中, 往往用线性和空间不变性的系统模型加以近似。这种近似的优点是使线性系统理论中的许多理论可直接用来解决图象复原问题, 所以图象复原处理特别是数字图象复原处理主要采用线性的, 空间不变的复原技术。

二、连续函数退化模型

在线性系统理论中, 曾定义了单位冲激信号 $\delta(t)$ 。它是一个振幅在原点之外所有时刻为零, 在原点处振幅为无限大、宽度无限小, 面积为1的窄脉冲。其时域表达式为

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 & t = 0 \\ \delta(t) = 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad (6-1-6)$$

如果冲激信号 $\delta(t)$ 有一个 t_0 时刻的延迟, 那么

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = 1 & t = t_0 \\ \delta(t-t_0) = 0 & t \neq t_0 \end{cases} \quad (6-1-7)$$

冲激信号的一个重要特性是取样特性。由于 $\delta(t)$ 除了 $t=0$ 外, 其值均为零,

所以有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(0) dt \\ &= f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = f(0)\end{aligned}\quad (6-1-8)$$

同理, 当 $t = t_0$ 时有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t_0) dt \\ &= f(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt \\ &= f(t_0)\end{aligned}\quad (6-1-9)$$

冲激函数的另外一个取样公式就是卷积取样, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x - t) \delta(t) dt = f(x) \quad (6-1-10)$$

上述的一维时域冲激函数 $\delta(t)$ 不难推广到二维空间域中。如果推广至二维空间, 那么可定义 $\delta(x, y)$ 为冲激函数。 $\delta(x - \alpha, y - \beta)$ 就是有延迟的冲激函数。显然, 可以把 $f(x, y)$ 写成下式形式

$$f(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \quad (6-1-11)$$

根据 $g(x, y) = H[f(x, y)] + n(x, y)$ 的关系, 如果令 $n(x, y) = 0$, 则有下列式成立

$$\begin{aligned}g(x, y) &= H[f(x, y)] \\ &= H\left[\iint_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta\right]\end{aligned}$$

由于 H 是线性算子, 所以

$$\begin{aligned}g(x, y) &= H[f(x, y)] \\ &= H\left[\iint_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta\right] \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} H[f(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta)] d\alpha d\beta\end{aligned}$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) H \delta(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \quad (6-1-12)$$

令 $h(x - \alpha, y - \beta) = H \delta(x - \alpha, y - \beta)$
则

$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \quad (6-1-13)$$

其中 $h(x - \alpha, y - \beta)$ 就是系统 H 的冲激响应。也就是说, $h(x - \alpha, y - \beta)$ 是系统 H 对坐标为 α, β 处的冲激函数 $\delta(x - \alpha, y - \beta)$ 的响应。在光学中, 冲激为一光点, 所以 $h(x - \alpha, y - \beta)$ 又称为点扩散函数。

式 (6-1-13) 就是线性系统理论中非常重要的费雷德霍姆积分。式 (6-1-13) 指出, 如果系统 H 对冲激函数的响应为已知, 则对任意输入 $f(\alpha, \beta)$ 的响应可用式 (6-1-13) 求得。换句话说, 线性系统 H 完全可由其冲激响应来表征。

在空间位置不变的情况下

$$H \delta(x - \alpha, y - \beta) = h(x - \alpha, y - \beta) \quad (6-1-14)$$

在这种情况下, 显然

$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \quad (6-1-15)$$

这说明, 系统 H 加入输入信号的响应就是系统输入信号与冲激响应的卷积积分。

在有加性噪声的情况下, 前述的线性退化模型可表示为

$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta + n(x, y) \quad (6-1-16)$$

当然, 在上述情况下, 都假设噪声与图象中的位置无关。

式 (6-1-16) 就是我们主要研究的连续函数的退化模型。

三、离散的退化模型——循环矩阵

连续函数的退化模型是由输入函数 $f(\alpha, \beta)$ 和点扩散函数相乘后再积分来表示的。如果把 $f(\alpha, \beta)$ 和 $h(x - \alpha, y - \beta)$ 进行均匀取样后就可引伸出离散的退化模型。为了研究离散的退化模型, 不妨用一维函数来说明基本概念, 然后再推广至二维情况。

假设有两个函数 $f(x)$ 和 $h(x)$, 它们被均匀取样后分别形成 A 维和 B 维的阵列。在这种情况下, $f(x)$ 变成在 $x = 0, 1, 2, \dots, A-1$ 范围内的离散变量, $h(x)$ 变成在 $x = 0, 1, 2, \dots, B-1$ 范围内的离散变量。由此, 连续函数退化模型中的连续卷积关系就演变为离散卷积关系。

如果 $f(x)$, $h(x)$ 都是具有周期 N 的序列, 那么, 它们的时域离散卷积可定义为下式之形式

$$g(x) = \sum f(m) h(x-m) \quad (6-1-17)$$

显然, $g(x)$ 也是具有周期 N 的序列。周期卷积可用慢速卷积法计算也可用卷积定理进行快速卷积计算。

如果 $f(x)$ 和 $h(x)$ 均不具备周期性, 则可以用延拓的方法使其成为周期函数。为了避免折叠现象, 可以令周期 $M \geq A+B-1$, 使 $f(x)$, $h(x)$ 分别延拓为下列离散序列

$$\begin{aligned} f_e(x) &= \begin{cases} f(x) & 0 \leq x \leq A-1 \\ 0 & A-1 < x < M-1 \end{cases} \\ h_e(x) &= \begin{cases} h(x) & 0 \leq x \leq B-1 \\ 0 & B-1 < x < M-1 \end{cases} \end{aligned} \quad (6-1-18)$$

这样延拓后, 可得到一个离散卷积退化模型

$$g_e(x) = \sum_{m=0}^{M-1} f_e(m) h_e(x-m) \quad (6-1-19)$$

式中 $x = 0, 1, 2, \dots, M-1$ 。因为假设 $f_e(x)$ 和 $h_e(x)$ 都具有等于 M 的周期, 故 $g_e(x)$ 也具有这一周期。经过这样的延拓处理, 一个非周期的卷积问题就变成了周期卷积问题了。

如果用矩阵来表示上述离散退化模型, 可写成下式之形式

$$[g] = [H][f] \quad (6-1-20)$$

这里 $[g]$, $[H]$, $[f]$ 分别代表矩阵, 其中

$$[f] = \begin{bmatrix} f_e(0) \\ f_e(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_e(M-1) \end{bmatrix} \quad (6-1-21)$$

$$[g] = \begin{bmatrix} g_e(0) \\ g_e(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ g_e(M-1) \end{bmatrix} \quad (6-1-22)$$

$[H]$ 是 $M \times M$ 阶矩阵

$$[H] = \begin{bmatrix} h_e(0) & h_e(-1) & h_e(-2) & \cdots & h_e(-M+1) \\ h_e(1) & h_e(0) & h_e(-1) & \cdots & h_e(-M+2) \\ h_e(2) & h_e(1) & h_e(0) & \cdots & h_e(-M+3) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_e(M-1) & h_e(M-2) & h_e(M-3) & \cdots & h_e(0) \end{bmatrix} \quad (6-1-23)$$

由于 $h_e(x)$ 具有周期性, 所以 $h_e(x) = h_e(M+x)$, 利用这一性质, 式(6-1-23)又可以写成下式形式

$$[H] = \begin{bmatrix} h_e(0) & h_e(M-1) & h_e(M-2) & \cdots & h_e(1) \\ h_e(1) & h_e(0) & h_e(M-1) & \cdots & h_e(2) \\ h_e(2) & h_e(1) & h_e(0) & \cdots & h_e(3) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_e(M-1) & h_e(M-2) & h_e(M-3) & \cdots & h_e(0) \end{bmatrix} \quad (6-1-24)$$

由于 $h_e(x)$ 的周期性, 使得 $[H]$ 成为一个循环矩阵。

这一矩阵的结构在本章的其余部分起着重要的作用。由式(6-1-24)可以看到 H 各行的关系是向右循环移位的。这就是说, 在一行中最右的元素等于下一行中最左的元素。之所以被称为循环移位, 是因为由一行的右端移出的元素出现在下一行的左端。还需指出, 在式(6-1-24)中, H 的循环性是完善的。这是指这种循环性一直延伸到最后一行之末, 又回到第一行之首。在方矩阵中, 如果其中每一行是前一行的循环移位, 并且第一行是最后一行的循环移位, 就把这一方矩阵叫做循环矩阵, 重要的是要记住 H 的循环性质是假设 $h(x)$ 为周期性之后才得到的。

例 假设 $A=4$, $B=3$ 。可选 $M=6$, 然后在 $f(x)$ 的取样中补充两个 0, 在 $h(x)$ 的取样中补充三个 0。在这种情况下, f 和 g 为 6 维向量, 而 H 为 6×6 矩阵。

$$H = \begin{bmatrix} h_e(0) & h_e(5) & h_e(4) & \cdots & h_e(1) \\ h_e(1) & h_e(0) & h_e(5) & \cdots & h_e(2) \\ h_e(2) & h_e(1) & h_e(0) & \cdots & h_e(3) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_e(5) & h_e(4) & h_e(3) & \cdots & h_e(0) \end{bmatrix}$$

但是, 由于对于 $x=3, 4, 5$, $h_e(x)=0$; 对于 $x=0, 1, 2$, $h_e(x)=h(x)$, 故得

$$H = \begin{bmatrix} h(0) & & & & h(2) & h(1) \\ h(1) & h(0) & & & & h(2) \\ h(2) & h(1) & h(0) & & & \\ & h(2) & h(1) & h(0) & & \\ & & h(2) & h(1) & h(0) & \\ & & & h(2) & h(1) & h(0) \end{bmatrix}$$

这里，矩阵中未标出的元素均为零。

上述基本模型不难推广至二维情况。如果给出 $A \times B$ 大小的数字图象以及 $C \times D$ 大小的点扩散函数，可首先作成大小为 $M \times N$ 的周期延拓图象，即

$$f_e(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & 0 \leq x \leq A-1 \\ & 0 \leq y \leq B-1 \\ 0 & A \leq x \leq M-1 \\ & B \leq y \leq N-1 \end{cases} \quad (6-1-25)$$

$$h_e(x, y) = \begin{cases} h(x, y) & 0 \leq x \leq C-1 \\ & 0 \leq y \leq D-1 \\ 0 & C \leq x \leq M-1 \\ & D \leq y \leq N-1 \end{cases} \quad (6-1-26)$$

这样延拓后 $f_e(x, y)$ 和 $h_e(x, y)$ 分别成为二维周期函数。它们在 x 和 y 方向上的周期分别为 M 和 N 。由此得到二维退化模型为一个二维卷积形式

$$g_e(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f_e(m, n) h_e(x-m, y-n) \quad (6-1-27)$$

式中： $x=0, 1, 2, \dots, M-1$ ； $y=0, 1, 2, \dots, N-1$ ，卷积函数 $g(x, y)$ 也为周期函数，其周期与 $f_e(x, y)$ 和 $h_e(x, y)$ 一样。为避免重叠，同样要按下式规则延拓

$$M \geq A + C - 1, N \geq B + D - 1 \quad (6-1-28)$$

式(6-1-28)的模型同样可用矩阵来表示

$$[g] = [H][f] \quad (6-1-29)$$

其中 $[g]$ ， $[f]$ 代表 MN 维列向量。这些列向量是由 $M \times N$ 维的函数矩阵 $[f_e(x, y)]$ ， $g_e(x, y)$ 的各行堆积而成的。例如 $[f]$ 的第一组 N 个元素是 $[f(x, y)]$ 的第一行元素，第二组 N 个元素是由 $[f_e(x, y)]$ 的第二行元素得到的等等。因此式(6-1-29)中的 $[g]$ 和 $[f]$ 是 MN 维向量矩阵，即 $[g]$ ， $[f]$ 为 $(MN) \times 1$ 维矩阵。而 $[H]$ 为 $MN \times MN$ 维矩阵，即

先来考虑如下形状的 $M \times M$ 的循环矩阵 H

$$H = \begin{bmatrix} h_e(0) & h_e(M-1) & h_e(M-2) & \cdots & h_e(1) \\ h_e(1) & h_e(0) & h_e(M-1) & \cdots & h_e(2) \\ h_e(2) & h_e(1) & h_e(0) & \cdots & h_e(3) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_e(M-1) & h_e(M-2) & h_e(M-3) & \cdots & h_e(0) \end{bmatrix} \quad (6-1-34)$$

我们定义标量函数 $\lambda(k)$ 和向量 $w(k)$ 如下:

$$\begin{aligned} \lambda(k) = & h_e(0) + h_e(M-1) \exp\left[j \frac{2\pi}{M} k\right] \\ & + h_e(M-2) \exp\left[j \frac{2\pi}{M} 2k\right] + \cdots \\ & + h_e(1) \exp\left[j \frac{2\pi}{M} (M-1)k\right] \end{aligned} \quad (6-1-35)$$

式中 $j = \sqrt{-1}$, 并且

$$w(k) = \begin{bmatrix} 1 \\ \exp\left[j \frac{2\pi}{M} k\right] \\ \exp\left[j \frac{2\pi}{M} 2k\right] \\ \vdots \\ \exp\left[j \frac{2\pi}{M} (M-1)k\right] \end{bmatrix} \quad (6-1-36)$$

$k = 0, 1, 2, \cdots, M-1$ 。利用矩阵乘法可以证明

$$H w(k) = \lambda(k) w(k) \quad (6-1-37)$$

这一表示式指出 $w(k)$ 是个循环矩阵 H 的本征向量, $\lambda(k)$ 是它的相应的本征值。

假设利用 H 的 M 个本征向量作为列, 组成 $M \times M$ 矩阵 W , 则

$$W = [w(0) \quad w(1) \quad w(2) \cdots w(M-1)] \quad (6-1-38)$$

W 的第 k 个元素, 用 $W(k, i)$ 表示, 则为

$$W(k, i) = \exp\left[j \frac{2\pi}{M} k i\right] \quad (6-1-39)$$

式中 $k, i = 0, 1, 2, \cdots, M-1$ 。由于复指数的正交性质, 则可写出逆矩阵

W^{-1} , 其第 k 个元素, 若记为 $W^{-1}(k, i)$, 则可写为

$$W^{-1}(k, i) = \frac{1}{M} \exp\left[-j \frac{2\pi}{M} k i\right] \quad (6-1-40)$$

利用式(6-1-39)和(6-1-40)可以验证

$$W W^{-1} = W^{-1} W = I \quad (6-1-41)$$

式中 I 为 $M \times M$ 单位矩阵。

逆矩阵 W^{-1} 存在的重要性在于它保证 W 的诸列 (即 H 的本征向量) 为线性独立的。由基本的矩阵理论可知 H 能表示如下

$$H = W D W^{-1} \quad (6-1-42)$$

利用式(6-1-41)可得

$$D = W^{-1} H W \quad (6-1-43)$$

式中, D 为对角矩阵, 它的元素 $D(k, k)$ 为 H 的本征值, 即

$$D(k, k) = \lambda(k) \quad (6-1-44)$$

式6-1-43表明 H 是按指出的顺序被 W^{-1} 和 W 对角化了。

同理, 对于分块循环矩阵也要找一种对角化的方法。为使分块循环矩阵对角化, 变换矩阵可按下列方法构成, 设

$$\omega_M(i, m) = \exp\left[j \frac{2\pi}{M} i m\right] \quad (6-1-45)$$

和

$$\omega_N(k, n) = \exp\left[j \frac{2\pi}{N} k n\right] \quad (6-1-46)$$

根据这种符号, 我们定义 W 的大小为 $M N \times M N$, 并包含大小为 $N \times N$ 的 M^2 个部分, W 的第 $i m$ 个部分定义为

$$W(i, m) = \omega_M(i, m) W_N \quad (6-1-47)$$

式中, $i, m = 0, 1, 2, \dots, M-1$ 。 W_N 为 $N \times N$ 矩阵, 其元素为

$$W_N(k, n) = \omega_N(k, n) \quad (6-1-48)$$

式中 $k, n = 0, 1, \dots, N-1$ 。

逆矩阵 W^{-1} 的大小仍为 $M N \times M N$, 它是具有大小为 $N \times N$ 的 M^2 个部分, W^{-1} 的第 $i m$ 个部分, 用符号 $W^{-1}(i, m)$ 表示, 并被定义为

$$W^{-1}(i, m) = \frac{1}{M} \omega_M^{-1}(i, m) W_N^{-1} \quad (6-1-49)$$

式中 $\omega_M^{-1}(i, m)$ 为

$$\omega_M^{-1}(i, m) = \exp\left[-j \frac{2\pi}{M} i m\right] \quad (6-1-50)$$

式中 $i, m = 0, 1, 2, \dots, M-1$ 。矩阵 W_N^{-1} 的元素为

$$W_N^{-1}(k, n) = \frac{1}{N} \omega_N^{-1}(k, n) \quad (6-1-51)$$

式中

$$\omega_N^{-1}(k, n) = \exp\left[-j \frac{2\pi}{N} kn\right] \quad (6-1-52)$$

式中 $k, n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 。直接代入上面的 W 和 W^{-1} 的诸元素, 可以验证

$$WW^{-1} = W^{-1}W = I \quad (6-1-53)$$

式中 I 为 $MN \times MN$ 单位矩阵

和前面类似, 可以证明如果 H 是一个分块循环矩阵, 就可以写为: (Hunt 1973年)

$$H = WDW^{-1} \quad (6-1-54)$$

或

$$D = W^{-1}HW \quad (6-1-55)$$

式中 D 为对角线矩阵, 它的元素 $D(k, k)$ 与上面给出为延拓函数 $h_e(x, y)$ 的离散付里叶变换有关。

还可以证明, 若 H 为一实阵则 H 的转置用 H^T 表之, 为

$$H^T = WD^*W^{-1} \quad (6-1-56)$$

式中 D^* 为 D 的复数共轭。

五、退化模型的对角化和付里叶变换

在式 (6-1-30) 离散的一维模型中, 由于矩阵 H 为循环的, 故可表示为式 (6-1-40) 的形式。于是式 (6-1-50) 变为

$$g = WDW^{-1}f \quad (6-1-57)$$

将此式重新安排后得

$$W^{-1}g = DW^{-1}f \quad (6-1-58)$$

乘积 $W^{-1}f$ 是一个 M 维的列向量。由式 (6-1-40) 和前节中给出的 f 的定义, 可得乘积 $W^{-1}f$ 的第 k 个元素, 用 $F(k)$ 表示, 为

$$F(k) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} f_e(i) \exp\left[-j \frac{2\pi}{M} ki\right] \quad (6-1-59)$$

式中 $k = 0, 1, 2, \dots, M-1$ 。这一式子就是延伸序列 $f_e(x)$ 的付立叶变换。换句话说, 用 W^{-1} 乘 f 产生一向量, 该向量的元素是 f 中诸元素的付立叶变换。同样, $W^{-1}g$ 产生出 g 的诸元素的付立叶变换, 用 $G(k)$ 表示, $k = 0, 1, 2, \dots, M-1$ 。

其次, 来研究一下式 (6-1-58) 中的矩阵 D 。由前节中的讨论, 我们知道 D 的主对角线元素为循环矩阵 H 的本征值。式 (6-1-35) 中给出了这些本征值, 利用

$$\exp\left[-j\frac{2\pi}{M}(M-i)k\right] = \exp\left[-j\frac{2\pi}{M}ik\right] \quad (6-1-60)$$

可写成下式

$$\begin{aligned} \Lambda(k) &= h_e(0) + h_e(1)\exp\left[-j\frac{2\pi}{M}k\right] \\ &\quad + h_e(2)\exp\left[-j\frac{2\pi}{M}2k\right] + \dots \\ &\quad + h_0(M-1)\exp\left[-j\frac{2\pi}{M}(M-1)k\right] \end{aligned} \quad (6-1-61)$$

由式(6-1-44)和(6-1-61)得

$$D(k, k) = \Lambda(k) = \sum_{i=0}^{M-1} h_e(i)\exp\left[-j\frac{2\pi}{M}ki\right] \quad (6-1-62)$$

式中 $k=0, 1, 2, \dots, M-1$ 。可以看出式的右端是 $MH(k)$, $H(k)$ 是延伸序列 $h_e(x)$ 的离散付立叶变换。于是

$$D(k, k) = MH(k) \quad (6-1-63)$$

我们可以把这些变换合并成一个结果。因为 D 是一个对角线矩阵, D 与任一向量之积就是用 D 的一个单独的对角线元素去乘该向量的每一个相应的元素。因此, 式(6-1-33)给出的矩阵公式就能简化为一维付立叶变换序列的逐项之积。换言之

$$G(k) = MH(k)F(k) \quad (6-1-64)$$

式中 $k=0, 1, 2, \dots, M-1$ 。 $G(k)$ 为向量 $W^{-1}g$ 的诸元素, $MH(k)F(k)$ 为向量 $DW^{-1}f$ 的诸元素。式(6-1-64)的右端可以看成是 $f_e(x)$ 和

$h_e(x)$ 的卷积在频域中的表现(见前节)。从计算的观点来看, 这一结果含有相当大的简化, 因为 $G(k)$, $H(k)$ 和 $F(k)$ 都是 M 个取样的离散变换, 这些变换可用快速付立叶变换算法得到。

类似于上述的过程还可对二维退化模型得出等效的结果。用 W^{-1} 乘式(6-1-57)的两端, 并利用式(6-1-53)和(6-1-54)得

$$W^{-1}g = DW^{-1}f + W^{-1}n \quad (6-1-65)$$

式中 W^{-1} 为一个 $MN \times MN$ 矩阵, 它的诸元素由式(6-1-47)给出, D 为 $MN \times MN$ 对角线矩阵, H 为式(6-1-58)定义的 $MN \times MN$ 分块循环矩阵, f 和 g 为 MN 维的向量, 这些向量是由延伸图象 $f_e(x, y)$ 和 $g_e(x, y)$ 的各行叠积形成的。

式(6-1-65)的左端是一个 $MN \times 1$ 维的向量。将其元素表示为 $G(0, 0)$, $G(0, 1)$, $\dots$, $G(0, N-1)$; $G(1, 0)$, $G(1, 1)$, $\dots$, $G(1, N-1)$; $\dots$; $G(M-1, 0)$, $G(M-1, 1)$, $\dots$, $G(M-1, N-1)$ 。

则可证明 (Hunt [1973])

$$G(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} g_e(x, y) \exp(-j2\pi (ux/M + vy/N)) \quad (6-1-66)$$

式中 $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$; $v = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 。这一式子就是 $g_e(x, y)$ 的二维付立叶变换。换句话说, $W^{-1}g$ 的诸元素相当于用 $G(u, v)$ 的元素 ($u = 0, 1, 2, \dots, M-1$; $v = 0, 1, 2, \dots, N-1$) 叠积而成的付立叶变换矩阵的各行。同样, 向量 $W^{-1}f$ 和 $W^{-1}n$ 则为 MN 维向量, 并包含 $F(u, v)$ 和 $N(u, v)$ 诸元素, 其中

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f_e(x, y) \exp(-j2\pi (ux/M + vy/N)) \quad (6-1-67)$$

$$N(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} n_e(x, y) \exp(-j2\pi (ux/M + vy/N)) \quad (6-1-68)$$

式中 $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$; $v = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 。

最后, 我们得到对角线矩阵 D 的诸元素与延伸的脉冲响应函数 $h_e(x, y)$ 的付立叶变换有关, 即

$$H(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} h_e(x, y) \exp(-j2\pi (ux/M + vy/N)) \quad (6-1-69)$$

式中 $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$; $v = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 。

D 的 MN 个对角线元素按下法形成。第一组 N 个元素为 $H(0, 0)$, $H(0, 1)$, $H(0, N-1)$; 第二组为 $H(1, 0)$, $H(1, 1)$, $\dots$, $H(1, N-1)$; 依此类推, 最后的 N 个对角线元素为 $H(M-1, 0)$, $H(M-1, 1)$, $\dots$, $H(M-1, N-1)$ 。(对角线之外的元素当然为零)。由上述元素组成的整个矩阵再乘以 MN , 得到 D 。表示这一结构的更加简洁的方法如下

$$D(k, i) = \begin{cases} MNH(\lfloor \frac{k}{N} \rfloor, k \bmod N) & \text{如果 } i = k \\ 0 & \text{如果 } i \neq k \end{cases} \quad (6-1-70)$$

式中 $\lfloor p \rfloor$ 用来表示不超过 p 的最大整数, 并且 $k \bmod N$ 是以 N 除 k 所得到的余数。

利用式(6-1-66)到(6-1-69), 不难证明式(6-1-65)的每个元素都与下式有关

$$G(u, v) = MNH(u, v)F(u, v) + N(u, v) \quad (6-1-71)$$

式中 $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$; $v = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 。

因为 MN 项为一简单比例因子, 为了标注方便, 把它并到 $H(u, v)$ 中。根据这一假设, 式(6-1-70)和(6-1-71)可表示为

$$D(k, i) = \begin{cases} H\left(\left[\frac{k}{N}\right], k \bmod N\right) & \text{如果 } i = k \\ 0 & \text{如果 } i \neq k \end{cases} \quad (6-1-72)$$

式中, $k, i = 0, 1, 2, \dots, MN-1$ 。并且

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v) \quad (6-1-73)$$

式中 $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$; $v = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 。

这里的 $H(u, v)$ 是乘以因子 MN 的。

式(6-1-71)或(6-1-73)的意义在于: 包含在式(6-1-57)中给定模型的庞大的方程组可以化简为计算大小为 $M \times N$ 的少量的离散付立叶变换。例如, 对于 $M = N = 512$, 如果用 FFT 算法, 就成为一个较简单的问题, 而用 $g = Hf + n$ 直接计算将是十分困难的。但是 $g = Hf + n$ 给出的模型是贯穿本章的基础, 下面将根据它得出各种图象复原的方法。用矩阵形式给出的结果将形成一整套线性代数复原算法。这些算法都可按上述方式用 FFT 方法简化计算。

应当指出, 上面的简化是由于做了以下两个假设:

- (1) 图象退化是线性的, 空间不变的过程。
- (2) 图象作为延拓的周期函数来进行处理的。

§ 6-2 复原的代数方法

图象复原的主要目的是当给定退化的图象 g 及 H 和 n 的某种了解或假设, 估计出原始图象 f (在此为方便起见, 用黑体字代表矩阵, 即 $g = [g]$, $H = [H]$, $n = [n]$)。如果退化模型就是式(6-1-33)的形式, 就可以用线性代数中的理论解决图象复原问题。

代数复原方法的中心是寻找一个估计 $\hat{f}$, 它使事先确定的某种优度准则为最小。

一、非约束复原方法 (Unconstrained Restoration)

由式(6-1-33)的退化模型可知, 其噪声项为

$$n = g - Hf \quad (6-2-1)$$

在并不了解 n 的情况, 希望找到一个 $\hat{f}$, 使得 $H\hat{f}$ 在最小二乘方意义上来说近似于 g 。

也就是说, 希望找到一个 $\hat{f}$, 使

$$\|n\|^2 = \|g - H\hat{f}\|^2 \quad (6-2-2)$$

为最小。由定义可知

$$\|n\|^2 = n^T n \quad (6-2-3)$$

$$\|g - H\hat{f}\|^2 = (g - H\hat{f})^T (g - H\hat{f}) \quad (6-2-4)$$

求 $\|n\|^2$ 最小等效于求 $\|g - H\hat{f}\|^2$ 最小, 即

$$J(\hat{f}) = \|g - H\hat{f}\|^2 \quad (6-2-5)$$

实际上是求 $J(\hat{f})$ 的极小值问题。这里选择 $\hat{f}$ 除了要求 $J(\hat{f})$ 为最小外, 不受任何其他条件约束, 因此称为非约束复原。求 (6-2-5) 式的极小值方法就是用一般的求极值的方法。把 $J(\hat{f})$ 对 $\hat{f}$ 微分, 并使结果为零, 即

$$\frac{\partial J(\hat{f})}{\partial \hat{f}} = -2H^T(g - H\hat{f}) = 0 \quad (6-2-6)$$

$$H^T H \hat{f} = H^T g$$

$$\hat{f} = (H^T H)^{-1} H^T g \quad (6-2-7)$$

令 $M = N$, 因此, H 为一方阵, 并且设 H^{-1} 存在, 则可求得 $\hat{f}$,

$$\hat{f} = H^{-1}(H^T)^{-1} H^T g = H^{-1} g \quad (6-2-8)$$

1. 逆滤波 (Inverse Filtering)

逆滤波复原法也叫做反向滤波法。基本原理如下:

如果退化图象为 $g(x, y)$, 原始图象为 $f(x, y)$, 在不考虑噪声的情况下, 其退化模型用下式表示

$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) h(x-\alpha, y-\beta) d\alpha d\beta \quad (6-2-9)$$

这显然是一卷积表达式。由付里哀变换的卷积定理可知有下式成立

$$G(u, v) = H(u, v) F(u, v) \quad (6-2-10)$$

式中 $G(u, v)$, $H(u, v)$, $F(u, v)$ 分别是退化图象 $g(x, y)$, 点扩散函数 $h(x, y)$, 原始图象 $f(x, y)$ 的付里哀变换。由式 (6-2-10), 可得

$$F(u, v) = \frac{G(u, v)}{H(u, v)} \quad (6-2-11)$$

$$f(x, y) = \mathcal{F}^{-1}[F(u, v)] = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{G(u, v)}{H(u, v)}\right] \quad (6-2-12)$$

这意味着, 如果已知退化图象的付里哀变换和“滤波”传递函数, 则可以求得原始图象的付里哀变换, 经反付里哀变换就可求得原始图象 $f(x, y)$ 。这里 $G(u, v)$ 除以 $H(u, v)$ 起到了反向滤波的作用。这就是逆滤波法复原的基本原理。

在有噪声的情况下, 逆滤波原理可写成如下形式

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v) \quad (6-2-13)$$

$$F(u, v) = \frac{G(u, v) - N(u, v)}{H(u, v)} \quad (6-2-14)$$

式中 $N(u, v)$ 是噪声 $n(x, y)$ 的付里哀变换。

利用式(6-2-11)和式(6-2-14)进行复原处理时可能会发生下列情况, 即在 uv 平面上有些点或区域会产生 $H(u, v) = 0$ 或 $H(u, v)$ 非常小的情况, 在这种情况下, 即使没有噪声, 也无法精确恢复 $f(x, y)$ 。另外, 在有噪声存在时, 在 $H(u, v)$ 的邻域内, $H(u, v)$ 的值可能比 $N(u, v)$ 的值小得多, 因此由式(6-2-14)得到的噪声项可能会非常大, 这样也会使 $f(x, y)$ 不能正确恢复。

一般来说, 逆滤波法不能正确地估计 $H(u, v)$ 的零点, 因此必须采用一个折衷的方法加以解决。实际上逆滤波不是用 $1/H(u, v)$, 而是采用另外一个 u, v 的函数 $M(u, v)$ 。它的处理框图如图6-2-1所示。在没有零点并且也不存在噪声的情况下

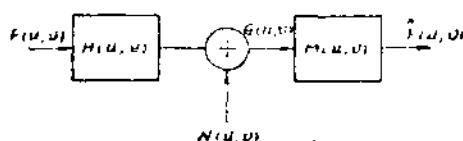


图6-2-1 实际的逆滤波处理框图

$$M(u, v) = \frac{1}{H(u, v)}$$

图6-2-1的模型包括了退化和恢复运算。退化和恢复总的传递函数可用 $H(u, v)M(u, v)$ 来表示。此时有

$$\hat{F}(u, v) = [H(u, v)M(u, v)]F(u, v) \quad (6-2-15)$$

式中 $\hat{f}(x, y)$ 是 $f(x, y)$ 的估计值, $\hat{F}(u, v)$ 是 $\hat{f}(x, y)$ 的付里叶变换。 $H(u, v)$ 叫做输入传递函数, $M(u, v)$ 叫做处理传递函数, $H(u, v)M(u, v)$ 叫做输出传递函数。

一般情况下, $H(u, v)$ 的幅度随着离 uv 平面原点的距离的增加而迅速下降, 而噪声项 $N(u, v)$ 的幅度变化是比较平缓的。在远离 uv 平面的原点时 $N(u, v)/H(u, v)$ 的值就会变得很大, 而对于大多数图象来说 $F(u, v)$ 却变小, 在这种情况下, 噪声反而占优势, 自然无法满意地恢复出原始图象。这一规律说明, 应用逆滤波时仅在原点邻域内采用 $1/H(u, v)$ 方能奏效。换句话说, 应使 $M(u, v)$ 在下述范围内来选择