北京师范大学函授教材

数　学

（第三册）

曹才翰
余炯沛　编

北京师范大学数学系

一九七八年三月二十日

目　　录

第十一章　　直线和元

直线和元是平百图形中最简单和最基本的图形。它们既可以看作动点作直线运动或元周运动的轨迹，又可以看作一些物件轮廓的几何形象。深入地研究直线和元的性质，在数学理论上和生产实际上都有重要忍义。

这一章着重讨论如何利用坐标来研究直线和元的问题。这里包括达立这些图形的方程，以及通过它们的方程来研究这些图形的性质或相互关系等问题。并在这个基础上进一步达立一般的曲线方程的概念。

§31　直线

一、直线的倾角和斜率

在平百上要确定一条直线的位置，只要指出这条直线通过某一个定点和这条直线的方向就可以了。在坐标系中，一个定点 P_0 可以用它的两个坐标 x_0、y_0 来确定，而一个固定的方向怎样用数值来表示呢？我们自然会想到用这条直线和某坐标轴交角的大小来表示。

我们规定：直线 ℓ 如果和 X 轴相交，就把 ℓ 的向上的方向和 X 轴的正向所成的最小正角 α（$0<\alpha<\pi$），叫做直线 ℓ 的倾角。如果 ℓ 与 X 轴平行，就说倾角 $\alpha=0$。为了明确"向上"的含义，可以换一种说法，就是：将 X 轴沿逆时针方向旋转到第一次和直线 ℓ 平行（或者重合）时所转过的角叫做直线 ℓ 的倾角。

按照规定，倾角 α 的取值范围是 $0\leq\alpha<\pi$。

为了用起来方便，通常不直接用倾角 α 的值来表示直线的方向，而采用倾角的正切值 $tg\alpha$ 来表示。它同样可以表示直线的方向。

定义：直线ℓ的倾角α的正切$tg\alpha$叫做ℓ的**斜率**，记为$k=tg\alpha$。

对于垂直于X轴的直线，$\alpha=\frac{\pi}{2}$，$tg\alpha$是没有意义的。我们说垂直于X轴的直线没有斜率。

在$0\leq\alpha<\pi$中，除去$\alpha=\frac{\pi}{2}$外，其余的α值与$tg\alpha$是一一对应的。因此，用$tg\alpha$仍然可以表示直线的方向。

一条直线的斜率，可以用直线上一些点的坐标表示出来。我们有下面的定理。

定理 如果$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$是不垂直于X轴的直线ℓ上任意两个点，那么直线ℓ的斜率是

$$k=tg\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad (1)$$

证：当ℓ与X轴平行时，$\alpha=0$，且$y_1=y_2$，显然(1)式成立。

当ℓ与X轴不平行时，如图31－1：

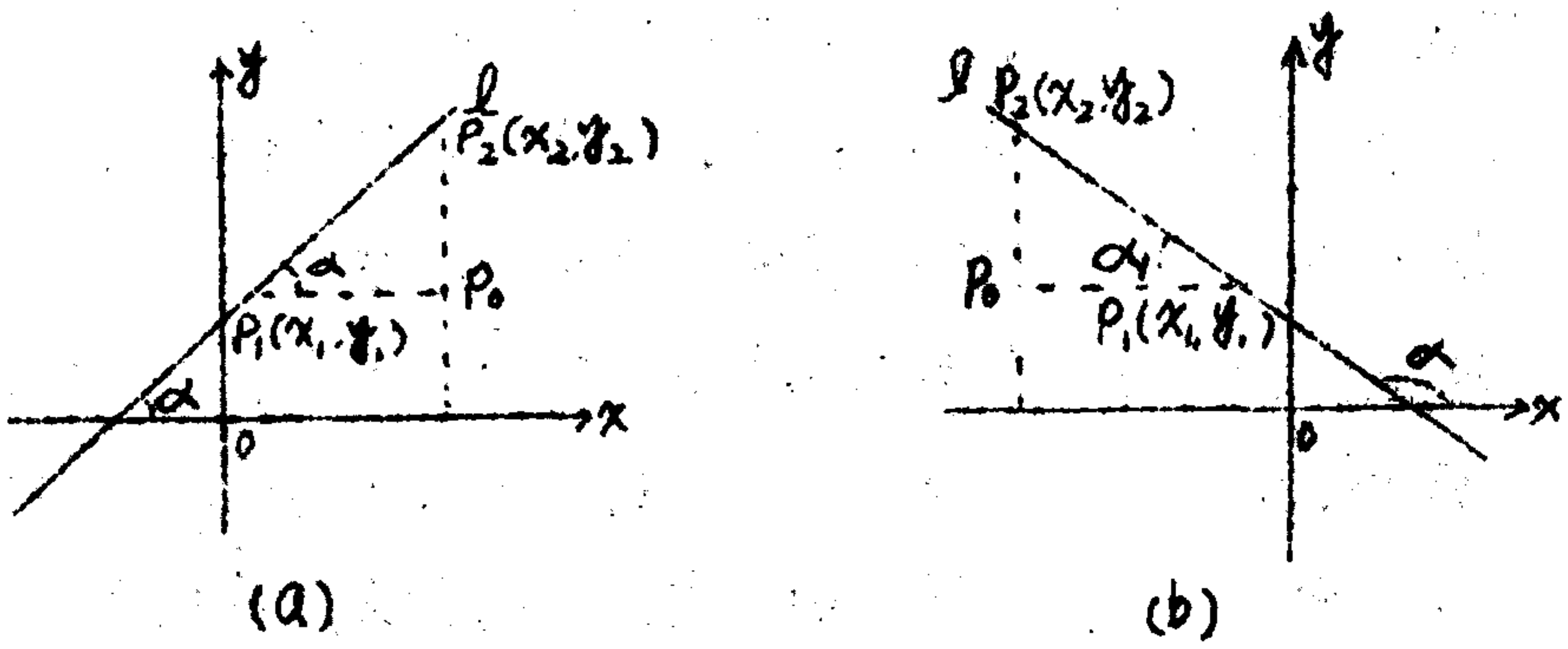


图 31－1

如果α是锐角（图a），那么

$$tg\alpha=\frac{|P_0P_2|}{|P_1P_0|}=\frac{P_0P_2}{P_1P_0}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1};$$

如果α是钝角（图b），那么

$$tg\alpha = tg(\pi-\alpha_1) = -tg\alpha_1 = -\frac{|P_0P_2|}{|P_1P_0|}$$

$$= -\frac{P_0P_2}{P_0P_1} = \frac{y_2-y_1}{x_1-x_2} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\text{。}$$

所以无论α是锐角或钝角，都有

$$tg\alpha = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad \text{(1)式得证。}$$

注意：P_1、P_2两点哪一个在上方对表示式(1)是无关紧要的。事实上，交换两点的位置时，两个差式y_2-y_1与x_2-x_1必同时变号，但比值$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$保持不变。

从定义可以看出：

当α是锐角时，斜率$k = tg\alpha > 0$；

当α是钝角时，斜率$k = tg\alpha < 0$；

当$\alpha = \frac{\pi}{2}$时，斜率不存在。

当直线平行于X轴时，$k = tg0 = 0$

例　求经过点$P_1(2, -1)$和$P_2(-5, 2)$的直线的斜率和倾角。

解　根据斜率公式(1)，得

$$k = \frac{2-(-1)}{-5-2} = -\frac{3}{7}$$

于是

$$tg\alpha = -\frac{3}{7} \approx -0.4286$$

$\therefore$倾角$\alpha \approx 156°48'$。

二、直线的方程

1、点斜式

已知直线 l 的斜率为 k，且过定点 $P_0(x_0, y_0)$，求它的方程。

设直线 l 上的动点为 $P(x, y)$，如图31－2。

当 P 不与 P_0 重合时，连线 P_0P 与 l 有相同的斜率，因而总有

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=k,$$

即 $\underline{y-y_0=k(x-x_0)}$　　(1)

就是说，动点的坐标 x，y 必须满足关系式(1)。

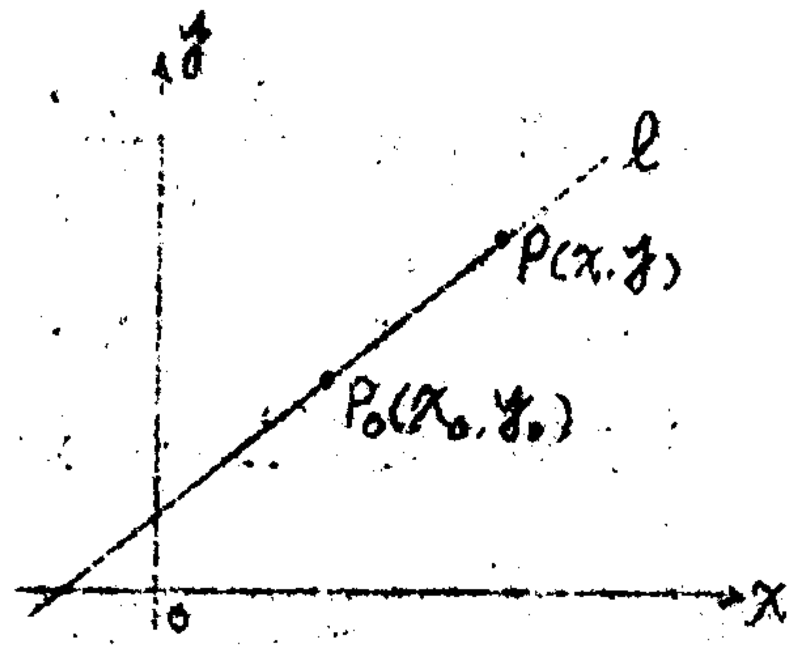


图　31－2

当 P 与 P_0 重合时，$y-y_0=0$，$x-x_0=0$。x，y 也满足关系式(1)。

这就可以说，直线 l 上所有的点都满足关系式(1)。

反过来，我们可以证明：不在直线 l 上的点的坐标，一定不满足关系式(1)。这样，关系式(1)就是所求的直线方程。

更详细地说。方程 $y-y_0=k(x-x_0)$ 是过点 (x_0, y_0) 而且具有斜率 k 的直线 l 的点斜式方程。

例1、已知直线过点（2，－3），且斜率为2，求它的方程，并画出这条直线。

解：把已知点 P_0 的坐标 $x_0=2$，$y_0=-3$ 和斜率 $k=2$ 代入点斜式方程，得

$$y-(-3)=2(x-2),$$

化简得　$y=2x-7$

这就是所求方程。

要画出这条直线，只要在它上百取两个点就可以了。已知点（2，-3）在ℓ上，我们在ℓ上另取一点，比如设$x=0$，由方程得$y=-7$，用直尺连结（2，-3）和（0，-7）两点，即可作出直线（如图31-3）。

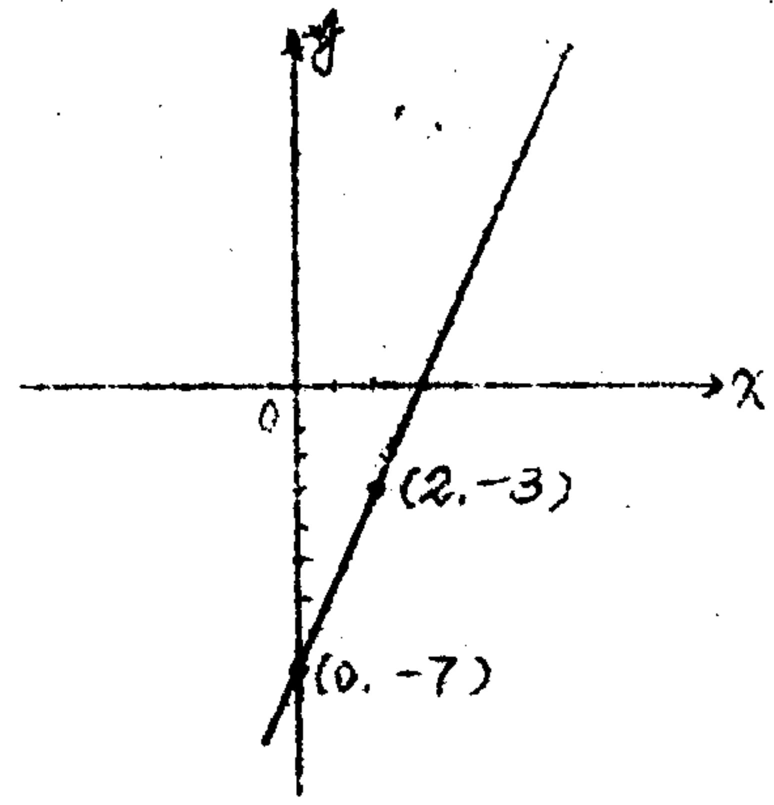


图 31-3

2、斜截式

已知直线ℓ的斜率为k，直线在y轴上的截距（即直线与y轴交点的纵坐标）为b，求它的方程。

由这已知条件，可知直线过定点（0，b）。据点斜式，得到方程

$$y-b=k(x-0),$$

即 $$\underline{y=kx+b} \qquad (2)$$

方程(2)就是所求直线的方程。也叫做直线的斜截式方程。

例2 已知直线的倾角为$\alpha=\frac{\pi}{3}$，在y轴上的截距为$b=-1$，求它的方程。

解 将$k=tg\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，和$b=-1$代入斜截式方程，得

$$y=\sqrt{3}x-1$$

这就是所求的方程。

3、两点式

已知直线过$P_1(x_1,y_1)$和$P_2(x_2,y_2)$两点（$x_1\neq x_2$），求它的方程。

由这两点可确定直线的斜率为$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，取两点中的任一点为定点，比如$P_1(x_1,y_1)$，据点斜式可写出

$$\underline{y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)} \qquad (3)$$

这就是直线的两点式方程。如果$y_2-y_1\neq 0$，那么还可以写成下式

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \qquad (4)$$

但(4)式不如(3)式容易记住。不取P_1而取P_2作定点，同样可以写出一个方程来，但与(3)式是等价的，留给读者思考。

例3　求出过（4，1）和（－5，4）两点的直线方程。

解：把两点的坐标代入(4)，得

$$\frac{y-1}{4-1}=\frac{x-4}{-5-4},$$

化简为　$y=-\frac{1}{3}y+\frac{7}{3}$

即为所求方程。

当然也可用点斜式来求。先由两已知点求出斜率

$$k=\frac{4-1}{-5-4}=-\frac{1}{3}$$

再选定一点（4，1），据点斜式得

$$y-1=-\frac{1}{3}x(x-4)$$

整理为　$y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$

4、截距式

已知直线在x轴上的截距为a，在y轴上的截距为b，求它的方程（$a\neq 0$，$b\neq 0$）

根据已知的两个截距，便知直线经过轴上两点（a，0）和（0，b）由两点式(4)，便可写出方程

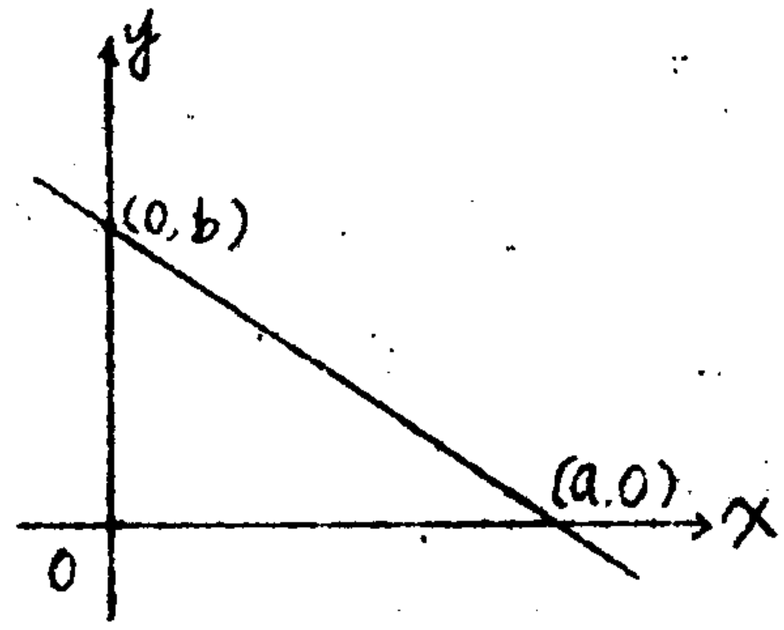
$$\frac{y-b}{0-b}=\frac{x-0}{a-0}$$

即

$$-\frac{y}{b}+1=\frac{x}{a}$$

再⿱整理而成

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1} \qquad (5)$$



这就是直线的截距式方程。

例4　已知直线在x轴上的截距是3，在y轴上的截距是5，求它的方程。

图　31－4

解：根据截距式(5)，立即得到所求方程为

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$$

例5　把直线方程$y=-3x-15$化为截距式。

解：原方程是斜截式方程，直线在y轴上的截距是$b=-15$。再求直线在x轴上的截距a。令$y=0$，则$0=-3x-15$，$x=-5$，$\therefore a=-5$。

得所求方程为$\frac{x}{-5}+\frac{y}{-15}=1$

对于上列直线方程的几种形式，不必死记。只要掌握住点斜式，其他形式就不难根据已知条件一一推导出来。我们列出各种形式，是为了便于在具体条件下，灵活地用这些形式来写出直线的方程或研究直线。

对于垂直于x轴的一类直线，因为它们没有斜率，所以不能用上列任何一种形式来写出方程。但因这样的直线上动点的横坐标x恒为常数而与纵坐标y无关，所以它的方程具有更简单的形式

$$x=a$$

同样，垂直于y轴的直线的方程具有简单的形式

$$y=b$$

5、直线方程的一般式

任意一条不垂直于X轴的直线ℓ，它一定有斜率k，并且在y轴上有截距b。它的方程就可用斜截式写出来

$$y = k y + b$$

再变形为

$$k X - y + b = 0$$

这就是二元一次方程

$$A X + B y + C = 0 \qquad (6)$$

的形式。

如果ℓ垂直于X轴，那么它的方程是

$$X = a$$

改写为$X - a = 0$，也属于(6)的形式（即$B = 0$时特殊情况）。

因此可以说，平面上任何直线的方程，都可写成二元一次方程$A X + B y + C = 0$的形式，其中A、B不全为零。

反过来，是否任何一个二元一次方程(6)的图形都是直线呢？我们在讲一次函数时已讨论过这个问题。

任意给出一个方程$A X + B y + C = 0$（A、B不全为零）。

1）、如果$B \neq 0$，那么改写为

$$y = -\frac{A}{B}X - \frac{C}{B}$$

根据斜截式方程的意义，它表示一条具有斜率$-\frac{A}{B}$和在y轴上截距为$-\frac{C}{B}$的直线（可能与X轴平行）。

2）、如果$B = 0$，这时A不可能为零，方程(6)写成特殊形式$X = -\frac{C}{A}$它表示一条垂直于X轴且在X轴上的截距为$-\frac{C}{A}$的直线。

这就可以说，任何一个二元一次方程$A X + B y + C = 0$的图形一定是直线。

根据上述两方面的分析，我们得到下面的结论：

直线方程的一般形式是

$$AX+By+C=0 \quad (A, B不全为零)$$

以后我们常把方程是 $AX+By+C=0$ 的直线，简称为直线 $AX+By+C=0$。

例6　说出下列直线的斜率和在y轴上的截距：

(1) $3X-4y-7=0$;　　(2) $\sqrt{2}X+2y+1=0$

解：∵直线 $AX+By+C=0$ 的斜率是 $-\frac{A}{B}$，y轴上的截距是 $-\frac{C}{B}$，

∴直线 $3X-4y-7=0$ 的斜率是 $k=-\frac{3}{-4}=\frac{3}{4}$，在y轴上的截距是 $b=-\frac{-7}{-4}=-\frac{7}{4}$。

直线 $\sqrt{2}X+2y+1=0$ 的斜率是 $k=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，在y轴上的截距是 $b=-\frac{1}{2}$。

例7　把经过点（6，－4）并且斜率等于 $-\frac{4}{3}$ 的直线的点斜式方程化为一般式，再化成截距式。

解：点斜式方程是

$$y+4=-\frac{4}{3}(X-6)$$

化为一般式，得

$$4X+3y-12=0$$

把常数项移到右边，再把两边除以12，就得截距式

$$\frac{X}{3}+\frac{y}{4}=1。$$

三、直线间的相互关系

我们已经知道，任何一条直线都可以用一个二元一次方程 $AX+By+C=0$ 来表示。现在就利用直线的方程来讨论两条直线间的各种关系。

1、两条直线的交点

我们在第二章讲二元一次方程组的图象解法时指出，在坐标纸上作出两个方程的图象，读出交点的坐标，就得到方程组的近似解。现在问题的提法反过来，求两条已知直线交点的坐标。由于作图法通常只能得到近似的值，往往不满足生产技术上高精度的要求，因此考虑用解方程组的方法来求它们的交点。

设已知两条直线 ℓ_1 和 ℓ_2 的方程是

$$\ell_1:\ A_1X+B_1y+C_1=0;\qquad \ell_2:\ A_2X+B_2y+C_2=0。$$

$M(\alpha,\beta)$ 是它们的交点。我们知道下述的等价关系：

$$M\text{是}\ell_1,\ell_2\text{的交点}\iff\begin{cases}M\text{在}\ell_1\text{上}\\ M\text{在}\ell_2\text{上}\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}(\alpha,\beta)\text{满足}A_1X+B_1y+C_1=0\\ (\alpha,\beta)\text{满足}A_2X+B_2y+C_2=0\end{cases}$$

$$\iff(\alpha,\beta)\text{是方程组}\begin{cases}A_1X+B_1y+C_1=0\\ A_2X+B_2y+C_2=0\end{cases}\text{的解}$$

这样，利用代数方法解二元一次方程组，即可得到两直线交点的坐标。

例1　求下列两条直线的交点：

$$\ell_1:\ 3X+4y-2=0;\qquad \ell_2:\ 2X+y+2=0$$

解：解方程组

$$\begin{cases}3X+4y-2=0,\\ 2X+y+2=0。\end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x=-2, \\ y=2 \end{cases}$$

即ℓ_1，ℓ_2交点的坐标是（－2，2）。

例2 求经过点A（0，1），B（－1，0）的直线和经过点C（1，0），D（0，－2）的直线的交点。

解：A、B、C、D四点都在坐标轴上，据直线方程的截距式求得

AB的方程 $\dfrac{x}{-1}+\dfrac{y}{1}=1$，

CD的方程 $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{-2}=1$，

解方程组 $\begin{cases} -x+y=1, \\ x-\dfrac{y}{2}=1 \end{cases}$

得 $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$

即AB，CD交点的坐标是（3，4）。

例3 证明下列三条直线共点：

ℓ_1：$2x+y-5=0$， ℓ_2：$x-y+2=0$， ℓ_3：$x+y-4=0$

证：求ℓ_1、ℓ_2的交点M：

解方程组 $2x+y-5=0$

$x-y+2=0$

得 $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$

即M的坐标是（1，3）。

将$x=1$，$y=3$代入ℓ_3的方程去

$1+3-4=0$

满足方程。即M在ℓ_3上。

这就是说M是ℓ_1、ℓ_2、ℓ_3的公共点。证明了三条直线共点。

2、平行、垂直的条件

两条直线平行的充要条件已在第二章讲过了，现在按斜率的新定义再论证一次。

定理1　两条都不垂直于X轴的直线互相平行的充分必要条件是它们的斜率相等。

设直线ℓ_1和ℓ_2的斜率分别是k_1和k_2。定理的意思就是

$$\ell_1 /\!/ \ell_2 \Longleftrightarrow k_1 = k_2$$

证明分为两方面：

(1) 设$\ell_1 /\!/ \ell_2$，那么它们的倾角α_1和α_2就相等，$\alpha_1 = \alpha_2$，因而$tg\alpha_1 = tg\alpha_2$就得到$k_1 = k_2$。

(2) 设$k_1 = k_2$，按斜率定义，得$tg\alpha_1 = tg\alpha_2$。根据同名三角函数相等的条件（见§28），就有

$$\alpha_1 = \alpha_2 + n\pi \text{（n为整数）。}$$

即

$$\alpha_1 - \alpha_2 = n\pi$$

注意倾角α_1、α_2都限制在半开区间$[0, \pi)$上取值，因而

$$0 \leq |\alpha_1 - \alpha_2| < \pi$$

由此可知，使得等式$\alpha_1 - \alpha_2 = n\pi$成立的整数只有一个即$n = 0$。这就是$\alpha_1 - \alpha_2 = 0$，即$\alpha_1 = \alpha_2$，所以$\ell_1 /\!/ \ell_2$。定理得证。

如果两条直线的方程用一般式给出：

$$\ell_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad \ell_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

由于限定不垂直于X轴，于是$B_1 \neq 0$，$B_2 \neq 0$，$k_1 = -\frac{A_1}{B_1}$，$k_2 = -\frac{A_2}{B_2}$，那么定理1可表示为

$$\ell_1 /\!/ \ell_2 \Longleftrightarrow -\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2} \Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$