21 高等师范院校教材

数学类

数学分析

（上册）

SHUXUE FENXI

主　编　朱培勇　黄家琳

副主编　张利平　唐再良　陈顺清

曾　意　王良成

四川大学出版社

数学类

21 高等师范院校教材

数学分析（上册）

SHUXUE FENXI

主　编　朱培勇　黄家琳
副主编　张利平　唐再良　陈顺清
　　　　曾　意　王良成
参　编　张新华　田勉励　丁继忠
　　　　王雄瑞　杨琼芬　张　勇

四川大学出版社

21 高等师范院校教材

数学分析（上、下册）

总 策 划：陈国弟 张晓舟
责任编辑：周树琴
责任校对：李晓琴
封面设计：罗 光
责任印制：曹 琳

图书在版编目(CIP)数据

数学分析. 上、下册 / 朱培勇，黄家琳主编. —成都：四川大学出版社，2002. 8

ISBN 7－5614－2400－0

Ⅰ.数… Ⅱ.①朱…②黄… Ⅲ. 数学分析－高等学校－教材 Ⅳ. 017

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第065640号

书名 数学分析（上、下册）

主 编 朱培勇 黄家琳
出 版 四川大学出版社
地 址 成都市一环路南一段24号 (610065)
印 刷 郫县犀浦印刷厂
发 行 四川大学出版社
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 42. 5
字 数 728千字
版 次 2002年8月第1版
印 次 2002年8月第1次印刷
印 数 0 001～2 000册
定 价 64. 00元（上、下册）

◆读者邮购本书，请与本社发行科联系。
◆电 话：85408408 85401670 85408023
◆邮政编码：610065
◆本社图书如有印装质量问题，请寄回印刷厂调换。

主要作者(1)简介

朱培勇,男,1956年生.1985年西南师范大学数学本科毕业;1992年和2000年先后在四川大学数学学院研究生毕业,分别获基础数学硕士、博士学位;1998年破格晋升教授.现为四川省学术与技术带头人后备人选,电子科技大学博士后,西南民族学院数学系教授,自贡师专数学系客座教授.

1983—2001年,一直从事师范教育专业的"数学分析"和"高等数学"的教学,并先后多次承担"数学建模"课程的教学和全国大学生数学建模竞赛培训工作.1995年开始主持"师范数学教育专业《数学分析》教学改革研究"项目,1996年该项目经国家教委批准获得世界银行贷款资助,1998年项目结题,其主要成果2000年获四川省高等学校教学成果一等奖.

近年来,先后在Topology Proceedings(美国)、Topology and it Applications(荷兰)、Scienticae Mathematicae(日本)等国际数学杂志以及《数学学报》、《数学进展》、《数学年刊》等国内重要学术杂志和核心期刊上发表学术论文30余篇;三次被邀请参加国际学术会议并在会上作学术交流;1995年以来,完成四川省教育厅自然科学基金青年基金和重点基金项目各一项.

1997年获曾宪梓教育基金高等学校教师奖三等奖;2000年获四川省教育厅科技进步三等奖和四川省高等学校教学成果一等奖各一项.

主要作者(2)简介

黄家琳,1949年生,宜宾学院数学系主任,副教授,四川省数学会理事,四川省"三育人"先进个人,曾梓教育基金教师三等奖获得者,宜宾学院学术带头人,十佳教师.

该同志1966年毕业于泸县二中,1977年恢复高考进入宜宾师专数学系学习,以优异成绩留校任教.1981年3月到南充师院四川省高校数学师资班读本科.1986年考入南京大学基础数学助教班,修业一年半.1994年9月到四川师大作进修学者,师从丁协平教授,修业一年.2000年3月到西南师范大学作访问学者,修业半年.

黄家琳同志在高校工作二十余年,主要从事数学分析方面的教学和研究,在该方面有较高的造诣和扎实的功底.近年来,在J. Math. And Math. Sci.(美国)、西南师范大学学报、四川师范大学学报、河南师范大学学报等国内学术杂志公开发表学术论文近20篇.

前　言

我国传统数学教育的主流是按照严密的数学理论进行教学的，这一教育培养了许许多多基础功底扎实的理论研究、教育教学等各类人才。然而，在当今社会中，从事理论研究和数学教学的人才毕竟需要量很少，绝大多数人学习数学的目的是运用数学的方法或者把数学作为工具去解决工农业生产、技术开发、社会研究以及自然科学研究等方面的各种问题。特别是刚刚步入 21 世纪的今天，科学技术迅猛发展，并且传统的“精英”教育已经快速地转向“大众化”教育。从社会对人才的需求上讲，而今不但要求受教育者要学好数学，更重要的是把数学与计算机有机结合起来去解决实际工作中的各种问题。因此，面对受教育者队伍的扩大和 21 世纪的人才需求，传统的数学教学内容和数学教学模式必须进行改革。

《数学分析》是师范院校数学专业最重要的基础课程之一，它的主体内容是微积分。从历史的角度来看，微积分是在实际生产、技术开发、学术研究等方面的需求中逐步发展形成的，在应用方面有着广泛的前景。因此，这部分知识内容不但可以训练学生严密的数学思维能力，而且更重要的是能够培养学生用所学过的知识解决实际问题的能力。而这两种能力对于 21 世纪的建设者和数学教育工作者来说都是不可缺少的。本套《数学分析》改革教材就是为培养数学专业的学生的这两种能力而编写的面向 21 世纪的改革教材。

我们把数学专业传统的《数学分析》内容分成了“实用

微积分"和"实分析基础"两个侧重点不同的部分。前者重应用,后者重理论。前者是在传统的《高等数学》教材的基础上吸收了美、英等发达国家现行数学教育中重视直观、强调应用的思想及其相关的知识内容,整个知识内容以数学建模为主线,体现学以致用的思想,主要培养学生学数学并用数学去解决实际问题的能力,提高学生对数学的兴趣,巩固学生的专业思想;后者,保持传统《数学分析》的理论优势,以严密的、抽象的分析理论为主,以此培养学生严密抽象的数学思维能力和逻辑思维能力。对于数学专业的本科学生,如果教师讲授完第1部分以后再讲授第2部分,不但实现了传统《数学分析》的难点后置,而且在理论要求没有降低的情况下渗透了数学建模的思想和内容。从而,把培养学生用数学解决实际问题的能力与培养学生严密抽象的数学思维能力放到了同等重要的地位。

教材的第一部分:实用微积分,也可以说是为理工科(非数学专业)的本科生编写的现行《高等数学》改革实验教材。它涵盖了现行《高等数学》教材中除解析几何和富里叶级数两章外的几乎所有内容。整个知识容量约为现行《高等数学》(同济大学主编)的1.2倍。由于我们配有与教材完全配套的电子教材(光盘),如果利用多媒体教室进行教学,教师不但有足够的能力和时间在现行《高等数学》的教学时数内完成教学任务,而且可由教师单方面传授知识的教学改为"讨论式"教学(学生在课堂上不再需要做详细笔记,学生的主要任务是专心听讲和参与课堂讨论)。

在编写过程中,我们参考了美国国家科学基金会花了上百万美元请美国哈佛大学 Deborah Hughes-Hallett 教授主持编写的《CALCULUS》教材。虽然,近些年来,美国有300余所大学采用他们编写的教材作为微积分课程的教科书,但是我们仍然认为他们的这部教材过于繁琐且缺乏份量。因此,我们仅仅吸收了他们重视应用、强调直观的基本思想以及他们的个别例题和习题。在编写过程中我们还参考了复旦大学、华东师范大学、吉林大学、武汉大学等学校编写的各版本《数学分析》教材以及同济大学数学教研室主编的《高等数学》和中央广播电视大学邵士敏、蒋定华编写的《高等数学讲义》等诸多高等数学教材。另外,也参考了许多《数学模型》和《数学建模》的教科书以及我们已经收集到的用微积分解决的实例。我们始终力求让传统"微积分"的内容与数学建模的思想内容有机的结合,使本教材自然而然地体现学数学的主要目的是用数学的思想、方法和知识内容解决实际中的各种问题。

本教材的第1部分除了配有教学光盘以外,还配有专为本课程服务的《实用微积分——上机手册》,其目的是让学生能在计算机上进行极限、求导、微分、不

定积分、定积分等运算以及函数作图。特别是“一元模型”(第 9 章)的“冰山运输问题”的模型求解,涉及到大量的数值计算,应该安排学生在计算机上亲自计算,从而使学生身临其景地感触数学与计算机有机结合对科学技术发展和社会进步将产生的巨大作用。

第 2 部分“实分析基础”,可以认为是“实用微积分”的后继课程。它的主要目的是让学生了解和掌握纯数学的基本思想和基本方法。这部分从实数系的结构出发,把“戴德金分割”作为实数的连续性公理,严格地按照逻辑顺序展示传统数学分析的基本理论。在编写过程中,我们力求做到严谨、准确、详尽、精练,力求使学生能够了解和体会到纯数学的基本思想和基本方法(公理系统的方法)。我们在教学实践中体会到,在用一年的时间学习第 1 部分之后,作为数学专业的二年级的大部分学生已经具有学好这部分内容的能力。而且不少学生在第 16 章至第 20 章的学习中有能力真切地体会到纯粹数学中的优美和精妙。

在整个教材的编写过程中,我们始终力求通俗直观,内容详尽,便于学生自学和课前预习。

本教材的初稿于 1995 年由朱培勇教授主笔开始编写,1996 年得到“世界银行贷款”的资助,其后又得到四川省重点课程建设项目的资助,1998 年世界银行贷款项目结题时完成整个初稿。其中:黄家琳副教授主写了“隐函数定理与映像性质”部分;张利平副教授主写了初稿中“数项级数和函数项级数”部分,并且对原有教学大纲进行了修改;张新华副教授最初起草第 16 章至第 20 章,后由朱培勇作了大量的修改并对一些章节进行了重写。在初稿编写过程中,我们在数学教育专业 95 级、96 级、97 级三个年级进行过对比实验:在每个年级的两个数学班情况相同的情况下,随机地挑选一个班作为教改实验班并且采用教材初稿和新的方法、手段进行教学。另一个班采用传统的教学方法进行教学。实验结果表明:实验班学生的学习兴趣和学习成绩比非实验班的要好许多,实验班学生在“全国大学生数学建模竞赛”中屡屡获奖。

2002 年 3 月初稿被选作为四川省高等师范院校数学专业《数学分析》教材的基本框架。为了使这新编的教材能适合于当前和今后较长时期内数学专业的数学分析课程以及理工科其他各个专业高等数学课程的教学需要,教材编写组的老师们在认真阅读教材初稿的基础上,先后召开了五次讨论会,然后根据编写组各位老师多年的教学经验以及我国加入 WTO 以后教材改革必须与国际接轨这一实际情况进行具体分工,对初稿进行增删修改,力求形成既吸收西方发达国家先进教育思想又保留我国传统《数学分析》理论优势的面向 21 世纪的改革实

验教材。经过教材编写组全体老师的共同艰苦努力，6 月份基本完成了各章节的编写工作。重写或修改工作具体分工情况如下：

“实用微积分”部分：唐再良 第 1 章至第 4 章，杨琼芬 第 5 章；陈顺清 第 6 章至第 8 章，张利平 第 9 章，王良成 第 10 章，曾意 第 11 章，田勉励 第 12 章，丁继忠 第 13 章，朱培勇 第 14 章。

“实分析基础”部分：王雄瑞 第 1 章，黄家琳 第 2 章至第 3 章，陈顺清 第 4 章至第 5 章，王良成 第 6 章，黄家琳 第 7 章，张勇 第 8 章。

最后，由朱培勇和黄家琳统稿完成整个教材编写工作。

在本教材的编写过程中，曾先后得到四川大学副校长刘应明教授(院士)、四川大学数学学院长江学者罗懋康教授、白东华教授以及电子科技大学计算机科学与工程学院博士生导师孙世新教授的极大支持和鼓励；四川师范大学数学学院院长张健教授、副院长李树勇教授以及自贡师专周仁庚教授对本教材的编写也给予了极大的帮助；同时也得到教材编写组成员所在单位的系主任以及分管教学的校(院)长和教务长的大力支持和鼓励。在此，我们对他们表示衷心地感谢。总之，我们诚挚地感谢每一位对本教材出版曾给予过关怀、鼓励、支持、帮助的同行和朋友，敬祝他们身体健康，事业更加辉煌！

教材编写组

2002 年 8 月 10 日

21 高等师范院校教材

数学分析

目　　录

实用微积分

实用微积分

第1章　函　　数

加、减、乘、除是初等数学中的四种基本运算，它们的运算对象是数（主要是整数、有理数和实数）. 与此对应，极限、微分（导数）、积分则是数学分析中的三大基本运算，它们的运算对象则是比数的含义更为广泛的一类数学对象——函数. 因此，函数的概念是《数学分析》中的基本概念.

本章将介绍函数的概念、表示法、基本特性以及幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数这五种基本初等函数，为今后的学习奠定必要的基础.

1.1　函数的概念

1.1.1　函数的概念

首先看一看下面几个例子.

例 1.1.1　某日某地区气温变化情况如图 1－1－1.

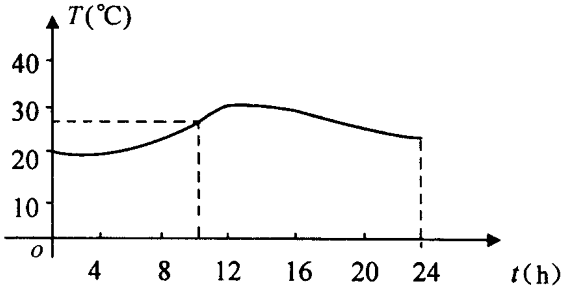

图 1－1－1

由图，我们可以看出：在任何时刻均有一定的温度. 例如早上 6:00（$t=6$）时，温度 $T=20$℃；中午 12:00（$t=12$）时，温度 $T=30$℃；下午 16:00（$t=16$）时，温度 $T=28$℃，即 t 在 0:00～24:00之间的每一个值依照图中的曲线都有惟

一确定的温度 T 与之对应.温度 T 随时间 t 的变化而变化.

例 1.1.2 我国城镇居民 1981—1989 年的个人平均收入和平均消费如表 1.1.1.

表 1.1.1

年份 t(a)	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
人均收入 x(元)	500	535	573	660	749	910	1012	1192	1388
人均消费 y(元)	457	471	506	559	673	799	884	1104	1211

注:表 1.1.1(摘自《中国统计年鉴》)

虽然,例 1.1.2 是一个表,但它与例 1.1.1 一样,t 每取 1981—1989 年之间的一个自然数,x 和 y 都分别有惟一确定的值与之对应.这种对应关系就是我们通常所称的函数.

定义 1.1.1 设 X,Y 是两个非空数集,如果存在 X 到 Y 的一个对应关系 f,使得对于 X 中每一个数 x,通过对应关系 f,Y 中都有惟一确定的数 y 与之对应,则我们称 f 是定义在 X 上的一个函数,记为

$$y=f(x)$$

称 X 为函数 $y=f(x)$ 的定义域,X 的所有数在 $f(x)$ 作用下的对应值的集合 $\{f(x):x\in X\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的值域. $y_0=f(x_0)$ 称为函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的函数值.

在函数关系 $y=f(x)$ 中,x 称为自变量,y 称为因变量,有时也简称 y 是 x 的函数.

由定义 1.1.1,无论是例 1.1.1 的图像,还是例 1.1.2 的表格都分别表示函数,如果我们用函数 $x=f(t)$ 和 $y=g(t)$ 分别表示例 1.1.2 人均收入和人均消费作为时间的函数,则

$$T=\{1981,1982,1983,\cdots,1989\}$$

是它们公有的定义域,$x=f(t)$ 的值域是

$$X=\{500,535,573,660,749,910,1012,1192,1388\},$$

而 $y=g(t)$ 的值域是

$$Y=\{457,471,506,559,673,799,884,1104,1211\}.$$

由函数定义可知,要决定一个函数必须知道函数的定义域和自变量与因变量之间的对应法则 f,这就是说,定义域和对应法则是确定函数的两个要素.因此,定义两个函数的相等和四则运算需要同时考虑这两个因素.

定义 1.1.2 设 $f(x)$与 $g(x)$都是定义于非空数集 X 的两个函数:

(1)如果对于一切 $x\in X$,有 $f(x)=g(x)$,则称函数 $f(x)$与 $g(x)$相等,记为$f(x)=g(x)$.

(2)函数 $f(x)$与 $g(x)$的和 $f(x)+g(x)$,差 $f(x)-g(x)$,积 $f(x)g(x)$,商$\dfrac{f(x)}{g(x)}$分别定义为

$$
\begin{aligned}
&(f+g)(x)=f(x)+g(x), && x\in X,\\
&(f-g)(x)=f(x)-g(x), && x\in X,\\
&(fg)(x)=f(x)g(x), && x\in X,\\
&\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, && x\in X-\{x\mid g(x)=0\}.
\end{aligned}
$$

注:①作为函数的特殊情况,数 $\lambda\in\mathbf{R}$(实数集)与函数 f 的乘法定义为

$$(\lambda f)(x)=\lambda f(x),x\in X$$

称为数乘.

②两函数 $f(x)$和 $g(x)$相等,则它们必须有相同的定义域并且在其定义域内每一点 x 有$f(x)=g(x)$.否则,$f(x)$和 $g(x)$是不相等的.例如:函数

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}\text{和}g(x)=x+1$$

是不同的两个函数,因为它们的定义域不同.例 1.1.2 中人均收入函数 $x=f(t)$和人均消费函数 $y=g(t)$的定义域相同,但对应关系不同,所以是不同的两个函数.

例 1.1.3 已知 $f(x)=\ln(1-x),g(x)=\sqrt{1-x^2}$,求$(f\pm g)(x)$,$(fg)(x)$,$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$.

解

$$
\begin{aligned}
&(f\pm g)(x)=\ln(1-x)\pm\sqrt{1-x^2}, && x\in[-1,1],\\
&(fg)(x)=\sqrt{1-x^2}\ln(1-x^2), && x\in[-1,1],\\
&\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\ln(1-x)}{\sqrt{1-x^2}}, && x\in[-1,1].
\end{aligned}
$$

1.1.2 函数的表示法

常见的函数表示法有图像法、表格法和公式法三种.

1.图像法

函数关系是由坐标平面上的图像给出的.例 1.1.1 中的温度相对于时间的

函数就是用图像法表示的.这种表示法直观、通俗、容易比较,例如:图 1-1-2(a)是健康人的心电图,通过图 1-1-2(b)与图 1-1-2(a)作比较,医生立即得知,心电图为图 1-1-2(b)的人有严重的心脏病.

(a) (b)

图 1-1-2

2.表格法

函数关系是由表格给出的.例 1.1.2 中人均收入函数 $x=f(t)$和人均消费函数 $y=g(t)$就是用表格法表示的函数.这种方法的优点是直观、精确,进行四则运算方便.

3.公式法

用方程的形式来表示的函数称为公式法表示的函数.例如:圆的面积 A 是半径 r 的函数,其关系式为

$$A=\pi r^2. \tag{1}$$

又如:在自由落体运动中,物体下落的距离 h 是时间 t 的函数

$$h=\frac{1}{2}gt^2. \tag{2}$$

公式法的优点是便于数学上的分析和运算(四则运算、微积分运算).本课程所讨论的各种运算的对象主要是用公式法表示的函数.

例 1.1.4 一辆出租车从甲城出发经乙城到丙城,速度为常速度 v.已知甲城和丙城相距 98km,丙城和乙城相距 46km.试用公式法建立出租车离乙城的距离相对于时间的函数关系(假设 $t=0$ 时,出租车从甲城出发),并画出函数的图形.

解 因为速度 v 是常数,所以是匀速运动;甲城到乙城所需时间为$\frac{52}{v}$,甲城到丙城所需时间为$\frac{98}{v}$,车离乙城的距离为

$$S(t)=\begin{cases}52-vt, & 0\leqslant t\leqslant \dfrac{52}{v},\\ v\left(t-\dfrac{52}{v}\right), & \dfrac{52}{v}<t\leqslant \dfrac{98}{v}.\end{cases}$$

$S(t)$的图形见图 1－1－3.

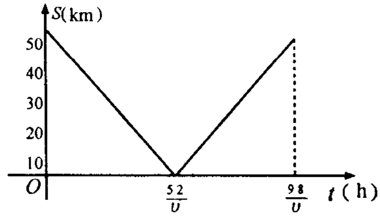

图 1－1－3

这种在不同的定义域范围内函数的表达式不一样的函数叫做分段函数，下列三个函数也是分段函数.

例 1.1.5 (1)符号函数(见图 1－1－4).

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

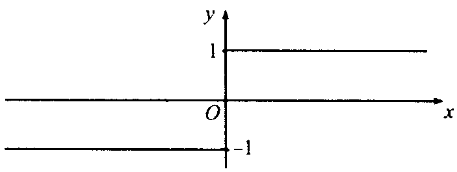

图 1－1－4

(2)狄利克莱函数(Dirichlet，德国，1805—1895 年)

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

此函数的图形无法准确的描出，但图形是可以想象的(见图 1－1－5).

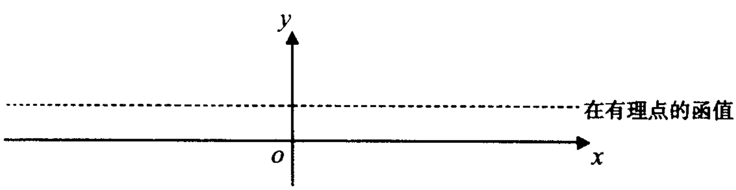

图 1－1－5