高等代数概要

湖南　江苏　四川　云南
广西　河南　安徽　广东　湖北

教育学院数学系编

湖南大学出版社

内 容 提 要

本书对高等代数的基本内容作了概括，配备了适当数量有代表性的例题及难易适度的习题，书后附有习题解答概要，可帮助读者加深对教材内容的理解和提高解题能力.

本书可作为教育学院数学专业二年制本科高等代数教材使用，也可供高等院校学生，中学教师和广大自学青年应试之用.

高 等 代 数 概 要

湖 南 等 九 省 教 育 学 院 合 编

*

湖 南 大 学 出 版 社 出 版 发 行

湘 潭 市 东 平 印 刷 厂 印 刷

*

787×1092毫米　32开本　9印张　210千字

1986年4月第一版　1986年4月第一次印刷

统一书号 13412·2　定价2.00元

说　明

根据教育学院数学专业二年制本科教学的特点和需要，湖南、江苏、四川、云南、广西、河南、安徽、广东、湖北（以编写章号为序）九省教育学院协作编写了这本《高等代数概要》。本书对高等代数的基本内容作了概括，配备了适当数量有代表性的例题及难易适度的习题，并书后附有习题答案、解答、提示，可帮助读者加深对教材内容的理解和提高解题能力。

本书可作为教育学院数学专业二年制本科高等代数教材使用；也可供大学低年级学生配合高等代数教材使用；其中的基本例题和习题可作为准备报考教育学院数学专业二年制本科的中学教师的复习资料；同时也是高师函授生的一本辅导书。

湖南教育学院数学系陈贻泽副教授起草了该书的编写提纲。参加本书第一章至第九章编写的同志，依次是魏宗宣、朱忠南、尤华兴、杨文泽、孙洁、郭豪、滕德贵、钟育光、张朝康。最后由陈贻泽和魏宗宣统稿、定稿。

在此书的编写过程中，得到了前面所提九省教育学院领导的热情支持。在此，表示衷心的感谢。

限于我们的业务水平和教学经验肤浅，书中缺点错误难免，谨请读者批评指正。

编　者

一九八五年十二月

目　录

第一章　多　项　式

多项式是高等代数的一个重要组成部分。本章讨论多项式的基本性质、整除性理论、多项式的分解、多项式的根以及对称多项式等。

一、n元多项式的定义、运算和基本性质

1. 数环与数域

设S是复数集C的一个非空子集，如果对于S中任意两个数，b来说，$a+b$，$a-b$，ab都在S内，那么就称S是一个数环。任何数环都包含零环$\{0\}$。

设F是一个数环，F含有非零数，并且对于a，$b\in F$，$b\neq 0$有$a/b\in F$，则称F是一个数域。任何数域都包含有理数域Q。

2. n元多项式的定义

数环R上一个文字x的多项式或一元多项式指的是形式表达式

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m, \tag{1}$$

这里m是非负整数，a_0，a_1，$\cdots$，a_m为R中的数。

在多项式（1）中，a_0叫做零次项或常数项，a_ix^i叫做i次项，a_i叫做i次项的系数。如果$a_m\neq 0$，则a_mx^m叫做（1）的最高

次项或首项，非负整数m称为（1）的次数。一元多项式常用$f(x)$，$g(x)$，…表示。$f(x)$的次数记为$\partial^0(f(x))$。

若数环R上两个一元多项式$f(x)$和$g(x)$有完全相同的项或只差一些系数为零的项，则说$f(x)$与$g(x)$相等，记为$f(x)=g(x)$。

令x_1，…，x_n是n个文字，形如$ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$的表示式，其中$a$是数环$R$中的元素，$k_1$，…，$k_n$是非负整数，叫做$R$上$x_1$，$x_2$…，$x_n$的一个单项式，数$a$叫做这个单项式的系数。若$a\neq 0$，则$k_1+k_2+\cdots+k_n$叫做这个单项式的次数。

有限个单项式用加号连接起来而得到的一个形式表达式

$$(2)\qquad a_1x_1^{k_{11}}x_2^{k_{12}}\cdots x_n^{k_{1n}}+a_2x_1^{k_{21}}x_2^{k_{22}}\cdots x_n^{k_{2n}}+\cdots$$
$$+a_sx_1^{k_{s1}}x_2^{k_{s2}}\cdots x_n^{k_{sn}},$$

这里$a_i\in R$，k_{ij}是非负整数，叫做R上n个文字x_1，x_2，…，x_n的一个多项式，简称R上一个n元多项式。常用$f(x_1, x_2\cdots, x_n)$，$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$…表示R上n个文字x_1，x_2，…，x_n的多项式。n元多项式$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的次数，指的是这个多项式中一切系数非零的项的次数中最大者，仍记为$\partial^0(f)$。

$ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$和$bx_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$叫做同类项，如果$k_i=l_i$，$i=1$，…，$n$。

数环R上两个n元多项式说是相等的，当且仅当它们有完全相同的项，或只差一些系数为零的项。

系数全为零的多项式称为零多项式，记作0，零多项式无次数。

注意　一元多项式是n元多项式中$n=1$的特殊情形。

3. n元多项式的运算

1） 加、减法

设$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$和$g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$是数环$R$上两个多项式，且$m\leqslant n$。定义

$$f(x)\pm g(x)=(a_0\pm b_0)+(a_1\pm b_1)x+\cdots$$
$$+(a_m\pm b_m)x^m+\cdots+(a_n\pm b_n)x^n$$

这里当$m<n$时，取$b_{m+1}=\cdots=b_n=0$。

数环R上两个n元多项式$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$与$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的和（差）指的是把分别出现在这两个多项式中对应的同类项的系数相加（减）所得到的n元多项式，记作$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\pm g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，或简记作$f\pm g$。

2） 乘法

$$f(x)g(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_{n+m}x^{n+m}$$

这里$c_k=a_0b_k+a_1b_{k-1}+\cdots+a_{k-1}b_1+a_kb_0$，$k=0, 1, \cdots, n+m$。

令f，g是R上n个文字$x_1, x_2, \cdots, x_n$的多项式，把f的每一项与g的每一项相乘，然后把这些乘积相加（合并同类项）而得到的一个n元多项式叫做f与g的积，记作fg。

4. n元多项式的运算适合以下算律

1） 加法交换律 $f+g=g+f$

2） 加法结合律 $(f+g)+h=f+(g+h)$

3） 乘法交换律 $fg=gf$

4） 乘法结合律　　$(fg)h=f(gh)$

5） 分配律　　$(f+g)h=fh+gh$

这里f，g，h为R上n个文字x_1，x_2，…，x_n的多项式。

6） 次数公式

设f，g是R上两个非零的n元多项式，且$f+g\neq 0$，则$\partial^0(f+g)\leq max\{\partial^0(f), \partial^0(g)\}$，$\partial^0(fg)=\partial^0(f)+\partial^0(g)$。

7） 消去律

设f，g，h是x_1，x_2，…，x_n的多项式，且$h\neq 0$，则由$fh=gh$有$f=g$。

5. n元多项式相等的另一刻划

定理 1.1 设$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是数环R上一个n元多项式，如果对任意$(c_1, c_2, \cdots, c_n)\in R^n$都有

$$f(c_1, c_2, \cdots, c_n)=0,$$

那么$f(x_1, x_2, \cdots x_n)=0$。

由此可见，若$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$与$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是数环R上n元多项式，且对任意$(c_1, c_2, \cdots, c_n)\in R^n$都有

$$f(c_1, c_2, \cdots, c_n)=g(c_1, c_2, \cdots, c_n)$$

那么　$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。

例 1 设$R=\{a+bi|a, b为任意整数\}$，则R是否作成数环？数域？

解 显然$0\in R$，任取$a+bi$，$c+di\in R$，则对a，b，c，d进行加减乘后仍为整数，并且易知R对加法、减法、乘法是封闭

的。故R作成一个数环。

因为 $-2+3i$，$2i\in R$，但 $(-2+3i)/2i=3/2+i\notin R$，即R对除法不封闭，故R不能成为数域。

例 2 设F_1与F_2是两个数域。证明：$F_1\cup F_2$作成数域的充要条件是$F_1\subseteq F_2$或$F_2\subseteq F_1$。

证 设$F_1\cup F_2$是数域。若 $F_1\nsubseteq F_2$，则有 $a\in F_1$，但 $a\notin F_2$。任取$x\in F_2$，则$x\in F_1\cup F_2$，由$F_1\cup F_2$为数域知 $a+x=b\in F_1\cup F_2$，从而 $b\in F_1$ 或 $b\in F_2$。但若$b\in F_2$，则 $a=b-x\in F_2$，矛盾。于是只有$b\in F_1$，$x=b-a\in F_1$。因此$F_2\subseteq F_1$。

设$F_1\subseteq F_2$或$F_2\subseteq F_1$，则 $F_1\cup F_2=F_2$或$F_1\cup F_2=F_1$，均为数域。

例 3 设$f(x)$，$g(x)$为数环R上的多项式，且

$$h^2(x)+(1-x)f^2(x)+(2-x)g^2(x)=0, \tag{1}$$

$$h^2(x)+(-1-x)f^2(x)+(-2-x)g^2(x)=0. \tag{2}$$

证明：$f(x)=g(x)=h(x)=0$。

证 由（1）减去（2），得

$$f^2(x)=-2g^2(x). \tag{3}$$

由（2）加（1），并注意到（3），得

$$h^2(x)=-xg^2(x). \tag{4}$$

假设$g(x)\neq 0$，则$\partial^0(h^2(x))=1+\partial^0(g^2(x))$。此式左边为偶数，右边为奇数，矛盾。故$g(x)=0$。再由（3）、（4）知$f(x)=0$，$h(x)=0$。

习　　题 1.1

1. 证明，若数环$S\neq\{0\}$，则S含有无限多个数。

2．证明，$F=\{a+bi|a, b\in Q\}$是数域．

3．证明，$S=\{m/2^n|m$为任意整数，n为任意非负整数$\}$是一个数环．问S是不是数域？

4．证明，两个数环的交是数环．问两个数环的并是不是数环？

5．设$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$都是实数域上的多项式．证明，若$f^2(x)=xg^2(x)+xh^2(x)$，则$f(x)=g(x)=h(x)=0$．

6．证明，$1-x+\dfrac{x(x-1)}{2!}-\cdots+(-1)^n$

$$\frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}=(-1)^n\frac{(x-1)\cdots(x-n)}{n!}.$$

7．设$f(x)=ah(x)+(x-a)k(x)$，$h(x)\neq 0$，$k(x)\neq 0$，且$g(x)=(x-a)^m h(x)$，$m\geqslant 1$，$\partial^0(f(x))<\partial^0(g(x))$，$a\neq 0$．证明，$\partial^0(k(x))<\partial^0(h(x))+m-1$．

8．写出一个数域F上三元三次多项式的一般形式（用多重指标的记号）．

9．若n元多项式$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$各项都有同一次数r，则称它是一个r次齐次多项式，简称r次齐式．如果$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是一个r次齐式，t是任意数，证明$f(tx_1, tx_2, \cdots, tx_n)=t^r f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$．

10．设$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是数域F上一个n元齐次多项式．证明，如果$f=gh$，那么g与h也是n元齐次多项式．

二、整数的整除性和多项式的整除性

因为整数环Z和数域F上的一元多项式环$F[x]$都是具有带余除法和另一个基本共性的特殊环（在近世代数中叫做欧氏环），它们的整除性理论是完全平行的，所以我们把它们放在一起复习，便于掌握。

1. 整除的概念

设a，b是两个整数，若存在一个整数c，使$b=ac$，则说a整除b，记为$a|b$。这时a称为b的一个因数，b叫做a的一个倍数。若a不整除b，则记为$a\nmid b$。

设$f(x)$和$g(x)$是数域F上多项式环$F[x]$的两个多项式，若存在$F[x]$的一个多项式$h(x)$，使$g(x)=f(x)h(x)$，则说$f(x)$整除$g(x)$，记为$f(x)|g(x)$。这时$f(x)$叫做$g(x)$的一个因式，$g(x)$叫做$f(x)$的一个倍式。若$f(x)$不整除$g(x)$，则记为$f(x)\nmid g(x)$。

2. 整除的基本性质

1）整数的

1° $a|b$，$b|c \Rightarrow a|c$；

2° $a|b$，$a|c \Rightarrow a|(b\pm c)$；

3° $a|b$，c为任意整数$\Rightarrow a|bc$；

4° $a|b_i$，c_i为任意整数$\Rightarrow a|(b_1c_1\pm\cdots\pm b_nc_n)$；

5° 每个整数都可被±1整除；

6° 每个整数a都可被它自己和$-a$整除；

7° $a|b$且$b|a \Rightarrow a=b$，或$a=-b$。

2）多项式的

1° $f(x)|g(x)$，$g(x)|h(x) \Rightarrow f(x)|h(x)$；

2° $f(x)|g(x)$，$f(x)|h(x) \Rightarrow f(x)|(g(x) \pm h(x))$；

3° $f(x)|g(x)$，$h(x)$为任意多项式$\Rightarrow f(x)|g(x)h(x)$；

4° $f(x)|g_i(x)$，$h_i(x)$为任意多项式$\Rightarrow f(x)|(g_1(x)h_1(x) \pm \cdots \pm g_n(x)h_n(x))$；

5° 每个多项式都可被零次多项式（即F中非零数）整除；

6° 每个多项式 $f(x)$都能被$cf(x)$整除，这里c为F中非零数；

7° $f(x)|g(x)$，$g(x)|f(x) \Rightarrow f(x)=cg(x)$，这里 $c \in F$且$c \neq 0$。

3. 带余除法

定理1.2 设 a，b是任意两个整数，且$b \neq 0$，则存在唯一的整数q和r，使

$$a=bq+r,\ 0 \leqslant r<|b|.$$

定理1.3 设 $f(x)$，$g(x) \in F[x]$，且$g(x) \neq 0$，则存在$F[x]$中唯一的多项式$q(x)$和$r(x)$，使

$$f x)=g(x)q(x)+r(x),\ r(x)=0\text{或}\partial^\circ(r(x))<\partial^\circ(g(x)).$$

4. 最大公因式（数）的概念

若整数 c 整除整数a_1，a_2，…，a_n中的每一个，则把 c 叫做a_1，a_2，…，a_n的一个公因数，若a_1，a_2，…，a_n的一个公

因数d能被这n个整数的任一公因数整除，则d叫做a_1，a_2，…，a_n的一个最大公因数。

任意n个不全为0的整数a_1，a_2，…，a_n的最大公因数是存在的，且除符号外是唯一确定的。我们把其中的正数记为$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$。

若多项式$h(x)$整除多项式$f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_n(x)$中的每一个，则把$h(x)$叫做$f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_n(x)$的一个公因式。若$f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_n(x)$的一个公因式$d(x)$能被这n个多项式的任一公因式整除，则$d(x)$叫做$f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_n(x)$的一个最大公因式。

任意n个不全为0的多项式$f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_n(x)$的最大公因式是存存的，且除零次多项式外是唯一确定的。我们把其中最高次项系数为1的那个最大公因式记作$(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))$，或简记为$(f_1, f_2, \cdots, f_n)$。

5. 最大公因式（数）的重要性质

定理 1.4　n个整数a_1，a_2，…，a_n的公因数d是它们的最大公因数的充要条件是存在整数u_1，u_2，…，u_n，使$a_1u_1+a_2u_2+\cdots+a_nu_n=d$。

定理 1.5　$F[x]$的多项式$f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_n(x)$的公因式$d(x)$是它们的最大公因式的充要条件是存在$F[x]$的多项式$u_1(x)$，$u_2(x)$，…，$u_n(x)$，使$f_1(x)u_1(x)+f_2(x)u_2(x)+\cdots+f_n(x)u_n(x)=d(x)$。

6. 互素

若$(a_1, a_2, \cdots, a_n)=1$，则说$a_1$，$a_2$，…，$a_n$互素。若$a_1$，$a_2$，…，$a_n$中每两个都互素，则说$a_1$，$a_2$，…，$a_n$两两互素。若$a_1$，$a_2$，…，$a_n$两两互素，则$(a_1, a_2, \cdots, a_n)=1$。

若$(f_1(x), \cdots, f_n(x))=1$，则说$f_1(x), \cdots, f_n(x)$互素。若$f_1(x), f_2, \cdots, f_n(x)$中每两个多项式互素，则说$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$两两互素。若$F[x]$的多项式$f_1(x)$, $f_2(x), \cdots, f_n(x)$两两互素，则$(f_1, f_2, \cdots, f_n)=1$。

推论 1.6 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)=1$的充要条件是存在数$u_1, u_2, \cdots, u_n$，使$a_1u_1+a_2u_2+\cdots+a_nu_n=1$。

推论 1.7 $(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))=1$的充要条件是存在$F[x]$的多项式$u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)$，使$f_1(x)\cdot u_1(x)+f_2(x)u_2(x)+\cdots+f_n(x)u_n(x)=1$。

其他重要性质

1） 整数的

1° 若$(a, c)=1$，$(b, c)=1$，则$(ab, c)=1$。

2° 若$c|ab$，$(a, c)=1$，则$c|b$。

3° 若$b|a$，$c|a$，$(b, c)=1$，则$bc|a$。

2） 多项式的

1° 若$(f(x), h(x))=1$，$(g(x), h(x))=1$，则$(f(x)g(x), h(x))=1$。

2° 若$h(x)|f(x)g(x)$，$(f(x), h(x))=1$，则$h(x)|g(x)$。

3° 若$g(x)|f(x)$，$h(x)|f(x)$，$(g(x), h(x))=1$，则$g(x)h(x)|f(x)$。

7. 最大公因式的求法

命题 设$f(x)$，$g(x)\neq 0$是两个不全为零的多项式，若

$f(x)=g(x)q(x)+r(x)$，则 $(f(x),\ g(x))=(g(x),\ r(x))$。

由此可用辗转相除法求最大公因式：

若 $$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x),$$
$$g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x),$$
$$r_1(x)=q_3(x)r_2(x)+r_3(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$r_{s-2}(x)=q_s(x)r_{s-1}(x)+r_s(x),$$
$$r_{s-1}(x)=q_{s+1}(x)r_s(x)+0,$$

其中 $r_1(x)$，$r_2(x)$，…，$r_s(x)$ 均不为零，则

$$(f(x),\ g(x))=(g(x),\ r_1(x))=\cdots$$
$$=(r_{s-1}(x),\ r_s(x))=cr_s(x),$$

这里 c 为非零常数，且使得 $cr_s(x)$ 的首项系数为1。

例 4 假定 p 为素数，试证满足 $a^2=pb^2$ 的正整数 a，b 不存在。

证 假设有两个正整数 a 和 b 满足 $a^2=pb^2$，令 $d=(a,\ b)$，即 $a=da_1$，$b=db_1$，$(a_1,\ b_1)=1$，代入上式并消去 d^2，得 $a_1^2=pb_1^2$。于是 $p|a_1^2$，所以 $p|a_1$。令 $a_1=pa_2$，则有 $a_2^2p=b_1^2$，从而 $p|b_1$，因此 p 为 a_1 和 b_1 的公因数，与 $(a_1,\ b_1)=1$ 矛盾。所以使 $a^2=pb^2$ 的正整数 a，b 不存在。

例 5 令 $$f(x)=(x+1)^{3n}+(2x)(x+1)^{3n-1}+\cdots$$
$$+(2x)^{2n}(x+1)^n,$$

这里 n 为非负整数。证明，$x^{2n+1}|(x-1)f(x)+(x+1)^{3n+1}$。

证 利用整除的定义来证

$$\because\quad (x-1)f(x)=-(x+1)^n[(x+1)^{2n+1}-(2x)^{2n+1}]$$

$$=-(x+1)^{3n+1}+(2x)^{2n+1}(x+1)^n.$$

$\therefore\ (x-1)f(x)+(x+1)^{3n+1}=2^{2n+1}x^{2n+1}(x+1)^n$,

于是 $\quad x^{2n+1}\mid(x-1)f(x)+(x+1)^{3n+1}$.

例 6 问m，p，q满足什么条件时 x^2+mx-1 整除 x^3+px+q？

解 由带余除法知

$$x^3+px+q=(x-m)(x^2+mx-1)+(m^2+p+1)x+q-m.$$

则x^2+mx-1整除$x^3+px+q\Longleftrightarrow(m^2+p+1)x+q-m=0$ $\Longleftrightarrow m^2+p+1=0$且$m=q$。因此，当$p=-1-m^2$，$q=m$时，$x^2+mx-1$整除$x^3+px+q$。

例 7 令$f(x)$，$g(x)$为 $F[x]$ 中两个不全为零的多项式，且 $f(x)=d(x)f_1(x)$，$g(x)=d(x)g_1(x)$，这里的 $f_1(x)$，$g_1(x)\in F[x]$。证明，$d(x)$是$f(x)$与$g(x)$的一个最大公因式的充要条件是$(f_1(x),\ g_1(x))=1$。

证 设$d(x)$为$f(x)$与$g(x)$的一个最大公因式，则有$u(x)$，$v(x)$使$f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)$。因 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不全为零，故$d(x)\neq 0$，从而有$f_1(x)u(x)+g_1(x)v(x)=1$，即$(f_1(x),\ g_1(x))=1$。

若$(f_1(x),\ g_1(x))=1$，则有$u_1(x)$，$v_1(x)$使 $f_1(x)\cdot u_1(x)+g_1(x)v_1(x)=1$，于是$d(x)f_1(x)u_1(x)+d(x)g_1(d)\cdot v_1(x)=d(x)$，即$f(x)u_1(x)+g(x)v_1(x)=d(x)$，由此可见$f(x)$，$g(x)$的任一公因式都整除$d(x)$。又由假设$d(x)$是$f(x)$与$g(x)$的一个公因式，故$d(x)$为$f(x)$与$g(x)$的一个最大公因式。

例 8 设$f(x)$与$g(x)$是两个非零多项式，证明：

（1） 若对任意多项式$h(x)$由$f(x)\mid g(x)h(x)$都有$f(x)\mid$

$h(x)$，则 $(f(x), g(x))=1$。

（2） 若对任意多项式 $h(x)$ 由 $f(x)|h(x)$，$g(x)|h(x)$ 都可得到 $f(x)g(x)|h(x)$，则 $(f(x), g(x))=1$。

证 （1） 用反证法。假设 $(f(x), g(x))=d(x)$，$\partial^0(d(x))\geqslant 1$，则 $f(x)=d(x)f_1(x)$，$g(x)=d(x)g_1(x)$，这里的 $\partial^0(f_1(x))<\partial^0(f(x))$。于是 $g(x)f_1(x)=f(x)\cdot g_1(x)$，即 $f(x)|g(x)f_1(x)$，由题设 $f(x)|f_1(x)$，矛盾，故 $(f(x), g(x))=1$。

（2） 仿（1）可得 $f(x)|g(x)f_1(x)$，$g(x)|g(x)f_1(x)$，由题设 $f(x)g(x)|g(x)f_1(x)$。但 $\partial^0(f(x))>\partial^0(f_1(x))$，$\partial^0(f(x)g(x))>\partial^0(g(x)f_1(x))$，则 $f(x)g(x)\nmid g(x)\cdot f_1(x)$，矛盾，故 $(f(x), g(x))=1$。

例 9 证明，$(f(x), g(x))=1 \Longleftrightarrow (f(x), f(x)+g(x))=1$。

证 若 $(f(x), g(x))=1$。令 $(f(x), f(x)+g(x))=d(x)$，则 $d(x)|f(x)$，$d(x)|(f(x)+g(x))$，于是 $d(x)|g(x)$，但 $(f(x), g(x))=1$，故 $d(x)=1$。

若 $(f(x), f(x)+g(x))=1$，则有 $u(x)$，$v(x)$，使

$$f(x)u(x)+[f(x)+g(x)]v(x)=1,$$

即

$$f(x)[u(x)+v(x)]+g(x)v(x)=1,$$

因此，$(f(x), g(x))=1$。

例10 证明，$(f(x), g(x)h(x))=1$，$\Longleftrightarrow (f(x), g(x))=1$，$(f(x), h(x))=1$。

证 设 $(f(x), g(x)h(x))=1$，则有 $u(x)$，$v(x)$ 使

$$f(x)u(x)+g(x)h(x)v(x)=1.$$