21世纪高等院校教材

图论

王树禾 编著

科学出版社
www.sciencep.com

21 世纪高等院校教材

图　　论

王树禾　编著

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书系统阐述图论与算法图论的基本概念、理论、算法及其应用，建立图的重要矩阵与线性空间，论述计算复杂度理论中的 NP 完全性理论和著名的一些 NPC 问题等.

本书概念明确、立论严谨，语言流畅生动，注重算法分析及其有效性；内容全面深入，可读与可教性强，是一部理想的图论基础性著作.

本书读者对象为高等院校应用数学、计算机科学、信息与网络等专业的大学生与研究生，以及科研工作者与图论爱好者.

图书在版编目(CIP)数据

图论/王树禾编著. —北京：科学出版社，2004

21 世纪高等院校教材

ISBN 7-03-012423-5

Ⅰ.图… Ⅱ.王… Ⅲ.图论－高等学校－教材 Ⅳ.O157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 101540 号

责任编辑：杨 波/责任校对：宋玲玲

责任印制：安春生/封面设计：黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004 年 1 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2004 年 1 月第一次印刷 印张：15 1/4

印数：1 —4 000 字数：287 000

定价： 23.00 元

前　言

图论是离散数学的骨干分支,离散数学则是计算机科学技术与网络信息科学的思想基础.多年来,为了实现高速计算的目的,数学促进了计算机科学的形成与发展.例如图灵机的数学理论为计算机的诞生打下了基础;另一方面,随着计算机科学在社会发展中作用的日益提升,它又反过来促进数学的发展.例如 1976 年,伊利诺大学的 Appel 和 Haken 用计算机证明了四色猜想成立.我国著名数学家吴文俊、张景中等用计算机进行了几何定理的机器证明,发展出一套成熟的机器证明的新理论与新方法.离散数学、特别是图论,近年来如异军突起般蓬勃发展,亦是数学与计算机科学交互作用的范例.图论与计算机科学结盟解决了有关离散事物的结构与关系当中定性与定量的各种优化问题.在信息科学与网络技术迅猛发展的时代背景之下,接受图论教育与进行图论研究成了众多相关的青年科学家与工程师的强烈追求.图论自身的美好形象,诸如它的强有力的逻辑,漂亮的图形,高明的数学技巧等等,也对每个爱好科学的年轻人产生了挥之不去的诱惑,在高等学校的教学当中,图论课成了广大学生和研究生争相选修的最受欢迎的热门课程之一.

学习图论,除了能使我们采用它的成果与方法之外,同样重要的是它能培养我们思考问题与解决问题的能力.图论中的问题,外表看似通俗简单,但往往含有非平凡的难度,每个学习研究图论的人在它面前必须全力以赴、严肃认真地思考问题,有时百思方得其解,有时则是百思仍不得其解的!例如四色猜想和 Ulam 猜想之类的老大难问题以及算法理论中的著名难题"P = NP 吗?",都是难到令人生畏的问题.事实上,我们尚未弄清楚它们是否需要超长证明而必须使用机器证明,或者数学科学尚未发展到可以用手和纸解决它们的阶段.

本书除了重视图论的基本理论与常用技巧之外,同时重视有效算法的设计和算法复杂度的分析;研究时间复杂度是本书的特色之一.本书作者不是构造主义者,但本书确乎主要采用了构造性的组合技术来解决问题,由于计算机的介入,构造性解法在当今数学当中日益受到青睐.

本书另一个特点是对预修课程的要求极少,几乎只靠加法、乘法和逻辑推理来解决问题,用了一些集合与线性代数的知识.当然,读者在使用本书时应该自觉地调动自己的聪明才智和数学悟性.本书每章都留有足够丰富和有趣的作业题,几乎每个题目皆无公式可循,必须由读者自主设计一种方法去解答;可以指望,通过图论的学习和习题与考试的磨炼,读者将会获得一种非本能的智慧和科学思维气质.

本书共分 11 章.如果作本科生教材,估计 80 到 100 学时可以授完全书.如果

受到课时限制，可以略去带＊号的内容，使得教学可以在 60 学时左右完成.

第一章回答图是什么和交代图论的最基本的概念. 从哥尼斯堡七桥问题谈起，通过四色猜想、Ulam 猜想、Hamilton 周游世界游戏、货郎问题、Ramsey 数、NPC 问题等数学史上的若干重要而有趣的问题的提出与初步分析，使读者获得对图论的直观认识，接着严格地给出图、同构、顶的次数、轨道、连通、圈、子图、完全图、二分图、三分图等最基本的定义，还用这些基本概念和方法，严格证明了拓扑学中重要的 Brouwer 不动点定理. 本章首次介绍“行为算法”的概念，从实际模型中介绍 Dijkstra 最短轨道问题和 Dijkstra 算法的规范表述，分析其有效性. 本章还编入了图上博奕的一些内容，体现出聪明竞争的数学思想.

第二章讲树. 内容包含树的定义和性质，生成树及其个数公式，求最佳生成树的 Kruskal 算法、有序二元树、Catalan 数、Huffman 树、树上密码和树上追捕等有趣的问题. 事实上，树是图的骨骼和标架，而且是图论难题的试金石，许多图论难题往往首先用树来试探它是否成立，然后再向一般图推广.

第三章讲平面图，得出平面图优美的 Euler 拓扑公式，介绍波兰数学家 Koratowsky1930 年建立的平面图的充分必要条件；利用 Euler 公式证明了正多面体恰有五种. 本章介绍了图论中最基本最有用的算法之一，即代号为 DFS 的纵深搜索算法，它的“能前进时且前进，行不通时则回头”的搜索精神是许多图论算法可以借鉴的基本思路. DFS 还可以求取图的割顶、块和极大强连通子图等关键部位，尤其重要的是 DFS 可以协助建立图的平面嵌入算法.

第四章讲匹配理论及其应用. 从 Hall 婚配问题谈起，建立了一系列有关匹配的定理，对二分图介绍了分工问题当中的最大匹配与最佳匹配的匈牙利算法.

第五章讲色的理论，它是图论中精彩纷呈又极其困难的内容. 介绍了边色数、顶色数、面色数、颜色多项式等重要概念. 讨论诸如排课表、安排全校考试、仓库设置与信道分配等重要实际问题的色数解法，以及脍炙人口的 4CC 和颜色多项式等引起历史上大数学家们的关注的理论问题. 4CC 已于 1976 年被美国数学家 Appel 和 Haken 等用计算机给出证明. 我们在书中介绍了他们的主要思想，即可约的不可避免集的思路以及“充电放电”技术，但手写的自然语言表述的 4 色定理的证明将来能否实现，仍是困扰数学家的难题之一.

本章还讲了四大“图数”：独立数、支配数、覆盖数和 Ramsey 数. 它们是图论中非常重要的数字指标，在信息传输等领域有重要应用.

第六章讲 Euler 图与 Hamilton 图的理论与应用. Euler 建立了有效地判定图是否是 Euler 图的充分必要条件，可惜对于 Hamilton 图至今尚无有效的判别法，没有建立起像样的 Hamilton 图的充分必要条件. 与 Euler 图有关的中国邮路问题已被匈牙利数学家 Edmonds 有效地解决了，但我们提出的多邮递员中国邮路问题却是一个 NPC 难题！在 Hamilton 图方面，一个首当其冲的问题是为货郎问题设计一

条耗时最少的售货路线,这一问题亦被证明是 NPC 中的一员.另外,还有许多有趣的关于 Hamilton 图的十分漂亮又十分难解的问题,例如 $n\times n$ 的"马图"上国际象棋马的遍历问题等等.

第七章讲有向图中的一些重要问题,包括尚未解决的所谓 $3x+1$ 问题,有向图的强连通性和可行遍性问题,有向 Hamilton 图问题,强连通竞赛图的泛圈定理,竞赛图中的有向 Hamilton 轨和王点等许多既有趣又有用的问题.

第八章讲述网络上的流函数,介绍求最大流的 2F 算法、Dinic 算法、有上下界的网络最大流的存在性和求法以及有供需要求的流的有效算法,并且证明了"双最定理",它是网络图论中的核心定理.

第九章讨论无向图与有向图的顶连通度与边连通度的概念,用网络流技术有效地求取顶连通度与边连通度,给出了一种边数最少的 n 顶 k 连通图的构造方法,建立 k 连通图的扇形结构与圈结构定理等,它们是网流流理论与技术的精彩应用.

第十章对于无向图与有向图,引入了若干重要矩阵,对于无向图在 0-1 二元域上建立了一些线性空间;用线性代数的方法对图进行定量研究,是图论由"看图说话"式的综合研究方法或曰"文词图论"向代数化方法过渡的重要标志;用矩阵演算进行了生成树数目的计算和从一顶到另一顶指定长的道路数目的计算等定量研究.

第十一章讲库克定理和 NPC 理论,对图论中的一些重要问题,严格证明了它们是 NPC 中的问题,例如团、独立集、覆盖集、色数、最大断集、Hamilton 轨、Hamilton 圈、货郎问题等都是 NPC 中的问题.

本章内容对数学与计算机科学有原则的重要性,要当做重点内容来教来学,务求深入理解.所给的 10 道作业题,至少要留一半让学生做出.

本书是以作者在中国科学技术大学的图论教学内容为蓝本,吸收参加历届教学的师生之反馈意见,顾及近年来科研与教学新形势之要求写成的,应当感谢中国科学技术大学各系听我主讲图论课的青年朋友们,在答疑和批改作业的过程当中,教学相长,从学生们活泼的解题细节和有趣的提问中受到许多启发,使本书从内容到表达方式上更适用于教学.还应感谢科学出版社对本书出版的重视和支持,至于书中现存的差错,盖因作者孤陋寡学所至,敬请读者批评指正.

王树禾
2003 年 1 月

目　　录

第一章　图

1.1　从哥尼斯堡七桥问题谈起

普瑞格尔河从古城哥尼斯堡市中心流过，河中有小岛两座，筑有七座古桥，如图 1.1. 哥尼斯堡市人杰地灵，市民普遍爱好数学. 1736 年，该市一位市民向大数学家 Euler 提出如下问题：

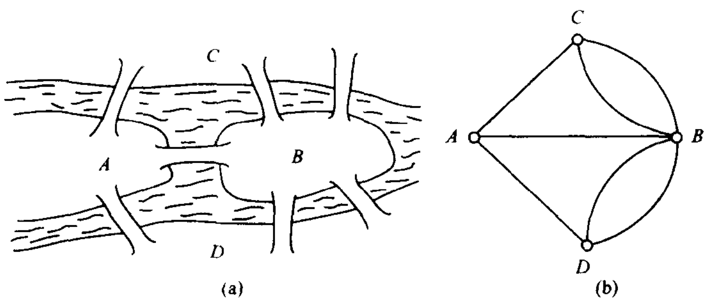


图 1.1

从家里出发，七座桥每桥恰通过一次，再回到家里，是否可能？

事实上，人们此前已经反复试验过多次，不论怎样游行，亦未成功地实现每桥恰过一次的旅行. 但又无人严格证明它.

Euler 把两岸分别用 C 与 D 两点来表示，两岛分别用 A 与 B 两点来表示. A，B，C，D 各点的位置无关紧要，仅当两块陆地之间有桥时，在上述相应的两点间连一曲线段，此曲线段的曲直长短也无关紧要，于是得到图 1.1 中的(b)图，Euler 把他画出的这个图形称为图(graph).

Euler 对七桥问题的回答是“否”. 他指出，如果家在 D 岸，图 1.1(b)中 D 点处有三条桥，游人通过其中之一离家出游，不久又经另一桥回到家，因为要求每桥恰过一次，所以他不得不经第三条与 D 相连的桥离家远行，这时他已无法过桥回家了，因为三条与他家相通的桥他已都各走过一次；对于家在别处的情形道理是相似的.

Euler 对七桥问题的抽象和论证思想，开创了图论(一维拓扑)的研究，1736 年是图论的元年，那一年 Euler 年仅 29 岁.

当时数学界并未对欧拉解决七桥问题的意义有足够的认识，甚至仅仅视其为一个数学游戏而已，图论诞生后并未及时获得足够的发展. 1936 年，匈牙利数学家柯尼希（König）出版《有限图与无限图理论》，这是图论的第一部专著，它总结了图论 200 年的成果，是图论发展的第一座里程碑. 此后，图论进入发展与突破的快车道，又经过半个多世纪的发展，现已成长为数学科学的一个独立的重要学科. 它的分支很多，例如图论、算法图论、极值图论、网络图论、代数图论、随机图论、模糊图论、超图论等等. 由于现代科技尤其是大型计算机的迅猛发展，使图论大有用武之地，无论是数学、物理、化学、天文、地理、生物等基础科学，还是信息、交通、战争、经济乃至社会科学的众多问题，都可以应用图论方法予以解决. 图论又是计算机科学最重要的基础之一.

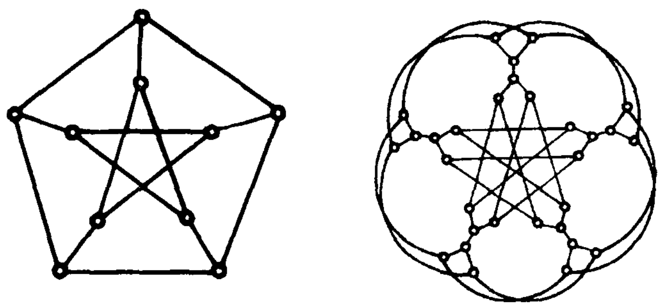
1976 年世界上发生了不少大事，其中有一件是美国数学家 Appel 和 Haken 在 Koch 的协作之下，用计算机证明了图论难题——四色猜想（4CC）：

任何地图，用四种颜色，可以把每国领土染上一种颜色，使邻国异色.

4CC 的提法和内容十分简朴，以至于可以向随便一个人（哪怕他不识字）在几分钟之内讲清楚. 1852 年英国的一个大学生格思里（Guthrie）向他的老师德·摩根（De Morgan）请教这个问题. 德·摩根是当时十分有名的数学家，他不能判断这个猜想是否成立，于是很快在数学界流传开来. 1879 年伦敦数学会会员 Kemple 声称证明 4CC 成立，且发表了论文，10 年后，Heawood 指出了 Kemple 证明中存在不可克服的漏洞，Heawood 沿用 Kemple 的方法证明了五色定理，即任何地图，用五种颜色一定能把各国领土染上一种颜色，且使邻国异色. Kemple 的方法十分巧妙，1976 年，Appel 说："Kemple 的证明中包含着一个世纪之后终于引出正确证明的绝大部分基本思想."

图论中有众多形象美丽而性质奇特的图，例如图 1.2 中的两个图，他们的每个点（以后称为顶点）处关联着三条线（以后称为边），用四种颜色可以把每条边涂上一种颜色，使得有公共端点的边异色，而用 3 种颜色办不到这些，切断三条边不会使它断裂成两个有边的图等一系列性质. 图论中称图 1.2 中的图为妖怪（snark graph），(a)称为单星妖怪，(b)称为双星妖怪，妖怪在这里是一个严肃的数学名词，由于这种性质的图极难设计出来，才起了这么一个十分贴切的名称.

1895 年，Hamilton 发明了一个所谓环球旅行的游戏，把这项发明的专利以 25 个金币的高价转让给一个玩具商. 据说使这位玩具商几个月的时间成了一位腰缠万贯的富豪，他的游戏设计如下：在一个正 12 面体的 20 个顶点上各标志一个城市，这些世界级大都市分别是北京、莫斯科、东京、柏林、巴黎、纽约、旧金山、伦敦、罗马、里约热内卢、布拉格、新西伯利亚、墨尔本、耶路撒冷、巴格达、上海、布达佩斯、开罗、阿姆斯特丹和华沙. 如果从一城市（例如从北京出发）沿正 12 面体的棱运行，每个上述的城市仅经过一次，再回到出发点（例如北京），则算旅行成功. 在本书



(a) (b)

图 1.2

第六章中我们将给出这一游戏的一种具体的旅游路线图，从这一游戏抽象出图论中一个极端重要的概念——Hamilton 图，且派生出一个价值连城的问题——货郎问题(traveling salesman)：

一位货郎担了百货到各村去卖货，为他设计一个售货路线，使他耗时最少.

如果用穷举的办法，例如有 20 个村子，其不同排序有 $\frac{1}{2}\times 20!$ 种，如果把每种排序的路程分别算出，再从中挑选出那个路程最小者，即使利用每秒千万次运算的计算机，亦需耗时百年以上，这种办法不可取. 令人无奈的是，百多年来，数学家们努力求解这一问题从未中断，至今尚未找到有效的(在合理的时间内)解决方法！这一问题是对数学和计算机科学的严重挑战.

在诸多图论难题当中，有一个叫做 Ramsey 数的问题格外引人注意. 直观地讲，就是问：任给一人群，其中有 k 个人彼此相识或有 l 个人彼此不相识，这种人群至少几人？ 这个答案记成 $r(k,l)$，称为 Ramsey 数，例如 $r(3,3)=6$，证明 $r(3,3)=6$ 并不难. 事实上，用六个点代表六个人，他们是 v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6，两人相识时，在两者之间连一条绿色边，否则连一条红边. 那么，由鸽笼原理，与 v_1 相连的五条边之中，必有三条是同色的，不妨设为 v_1v_2，v_1v_3，v_1v_4 是三条绿色边，考虑 $\Delta v_2v_3v_4$. 如果这个三角形上有一条绿边，则此绿边与 v_1 连接的两条绿边构成一个绿色三角形. 于是有三人彼此相识；否则 $\Delta v_2v_3v_4$ 是红色三角形. 于是有三人彼此不相识. 可见 $r(3,3)\leqslant 6$. 而 5 个人的人群，见图 1.3，可能既无绿色三角形亦无红色三角形的现象，图 1.3 中实线是绿色的，虚线是红色的，可见 $r(3,3)>5$；由

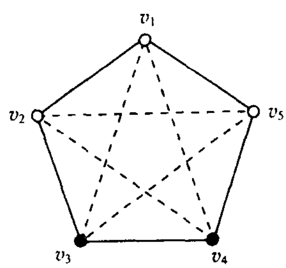


图 1.3

$r(3,3)\leqslant 6$，$r(3,3)>5$ 知 $r(3,3)=6$，即随便遇到的六个人之中必有三人彼此是熟人，否则会有三人谁也不认识谁. $r(3,4)=?$ $r(4,4)=?$ 等等，我们将在第五章给出一些较小的 Ramsey 数，但像 $r(5,5)$，$r(6,6)$ 等等那些未知的较大的 Ramsey 数的求得则是十分之困难的课题. 如果让我们求出 $r(100,100)$，这个题目已经难到令人绝望的程度，更不必说 $r(10000,10000)=?$ 了.

从上述的图论问题当中，我们发现图论中蕴含着强有力的思想、漂亮的图形和巧妙的论证，即使是非常困难的尚未解决的问题，它的表述也可能是平易近人的. 现实生活中处处可以发现图论难题，图论是最接近百姓生活、最容易阐述的一门数学分支，具有实质性的难度又有简朴的外表是很多图论问题的特点之一. 每位学过图论的人都有一种共同的体会，即在图论问题面前必须谨慎严肃地思考，它的证明往往需要极其繁琐的细节，稍不注意就会出现推理的漏洞，有时还需要精细的计算.

从 20 世纪 60 年代之后，图论的算法受到了更多的重视. 算法的有效性一直困惑着我们，例如，我们建立了求两个顶点间最短轨道的 Dijkstra 有效算法，却建立不起来求两顶间最长轨道的有效算法；我们也没有有效算法判别图的顶点是否全部处于一个圈上，没有有效算法确定能否用三种颜色对地图正常（邻国异色）着色. 在网络理论中，我们已经有有效算法，把商品在铁路上由产地最快地运往销地，但对两个工厂产的两种商品，分别运往各自的销地时，建立不了安排运输方案的有效算法，使得两个销地的需求同时得以满足，等等. 至今已积累了数以千计的实际问题，其数学模型是图论问题，但这些问题皆未建立起有效算法. 20 世纪 60 年代到 80 年代，Edmonds，Cook 和 Karp 等发现，这批难题有一个值得注意的奇特性质，其中一个问题如果存在有效算法，则这些形形色色风马牛不相及的问题都会有有效算法. 换句话说（悲观地讲）如果这些问题中有某个问题不存在有效算法，则不能指望这批问题中的任何一个存在有效算法了. 这批问题组成的集合记成 NPC，或称 NP-完全问题，数学与计算机科学的最大挑战之一就是回答 NPC 问题是否真的不存在有效算法?

1.2　图的基本概念

上一节我们已经对图有了一些直观的印象，从中可以总结出图的一般定义.

定义 1.1　称数学结构 $G=\{V(G),E(G),\psi_G\}$ 为一个图，其中 $V(G)$ 是非空集合，ψ_G 是从集合 $E(G)$ 到 $V(G)\times V(G)$ 的一个映射，则称 G 是一个以 $V(G)$ 为顶集合. 以 $E(G)$ 为边集合的有向图，$V(G)$ 中的元素称为图 G 的顶点，$E(G)$ 中的元素称为 G 的边，ψ_G 称为 G 的关联函数. 若 $\psi_G(e)=(u,v)$，$e\in E(G)$，$(u,v)\in V(G)\times V(G)$，则简写成 $e=uv$；称 u 是有向边 e 的尾，v 为有向边 e 的头. 若 $|V(G)|=\nu$，$|E(G)|=\varepsilon$，$\nu<+\infty$，$\varepsilon<+\infty$ 时，称 G 为有限图，否则为无

限图.

本书只讨论有限图.

为直观起见,我们把一个有向图如下画出它的图示:把 $V(G)$中的每个元素用几何点表示,点的位置可以任选,但两个顶点不要重合.当 $e=uv$ 时,把顶 u 与 v 这两点用箭头从 u 指向 v 的一条有向曲线连接起来,此曲线的长短与曲直不加考虑.用 $v_1,v_2,\cdots,v_\nu$ 分别表示各个顶点,用 $e_1,e_2,\cdots,e_\varepsilon$ 分别表示各条有向边;顶与边用字母标志了的图叫做标志图.

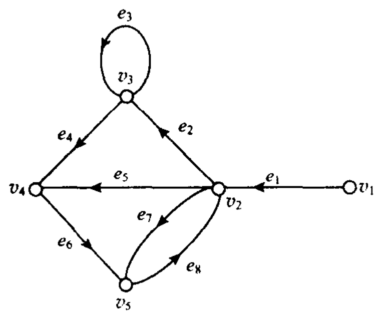


图 1.4

如果把有向图上的箭头取消,则得到无向图.

例 1.1 在图 1.4 中,

$$V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\},$$

$$E(G)=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8\},$$

$$\psi_G(e_1)=v_1v_2,\psi_G(e_2)=v_2v_3,\psi_G(e_3)=v_3v_3,\psi_G(e_4)=v_3v_4,$$

$$\psi_G(e_5)=v_2v_4,\psi_G(e_6)=v_4v_5,\psi_G(e_7)=v_2v_5,\psi_G(e_8)=v_5v_2.$$

如果图 1.4 中的箭头擦掉,则得一个无向图.

下面我们要不厌其烦地对图论的术语下定义.如果不写“有向”两个字,我们下面的图皆指无向图.

(1) 边的端点:$e=uv$ 时,称顶 u 与 v 是边 e 的端点.

(2) 边与顶相关联,若边 e 的端点是 u 与 v,则称 e 与 u,v 相关联.

(3) 邻顶:同一条边的两个端点叫做邻顶.

(4) 邻边:与同一个顶相关联的两条边叫做邻边.

(5) 环:只与一个顶相关联的边叫做环.

(6) 重边:$\psi_G(e_1)=\psi_G(e_2)=uv$,则称 e_1 与 e_2 是重边.

(7) 单图:无环无重边的图.

(8) 完全图:任二顶皆相邻的图,记之为 K_ν.图 1.5 是 K_5.

(9) 二分图:$V(G)=X\cup Y,X\cap Y=\varnothing$,且 X 中任二顶不相邻,Y 中任二顶不相邻,则称 G 为二分图;若 X 中每个顶皆与 Y 中一切顶相邻,则称 G 为完全二分图,记成 $K_{m,n}$,其中 $m=|X|,n=|Y|$.例如图 1.6 是 $K_{3,3}$.

(10) 星:$K_{1,n}$叫做星,如图 1.7.

(11) 完全 r 分图:$V(G)=\bigcup_{i=1}^{r}V_i$;$V_i\cap V_j=\varnothing,i\neq j$;当且仅当两个顶不在同

一个 V_i 中时($i=1,2,\cdots,r$),此二顶相邻,则称图 G 为 r 分图,记成 $K_{m_1,m_2,\cdots,m_r}$,其中 $|V_i|=m_i,i=1,2,\cdots,r$;若 $m_1=m_2=\cdots=m_r=m$,则记成 $K_{r(m)}$. 图 1.8 是 $K_{3(3)}$.

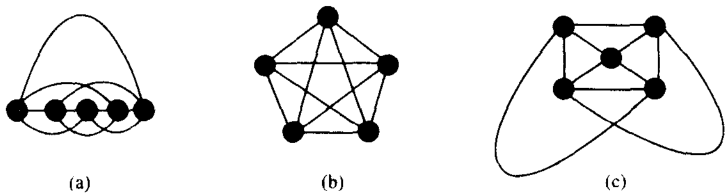


图 1.5　K_5

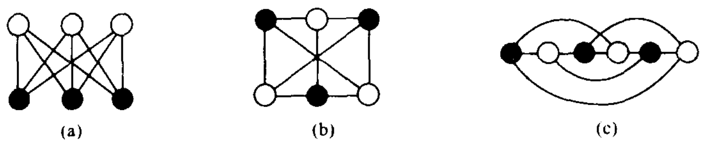


图 1.6　$K_{3,3}$

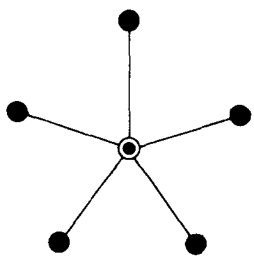


图 1.7　$K_{1,5}$

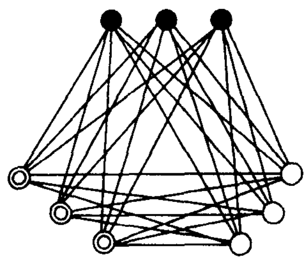


图 1.8　$K_{3(3)}$

(12) 顶 v 的次数:记成 $d(v)$,定义 $d(v)=d_1(v)+2l(v)$,其中 $d_1(v)$是与 v 相关联的非环边数,$l(v)$是与 v 相关联的环数.

例如,$K_{3,3}$中每顶皆 3 次,$K_{3(3)}$中每顶皆 6 次,K_ν 中每顶皆 $\nu-1$ 次. 由各顶次数可以算出图的边数.

定理 1.1(Euler,1736)　$\sum\limits_{v\in V(G)} d(v)=2\varepsilon$.

证 定义函数

$$\xi(v_i,v_j)=\begin{cases}1, & 当\ v_iv_j\in E(G),\\ 0, & 否则,\ i=1,2,\cdots,\nu,\ j=1,2,\cdots,\nu.\end{cases}$$

当 G 是单图时,

$$d(v_j)=\sum_{i=1}^{\nu}\xi(v_i,v_j),$$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\nu}d(v_j)&=\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\xi(v_i,v_j)\\&=\xi(v_1,v_1)+\xi(v_1,v_2)+\cdots+\xi(v_1,v_\nu)\\&\quad+\xi(v_2,v_1)+\xi(v_2,v_2)+\cdots+\xi(v_2,v_\nu)\\&\quad+\cdots+\xi(v_\nu,v_1)+\xi(v_\nu,v_2)+\cdots+\xi(v_\nu,v_\nu)=2\varepsilon,\end{aligned}$$

当图 G 不是单图时,只要把每一环与重边上"嵌入"一个新顶,则相似地可证出 $\sum\limits_{v\in V(G)}d(v)=2\varepsilon$. 证毕.

上述证明无非是"每边两个头",一共有 2ε 个线头儿的严格化.

推论 1.1 一图中奇次顶总数是偶数.

证 令 $V(G)=V_e\cup V_o$,其中 V_e 是偶次顶集合,V_o 是奇次顶集合,由定理 1.1,

$$\sum_{e\in V_e}d(v)+\sum_{v\in V_o}d(v)=2\varepsilon,$$

而 $\sum\limits_{v\in V_e}d(v)$ 是偶数,故 $\sum\limits_{v\in V_o}d(v)$ 亦为偶数. 但 V_o 中的次数 $d(v)$ 皆奇数,故 $|V_o|$ 必为偶数. 证毕.

例 1.2 晚会上大家握手言欢,试证握过奇次手的人数是偶数.

证 构作一图,以参加晚会的人为顶,仅当二人握手时,在相应的二顶间加一条边. 于是每人握手的次数即为所造的图的相应顶之次数. 由推论 1.1,奇次顶的个数是偶数,所以握过奇次手的人数为偶数. 证毕.

例 1.3 空间中不可能有这样的多面体存在,它的面数是奇数,而且每个面是奇数条线段围成的.

证 如果有这种多面体,以此多面体的面集合为顶集构造一个图 G,当且仅当两个面有公共边界线时,在相应的两顶间连一条边,于是 $|V(G)|$ 是奇数,而且 $d(v)$ 是奇数,$v\in V(G)$,从而 $\sum\limits_{v\in V(G)}d(v)$ 是奇数,与定理 1.1 相违. 故这种多面体不存在. 证毕.

例 1.4 碳氢化合物中氢原子个数是偶数.

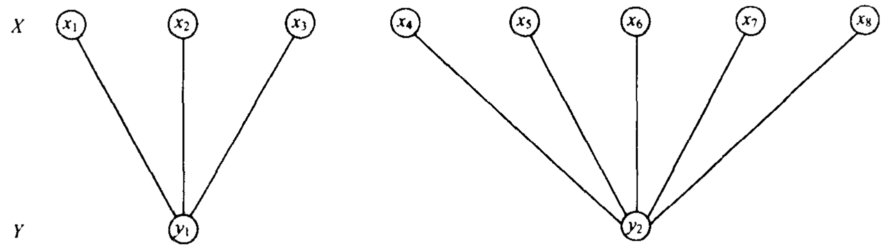
证 以每个碳原子与氢原子为顶,以每条化学键为边,则每个碳氢化合物的分子是一个图,且氢原子是一次顶,碳原子是4次顶,由推论1.1,分子中氢原子个数是偶数.证毕.

例1.5 大于7公斤的整公斤的重量都可以仅用一些3公斤和5公斤的两种砝码来称量.

证 只需证明对任意给定的自然数 $n \geqslant 8$,存在二分图 $G^{(n)}$,其 X 顶子集有 n 个顶点,每顶皆一次,Y 顶子集中的顶是3次或5次的.

下面用数学归纳法证明之.

当 $n=8$ 时,结论显然成立,见图(α).



图(α)

假设对于 $G^{(k)}$,结论已成立,$k \geqslant 8$.以下证明对 $G^{(k+1)}$,结论仍成立.为此,在 $G^{(k)}$ 的 X 顶子集中添加一顶 x_{k+1};由归纳法假设,在 $G^{(k)}$ 的 Y 中顶是3次或5次的,分以下情形讨论:

(i) 若 Y 中皆3次顶,取 y_1, y_2, y_3,将其重合成一个顶 y_{123},再于 y_{123} 与 x_{k+1} 之间连一条边,最后把 y_{123} 劈开成两个5次顶,则得满足要求的 $G^{(k+1)}$.

(ii) 若 Y 中有5次顶,设 $d(y_i)=5$,在 y_i 与 x_{k+1} 之间连一边,再把 y_i 劈开成两个3次顶,则得满足要求的二分图 $G^{(k+1)}$.证毕.

以后我们把 $d(v) \equiv k$ 的图叫做 k 次正则图,例如妖怪是三次正则图.我们也经常使用下面两个符号:

$$\delta = \min_{1 \leqslant i \leqslant \nu} \{d(v_i)\}, \ \Delta = \max_{1 \leqslant i \leqslant \nu} \{d(v_i)\}.$$

下面给出两个图同构的定义.

定义1.2 G 与 H 是两个图,存在可逆映射

$$\theta: V(G) \to V(H),$$

$$\varphi: E(G) \to E(H),$$

当且仅当 $\psi_G(e)=uv$ 时,$\psi_H(\varphi(e))=\theta(u)\theta(v)$,其中 ψ_G 是 G 的关联函数,ψ_H 是 H 的关联函数,则称图 G 与 H 同构,记成 $G \cong H$.