立体几何复习总表

黄自强编

上海科学技术出版社

立体几何复习总表
黄自强　编
上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路 450 号）
新华书店上海发行所发行　上海市印刷十二厂印刷
开本 787×1092　1/32　印张 1　字数 22,000
1985 年 10 月第 1 版　1985 年 10 月第 1 次印刷
印数：1—376,000

统一书号：13119·1280　　定价：0.21元

出 版 说 明

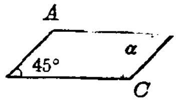
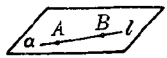
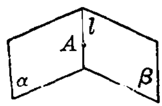
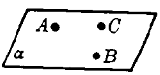
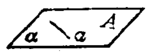
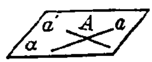
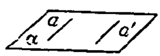
供中学生高中毕业总复习时参考的一套“中学数理化生复习一览图(对开)”出版后受到中学师生欢迎。为了便于读者个人携带和阅读，我们在“一览图”出版的基础上重新组织编写了这套“中学数理化生复习总表(小 32 开本)”，共九册(每册 32 页)，书名如下。我们希望这套“复习总表”能在读者复习迎考中起穿针引线、提纲挈领的作用。

代数复习总表
平面几何复习总表
平面三角复习总表
立体几何复习总表
平面解析几何复习总表
物理复习总表
化学复习总表
生物复习总表
生理卫生复习总表

立体几何

A. 直线与平面

平面的概念

<table>
<tr><td>表示法</td><td colspan="2">记为 平面α或平面AC</td><td>
</td></tr>
<tr><td>公理一</td><td colspan="2">若 点$A\in$直线l,又点$B\in l$,
且$A\in$平面α,$B\in$平面α,
则 $l\subset$平面α</td><td>
</td></tr>
<tr><td>公理二</td><td colspan="2">若 $A\in$平面α,$A\in$平面β,
则 平面$\alpha\cap$平面$\beta=l$且$A\in l$</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="3">公理三</td><td rowspan="3">若A、B、C三点不共线，则该三点可确定一个而且只有一个平面α

</td><td>若 $A\notin a$,
则 A, a确定一平面α</td><td>
</td></tr>
<tr><td>若 $a\cap a'=A$,
则 a, a'确定一平面α</td><td>
</td></tr>
<tr><td>若 $a\parallel a'$,
则 a, a'确定一平面α</td><td>
</td></tr>
</table>

例 1：求证空间四边形四边中点共面。

如图，已知空间四边形 $ABCD$；E，F，G，H 为 AB，BC，CD，DA 中点。

求证：E，F，G，H 四点共面。

证：连 BD，

∵ A，B，D 确定一平面。又

∵ E，H 分别是 AB，AD 中点，

∴ EH 在 $\triangle ABD$ 所在平面上。

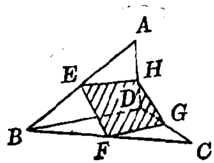
∴ $EH \parallel BD$。同理 $FG \parallel BD$，

∴ $EH \parallel FG$。

∵ 平行二线确定一个平面，

∴ E，F，G，H 在同一平面上，

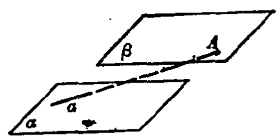
即空间四边形四边中点共面。



例 2：用反证法证明如果两个平面互相平行，那末在一个平面内的任何直线平行于另一个平面。

已知：平面 $\alpha \parallel$ 平面 β，$a \subset$ 平面 α，且 $a \not\subset$ 平面 β。

求证：$a \parallel$ 平面 β。



证：设 $a \nparallel$ 平面 β，则 a 必与平面 β 相交，设有一交点为 A，即 $A \in$ 平面 β。

∵ $a \subset$ 平面 α，

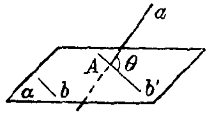
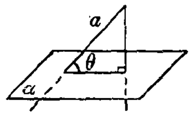
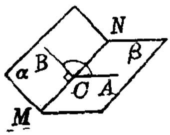
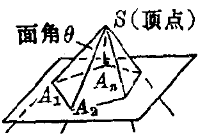
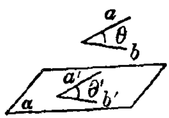
∴ $A \in$ 平面 α。

于是平面 α 与平面 β 有一公共点 A，这与平面 $\alpha \parallel$ 平面 β 这一已知条件相矛盾。

∴ a 不可能与平面 β 相交，且 $a \not\subset$ 平面 β。

∴ $a \parallel$ 平面 β。

空间角的概念

二异面直线 a, b 所成角 θ		如图，$b\subseteq$ 平面 α，$a\cap$ 平面 $\alpha=A$，过 A 作 $b'\parallel b$，a、b' 间的锐角 θ	
直线 a 与平面 α 所成角 θ		a 与它在平面 α 上射影之间的夹角 θ	
平面与平面所成角	二面角	记为 $\alpha-MN-\beta$，MN 为二面角的棱。如 $C\in MN$，且 $CA\perp MN$，$CB\perp MN$，$CA\subset$ 平面 β，$CB\subset$ 平面 α，则 $\angle ACB$ 为二面角 $\alpha-MN-\beta$ 的平面角	
	多面角	$S-A_1A_2\cdots A_n$ 面角如 θ，有 $\sum_{i=1}^{n}\theta_i<360°$	
对应边相互平行的角		$a\parallel a'$，$b\parallel b'$(对应边同向或异向)，且 $a'\subset$ 平面 α，$b'\subset$ 平面 α，则 $\angle\theta=\angle\theta'$(或 $\angle\theta=\pi-\angle\theta'$)	

例： 已知：$V—ABC$ 是直三面角，

$VA=VB=VC$。

求：(1) 异面直线 AV 与 BC 所成的角，

(2) BC 与面 VAB 所成的角，

(3) 平面 VAB 与平面 CAB 所成二面角的大小。

解： (1) $\because$ $V—ABC$ 是直三面角，

$\therefore$ $\angle CVA=\angle AVB=\angle CVB=90°$，

$\therefore$ $VA\perp$ 平面 VBC，

$\therefore$ $AV\perp BC$，

即异面直线 AV 与 BC 所成的角为 $90°$。

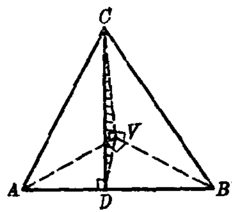
(2) $\because$ $CV\perp$ 平面 VAB，

$\therefore$ BV 是 BC 在平面 VAB 上射影，

$\therefore$ BC 与平面 VAB 所成的角为 $\angle CBV$。

$\because$ $VC=VB$，

$\therefore$ $\angle CBV=45°$。



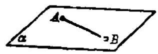
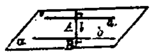
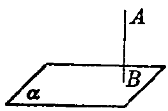
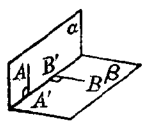
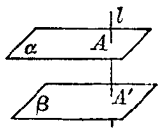
(3) 过 C 作 $CD\perp AB$，垂足为 D，连 VD 由三垂线逆定理知 $VD\perp AB$，

$\therefore$ $\angle CDV$ 为所求的二面角的平面角，

解 $Rt\triangle CVD$，

得 $\angle CDV=\mathrm{arctg}\sqrt{2}$。

空间距离的概念

两点之间的距离	连结空间两点之间线段的长度记作 $\lvert AB\rvert$	
点与直线之间的距离	过点 M 作直线 l 的垂线，若垂足为 A，则 $\lvert MA\rvert$ 为点 M 到直线 l 的距离	
平行线之间的距离	直线 $a \parallel b$ 若 $l\perp a$, $l\perp b$ 且 $l\cap a=A$, $l\cap b=B$ 则 $\lvert AB\rvert$ 为 a 与 b 之间的距离	
点 A 到平面 α 的距离 AB	作 $AB\perp$ 平面 α, $B\in$ 平面 α, B 称为垂足，又称为 A 在平面 α 上的射影	
异面直线 AA' 与 BB' 间的距离 $A'B'$	不同在任何一个平面内的两条直线叫做异面直线 若 $\alpha\cap\beta=A'B'$, $AA'\subset\alpha$, $BB'\subset\beta$ $A'B'\perp AA'$, $A'B'\perp BB'$	
平行平面间的距离 AA'	如果两个平面没有公共点，这两个平面就互相平行 $\alpha\parallel\beta$, $l\perp\alpha$, $l\perp\beta$ 且 $l\cap\alpha=A$, $l\cap\beta=A'$	

例：已知：正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱长 a。

求：(1) $D'B$ 与 AC 所成角；

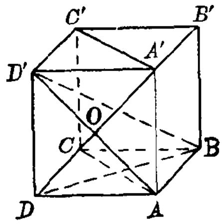
(2) $D'B$ 与平面 AC 所成角；

(3) 平面 $C'B$ 与平面 $C'A$ 所成角；

(4) 平面 $C'B$ 与平面 $D'A$ 间距离；

(5) $B'C'$ 到 AC 的距离；

(6) $D'C'$ 到 $A'D$ 距离。



解：(1) 连 BD，$\because BD\perp AC$，

由三垂线定理，得 $D'B\perp AC$，

$\therefore$ $D'B$ 与 AC 成 $90°$ 角。

(2) 由 $\mathrm{Rt}\triangle D'DB$ 知 $\angle D'BD=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

(3) 连 $A'C'$，

$\because$ $B'C'\perp CC'$，$A'C'\perp CC'$ 且 $\angle B'C'A'=45°$，

$\therefore$ 由二面角的平面角概念得平面 $C'B$ 与平面 $C'A$ 所成角为 $45°$。

(4) $\because$ $C'D'\perp$ 平面 $D'A$，又 $C'D'\perp$ 平面 $C'B$，

$\therefore$ 平面 $D'A$ 与平面 $C'B$ 间距离为 $D'C'=a$。

(5) $\because$ $CC'\perp B'C'$，$CC'\perp AC$

$\therefore$ $B'C'$ 到 AC 距离为 CC' 的长 a。

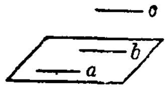
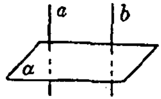
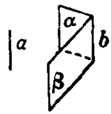
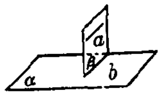
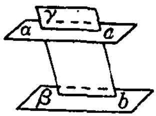
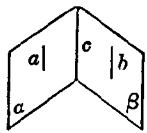
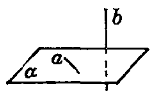
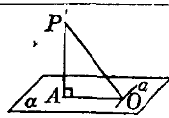
(6) 连 AD'，与 $A'D$ 交于 O，$\because DAA'D'$ 为正方形，

$\therefore$ $A'D\perp AD'$ 且 $D'O=\dfrac{1}{2}AD'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$。

又 $\because$ $C'D'\perp$ 平面 $A'D$，$\therefore$ $C'D'\perp AD'$，

$D'C'$ 到 $A'D$ 距离 $D'O=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$。

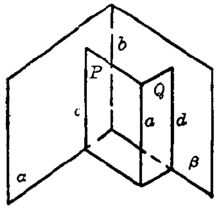
线与线的关系

线线平行的判定定理		若 $a \parallel c$，$b \parallel c$， 则 $a \parallel b$	
		若 $a \perp$ 平面 α，$b \perp$ 平面 α， 则 $a \parallel b$	
		若 平面 $\alpha \cap$ 平面 $\beta = b$，$a \parallel$ 平面 α， $a \parallel$ 平面 β， 则 $a \parallel b$	
		若 $a \parallel$ 平面 α，$a \subset$ 平面 β，平面 $\alpha \cap$ 平面 $\beta = b$， 则 $a \parallel b$	
		若 平面 $\alpha \parallel$ 平面 β，平面 $\gamma \cap$ 平面 $\alpha = a$， 平面 $\gamma \cap$ 平面 $\beta = b$， 则 $a \parallel b$	
		若 平面 $\alpha \cap$ 平面 $\beta = c$，$a \subset$ 平面 α， $b \subset$ 平面 β，且 $a \parallel b$， 则 $a \parallel b \parallel c$	
线线垂直判定定理		若 $a \subset$ 平面 α 又 $b \perp$ 平面 α 则 $b \perp a$	
	三垂线定理	若 $PA \perp$ 平面 α，AO 是 PO 在平面 α 上射影，$a \subset$ 平面 α，$a \perp AO$， 则 $a \perp PO$	
	逆定理	若 $a \subset$ 平面 α，且 $a \perp$ 斜线 PO， 则 $a \perp PO$ 在平面 α 上射影 AO	

例 1：已知：$a\parallel$ 平面 α，$a\parallel$ 平面 β，$\alpha\cap\beta=b$。

求证：$a\parallel b$。

证明：过 a 作平面 P 及平面 Q 使 $P\cap\alpha=c$，$Q\cap\beta=d$。

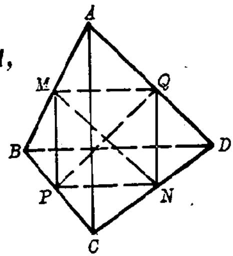


由
$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}a\parallel\alpha\\ a\subset P\\ P\cap\alpha=c\end{array}\right\}\Rightarrow a\parallel c\\ \text{同理}\Rightarrow a\parallel d\end{array}\right\}\Rightarrow c\parallel d\\ d\subset\beta\end{array}\right\}\Rightarrow c\parallel\beta\\ c\subset\alpha\\ \alpha\cap\beta=b\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}c\parallel b\\ c\parallel a\end{array}\right\}\Rightarrow a\parallel b$$

例 2：已知：四面体 $A—BCD$ 中 M、N、P、Q 分别为棱 AB、CD、BC、AD 中点且 $MN=PQ$。

求证：$AC\perp BD$，$AB\perp CD$，$AD\perp BC$。

证明：连 MQ，QN，NP，PM，由中位线定理知



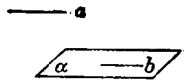
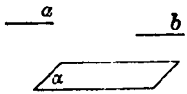
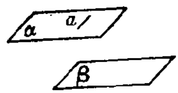
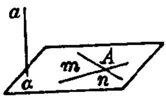
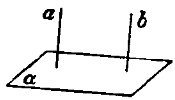
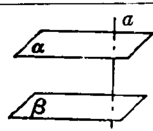
$$\left.\begin{array}{l}MQ\mathrel{\underline{\parallel}}\frac{1}{2}BD\\ NP\mathrel{\underline{\parallel}}\frac{1}{2}BD\end{array}\right\}\Rightarrow MQ\mathrel{\underline{\parallel}}NP$$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow MQNP\text{ 为平行四边形}\\ \text{由 }MN=PQ\end{array}\right\}\Rightarrow MQNP\text{ 为矩形}$$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow MP\perp PN\\ BD\parallel PN\\ AC\parallel MP\end{array}\right\}\Rightarrow AC\perp BD$$

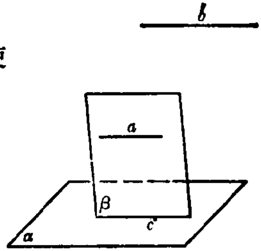
同理 $AB\perp CD$，$AD\perp BC$。

线与面的关系

<table>
<tr><td rowspan="3">线面平行判定定理</td><td>若 $a\not\subset$ 平面 α，$b\subset$ 平面 α，且 $a/\!/b$，
则 $a/\!/$ 平面 α</td><td></td></tr>
<tr><td>若 $a\not\subset$ 平面 α，$b\not\subset$ 平面 α 且 $a/\!/b$，
$a/\!/$ 平面 α，
则 $b/\!/$ 平面 α</td><td></td></tr>
<tr><td>若 平面 $\alpha/\!/$ 平面 β，$a\subset$ 平面 α，
则 $a/\!/$ 平面 β</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">线面垂直判定定理</td><td>若 $m\cap n=A$，$m\subset$ 平面 α，$n\subset$ 平面 α，且 $a\perp m$，$a\perp n$，
则 $a\perp$ 平面 α</td><td></td></tr>
<tr><td>若 $a/\!/b$ 且 $a\perp$ 平面 α，
则 $b\perp$ 平面 α</td><td></td></tr>
<tr><td>若 平面 $\alpha/\!/$ 平面 β，$a\perp$ 平面 α，
则 $a\perp$ 平面 β</td><td></td></tr>
</table>

例 1：已知：$a\parallel b$，$a\parallel$ 平面 α，$b\not\subset\alpha$。

求证：$b\parallel$ 平面 α。



证明：过 a 作平面 β 使

$\beta\cap\alpha=c$，

$$\text{由}\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} a\parallel\alpha \\ \alpha\cap\beta=c \end{array}\right\}\Rightarrow a\parallel c \\ \qquad\qquad\qquad a\parallel b \end{array}\right\}$$

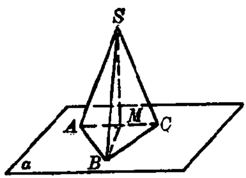
$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow b\parallel c \\ c\subset\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow b\parallel\alpha。$$

例 2：已知：Rt$\triangle ABC$ 中，M 是斜边 AC 中点，且 $SA=SB=SC$。

求证：$SM\perp$ 面 ABC。

证明：$$\text{由}\left.\begin{array}{r} SA=SC \\ AM=MC \end{array}\right\}\Rightarrow SM\perp AC$$

$$\text{连 } BM \text{ 由}\left.\begin{array}{r} \angle ABC=90^\circ \\ M\text{ 是 } AC\text{ 中点} \end{array}\right\}$$

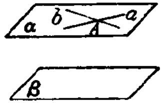
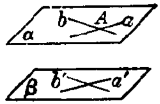
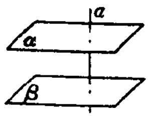
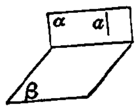
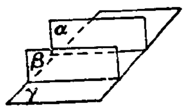
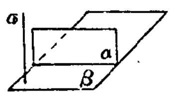


$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow BM=AM=CM \\ SA=SB \\ SM=SM \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\triangle SBM\cong\triangle SAM\Rightarrow\angle SMB=\angle SMA=90^\circ$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow SM\perp BM \\ SM\perp AC \end{array}\right\}\Rightarrow SM\perp\text{平面 } ABC。$$

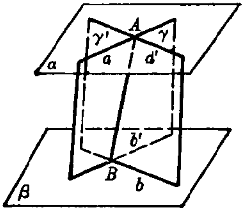
面与面的关系

面面平行判定定理	若 $a\cap b=A$, $a\subset$ 平面 α, $b\subset$ 平面 α, $a\parallel$ 平面 β, $b\parallel$ 平面 β, 则 平面 $\alpha\parallel$ 平面 β	
	若 $a\cap b=A$, $a\subset$ 平面 α, $b\subset$ 平面 α, $a'\subset$ 平面 β, $b'\subset$ 平面 β, 且 $a\parallel a'$, $b\parallel b'$, 则 平面 $\alpha\parallel$ 平面 β	
	若 $a\perp$ 平面 α, $a\perp$ 平面 β, 则 平面 $\alpha\parallel$ 平面 β	
面面垂直判定定理	若 $a\perp$ 平面 β, $a\subset$ 平面 α, 则 平面 $\alpha\perp$ 平面 β	
	若 平面 $\alpha\parallel$ 平面 β, 平面 $\alpha\perp$ 平面 γ, 则 平面 $\beta\perp$ 平面 γ	
	若 $a\perp$ 平面 β, $a\parallel$ 平面 α, 则 平面 $\alpha\perp$ 平面 β	

例 1：已知：两异面直线 a、b，且 $a\subset\alpha, b\parallel\alpha, b\subset\beta, a\parallel\beta$。

求证：平面 $\alpha\parallel$ 平面 β。

证明：在 b 上取点 B，过 a、B 作平面 γ，



则 $\alpha\cap\gamma=a$，

设 $\beta\cap\gamma=b'$，

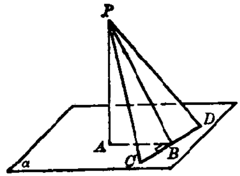
由 $a\parallel\beta\Rightarrow a\parallel b'$，

同理可证 $b\parallel a'$

$$由\ \left.\begin{array}{l} a\parallel b',\ b\cap b'=B \\ b\parallel a',\ a\cap a'=A \end{array}\right\}\Rightarrow\alpha\parallel\beta$$

例 2：已知：$PA\perp$ 平面 α，A 为垂足，PB 为 α 的一条斜线，过 B 在 α 内作 $CD\perp PB$。

求证：平面 $PCD\perp$ 平面 PAB。



证明：

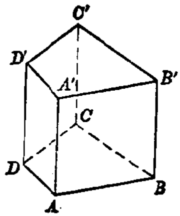
$$由\ \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} PA\perp\alpha \\ CD\subset\alpha \end{array}\right\}\Rightarrow PA\perp CD \\ \qquad\qquad\quad PB\perp CD \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} CD\perp 平面\ PAB \\ CD\subset 平面\ PCD \end{array}\right\}\Rightarrow 平面\ PCD\perp 平面\ PAB$$

B. 多　面　体

棱　柱

定义及种类



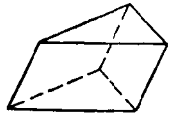
棱柱 $ABCD-A'B'C'D'$

是具有性质:

① 平面 AC // 平面 $A'C'$,

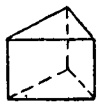
② 各侧棱平行 (如 AA' // BB') 的多面体

→侧棱与底面斜交得斜棱柱

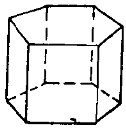


斜棱柱

→侧棱与底面垂直得直棱柱



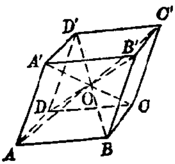
底面为正多边形



正棱柱

侧面为全等矩形

→底面为平行四边形得平行六面体



性　质

① 各面均为平行四边形

② 四条对角线交于一点(O点)

③ 相对两面平行且全等

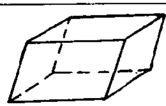
性质

① 各侧面为平行四边形

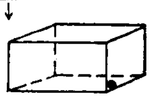
② 两底面全等

③ 各侧棱相等

↓



若侧棱斜交底面叫斜平行六面体



若侧棱垂直底面叫直平行六面体

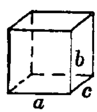
底面为矩形得长方体 ↓

面积

侧面积	$S_{侧}=lp$　l: 侧棱长 p: 棱柱直截面周长
全面积	$S_{全}=S_{侧}+2S_{棱柱底}$

体积

$V=S\cdot h$　S: 棱柱底面积
h: 棱柱高



$a=b=c$

← 正方体

$l^2=a^2+b^2+c^2$