陈振宣 等编著

中学数学思维方法

ZHONGXUE SHUXUE SIWEI FANGFA

上海科技教育出版社

中学数学思维方法

陈振宣等 编著

上海科技教育出版社

中学数学思维方法

陈振宣等　编著

上海科技教育出版社出版、发行

(上海冠生园路393号)

各地新华书店经销　商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32　印张 10.75　字数 270 000

1988年7月第1版　1988年7月第1次印刷

印数 1-15,400 本

ISBN 7-5428-0086-8

G·87

定价：3.45元

引 言

“人类长期以来，就有这样一种渴望：有种魔力无边的方法，它能解决所有的问题. ……笛卡儿曾冥思苦索找到一个能解所有问题的通用方法. 莱布尼兹曾非常清楚地叙述了完善解法的思想，然而，……这是一个美妙的梦想，……”. 科学方法论证明，这样的方法是不存在的. 但人们总想揭示数学上的发现是怎样得来的？数学难题的解法是怎样想出来的？许多数学家与数学教育家普遍认为数学成果获得的思维过程的价值决不比成果本身的价值小. 庞卡莱(Pioncare, 1854～1912)、阿达玛(Hadamard, 1865～1963)企图从数学成果发现的思维轨迹的分析中，揭示创造性思维的规律. 近代数学家与数学教育家柯朗(Richard Courant, 1888～1972)写了《数学是什么？》. 被誉为现代数学教育理论创始人波利亚(G. Polya, 1888～1985)写了三本数学教育的经典著作《怎样解题》、《数学与猜想》、《数学的发现》. 他们都希望改变数学教学中的弊病，即阉割数学结果获得的思维过程，把学生的思维禁锢在机械模仿的思维定势中. 他们积极提倡揭示数学成果获得的思维过程，通过数学思维训练，打开人脑思维的智慧之门. 波利亚、柯朗的思想越来越引起人们的重视. 数学教学实践证明他们指出的方向是正确的.

近年来，新技术革命掀起了一场世界性的竞争. 新技术的开发要靠人才，新技术的驾驭也要靠人才. 因此，这场竞争的核心是人才培养的竞赛. 人才的成长，关键在于教育，而教育科学的核心问题是思维科学. 当前思维科学研究的热潮势不可挡. 数学思维的研究，数学教育理论的研究在世界上成了“朝阳行业”(growth industry). 在这本小册子里,我们将把自己在教学实践中学习摸索所得提供给广大青年学生、数学教师及数学爱好者,希望借此引起大家对数学思维方法探索的兴趣,并为改变数学教与学的面貌作点微薄的贡献. 由于我们的水平所限,探索还在开创阶段,许多认识与提法还不成熟,恳切希望读者与专家指正.

目　录

第一章　数学思维的基本方法

什么是思维？如何给思维下定义，心理学家尚无一致的意见．“心理学上，思维是指运用智能寻求问题的答案或寻求达到实际目的的手段．”“可能最令人满意的暂用定义就是指任何内隐的象征反应（用以反映目前并不存在的外界事件的体内反应）．”（《简明不列颠百科全书》卷七 p. 410）．说得明白点，在解决问题过程中，人脑里限于意象、符号以及用符号表示的命题的没有外现的内部操作活动就是思维．数学中认识概念，学习公理、定理、公式、法则的过程，以及探求解决问题的方案的活动一刻也不能离开思维．谁忽视或阉割数学的教和学过程中的思维活动，谁就无法教好和学好数学．那种把数学教学局限于知识的传授，把学生的数学思维框死在机械模仿的定势中的做法，正在被广大教师的教学实践所否定．在数学教学中必须研究数学思维活动的规律，这已成为不可阻挡的趋势．

数学学习和其他任何学习一样，都必然要用到“信息的储存”与“信息的检索”两种基本的思维方法．下面谈谈这两种基本的思维方法．

信息储存的思维方法

学习数学基本知识（概念、公理、定理、公式、法则等等），从掌握到运用，必然要经过知识（信息）的储存与检索．要把信息存入到自己的信息库——大脑中，就不能把储存过程简单地压缩为单纯的记忆和背诵．不能设想，学生能把完全不理解的定理、公式牢固地记住．信息储存的开始，可在教师的启发指引下，通过独立思考，弄清知识的来龙去脉，理解知识的意义，把握新知识与已有知

识之间的区别与联系，这是储存信息过程的第一步．在理解的基础上，进行思维加工，形成信息块或压缩成形象符号系列，使之便于记忆储存，这是第二步．第三步，在单元学习结束时以至一门课程结束时，注意信息的纵向、横向联系，特别是概念与概念，概念与定理之间逻辑联系，把信息放入到一个合理的知识框架——知识的逻辑结构中去．为了与遗忘作斗争．应在适当的时候进行及时的复习．写笔记，写知识结构框图，从厚到薄．再根据框图，从基本概念出发，推导定理与公式直至自己在学习中的独立创见，从薄到厚．这样，从厚到薄，从薄到厚的反复．是信息储存思维过程中的重要方法．以上所述，是信息储存思维方法的概括描述．对于不同的信息，还应针对其特点，灵活运用．

信息检索的思维方法

在解决数学问题时，总得从自己的信息库中检索所需要的信息．那末检索的思维过程是怎样的呢？这一过程比较复杂，这里，只能作概括的描述．一般是根据问题的要求、内容（条件与结论或已知与未知）所涉及的信息范围以及过去解决问题的经验教训，进行联想思索．这里以发散思维为主，从有关信息中检索出问题所必需的知识．在涉及的知识面不宽，问题要求明确的情况下，检索过程比较简单．在涉及知识面宽，问题要求又比较曲折隐晦时，检索过程就相当困难．只有在信息存储时，对信息理解深刻，对知识的逻辑结构清楚，且存放的地位得当，才能加快检索过程，迅速想到所需的知识．可见检索的基础是储存．储存的功夫下得深，检索才能迅速．检索的方法是善于审题，从问题的要求、内容进行发散式、多角度、全方位地联想．下面以复数这一单元为例，说明信息储存与检索的思维过程．

复数是中学阶段最后一次数的概念的扩张．它在实数域的基础上，引入虚数单位“i”，保持原有的运算规律，扩张为复数域．如果将 i 看作方程 $x^2+1=0$ 的一个根，定义 $i^2=-1$，则容易产生不

易捉摸之感．如果把 i 看作为 y 轴上的单位向量(即模为1，幅角为 $\frac{\pi}{2}$ 的向量)．按向量的加、减运算法则定义复数的加法、减法，用向量的乘法(不同于向量的数量积与向量积的另一种向量乘法)即两向量的乘积的模等于此两向量模的积，两向量乘积的幅角等于此两向量幅角之和来定义复数的乘法，在这样的运算定义下，向量与复数完全可以看作同一类的元素．(在高等数学中称为同构)．据此，有

$$i^2=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\pi+i\sin\pi=-1+0\cdot i$$

$(x,\ 0)$ 与实数 x 的运算规律也完全相同，即 $(x,\ 0)=x$．因此，有 $i^2=-1$．这与定义 $i^2=-1$ 是一致的．

这样来理解复数，易于建立虚数不虚的观念，便于借助于向量来处理复数问题，充分发挥几何直观与形象思维的作用，有利于提高思维能力．为了便于记忆、储存，可通过单元小结，将复数的基本知识概括成如下页的框图．

复数与复平面、平面向量、平面直角坐标系，平面极坐标系、三角函数概念、平面曲线的参数方程、平面点集等等知识相联系，我们可以灵活运用，解决代数、三角、平几、解几中的大量问题．

为了巩固记忆，加深理解，还可根据这一框图，从复数的基本概念出发，独立推导出全部有关复数的基本知识．以上就是从厚到薄，从薄到厚的全过程．这就是信息储存的思维方法．在储存上下了功夫，就可给信息检索带来方便．

下面再通过一个实例看看信息检索的思维过程．

已知复数 Z 满足 $Z^2+Z+1=0$，

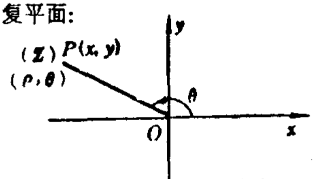
(1) 计算 $(Z+1)^4+Z$，并把所得结果写成复数的三角形式；

(2) 求证：对任意复数 u，有恒等式

$$(u+1)^3+(u+Z)^3+(u+Z^2)^3=3(u^3+1);$$

点$(x, y)\cong$复数 $Z\cong$ 向量 $\overrightarrow{OP}$

复平面:



$R(Z)=x$ $I(Z)=y$

$|Z|=\rho$ $(|\overrightarrow{OP}|)$ $\operatorname{Arg}(Z)=\theta$

$\boxed{\text{线性式: } Z=x+yi}$

$\boxed{\text{三角函数式: } Z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)}$

当 $I(Z)=0$ 则 Z 为实数

当$\begin{cases}I(Z)\neq 0\\ R(Z)=0\end{cases}$则 Z 为纯虚数

复数相等: $Z_1=Z_2\Leftrightarrow\begin{cases}R(Z_1)=R(Z_2)\\ I(Z_1)=I(Z_2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|Z_1|=|Z_2| & k\in Z\\ \operatorname{Arg}(Z_2)-\operatorname{Arg}(Z_1)=2k\pi\end{cases}$

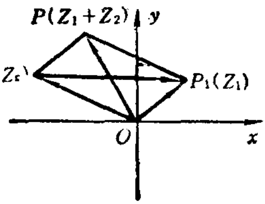
复数共轭: $Z_2=\overline{Z}_1\Leftrightarrow\begin{cases}R(Z_1)=R(Z_2)\\ I(Z_1)+I(Z_2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|Z_1|=|Z_2| & k\in Z\\ \operatorname{Arg}(Z_1)+\operatorname{Arg}(Z_2)=2k\pi\end{cases}$

复 数 的 运 算

加法与减法: $Z_1\pm Z_2=[R(Z_1)\pm R(Z_2)]+i[I(Z_1)\pm I(Z_2)]$

$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}=\overrightarrow{OP}$ (平行四边形法则)

$\overrightarrow{P_2P_1}=\overrightarrow{OP_1}-\overrightarrow{OP_2}$ (三角形法则)



乘法: $|Z_1Z_2|=|Z_1||Z_2|$,

$\operatorname{Arg}(Z_1Z_2)=\operatorname{Arg}(Z_1)+\operatorname{Arg}(Z_2)$, 伸缩、旋转变换.

$Z_1Z_2=|Z_1||Z_2|[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

$Z(\cos\theta+i\sin\theta)$: 对应于将 Z 对应的向量旋转 θ 角($\theta\geqslant 0$ 按逆时针旋转, $\theta<0$ 按顺时针旋转)。

Zi 对应于将 Z 对应的向量按逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$;

$Z(-i)$: 对应于将 Z 对应的向量按顺时针旋转 $\frac{\pi}{2}$。

除法: $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right|=\frac{|Z_1|}{|Z_2|}$, $\operatorname{Arg}\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)=\operatorname{Arg}(Z_1)-\operatorname{Arg}(Z_2)$ (以 Z_2 对应的向量为始边, Z_1 对应的向量为终边的夹角.)

$\frac{Z_1}{Z_2}=\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right|[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$.

乘方: De-Moivre 定理: $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$.

$Z^n=|Z|^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

开方: 方程 $W^n=Z=|Z|(\cos\theta+i\sin\theta)$ 根的全体称为 Z 的 n 次方根.

$W=\sqrt[n]{|Z|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$ $(k=0、1、2、\cdots、n-1)$

单位根: 若 $Z^n=1$, 则 $Z=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$ $(k=0、1、2、\cdots、n-1)$

令 $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ 则 $Z=\varepsilon, \varepsilon^2, \cdots, \varepsilon^n(\varepsilon^n=1)$. $\varepsilon, \varepsilon^2, \cdots, \varepsilon^n$ 是单位圆的 n 等分点.

$\overline{\overline{Z}}=Z$, $Z\cdot\overline{Z}=|Z|^2$, $\overline{R(Z_1, Z_2, Z_3, \cdots, Z_n)}=R(\overline{Z}_1, \overline{Z}_2, \overline{Z}_3, \cdots, \overline{Z}_n)$.

(3) 试问：使$(1+Z)^n$是实数值的最小自然数n是多少？为什么？

当我们面对这一问题时，首先的印象是这是复数问题，头脑会浮现出复数的基本知识的框图．根据条件$Z^2+Z+1=0$，在不同的人面前，可能有各种不同的反映，即使同一个人，也会出现各种反映．

第一种：从$Z^2+Z+1=0$，直接解得$Z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，或$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$．

第二种：从$Z^2+Z+1=0$想到1的3次根．由于$Z\neq1$，则以$Z-1$乘以等式两边，得$Z^3-1=0$，即$Z^3=1$，从而有$Z^{3n}=1$，$Z^{3n+1}=Z$，$Z^{3n+2}=Z^2$，其中n为自然数．

第三种：从$Z^2+Z+1=0$，想到$Z\neq0$，从此有$Z^3+Z^2+Z=0$，又因$Z^2+Z=-1$，故有$Z^3-1=0$，即$Z^3=1$，$Z^4=Z$，$Z^5=Z^2$，等等．

………………

问题(1)要求计算$(Z+1)^4+Z$，由于上述种种不同的信息检索，因此将有更多的情形，这里不再一一列举．从上述第二或第三种想法入手，可得

$$(Z+1)^4+Z=(-Z^2)^4+Z=Z^8+Z=Z^2+Z=-1$$
$$=\cos\pi+i\sin\pi.$$

如果循上述第一种想法入手，分别将$Z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，或$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$代入计算，就较繁琐了．

问题(2)要求证明恒等式$(u+1)^3+(u+Z)^3+(u+Z^2)^3=3(u^3+1)$，由于信息检索的不同，处理的办法也不同．仍利用$Z^{3n}=1$，$Z^{3n+1}=Z$，$Z^{3n+2}=Z^2$，则有

$$
\begin{aligned}
&(u+1)^3+(u+Z)^3+(u+Z^2)^3\\
&=3u^3+3u^2(1+Z+Z^2)+3u(1+Z^2+Z^4)+1+Z^3+Z^6\\
&=3u^3+(3u^2+3u)(1+Z+Z^2)+1+1+1\\
&=3(u^3+1).
\end{aligned}
$$

对于问题(3)，则十分明确要用到复数$Z=x+yi$为实数的条件：$I(Z)=0$. $(1+Z)^n=(-Z^2)^n=(-1)^nZ^{2n}$，当且仅当$n$为3的倍数$3K$($K$为自然数)时，$(1+Z)^n$为实数. 所以，使$(1+Z)^n$是实数值的最小自然数$n=3$.

当然，也可以$Z=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$代入得

$$1+Z=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3},$$

$$(1+Z)^n=\left(\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n=\cos\frac{n\pi}{3}\pm i\sin\frac{n\pi}{3}.$$

$(1+Z)^n$为实数值的充要条件为$\sin\frac{n\pi}{3}=0$，即$\frac{n\pi}{3}=K\pi$ ($K\in Z$). 所以$n=3K$，从而得，使$(1+Z)^n$是实数值的最小自然数$n=3$.

由于这一问题要求、内容都很明确，因而信息的检索比较简单.

关于信息的储存与检索，就谈这些. 下面谈谈数学上常用的有固定的思维模式的思维方法.

在数学中，从小学的四则运算法则到微积分的求导、求积的基本法则，都有一套固定的思维模式. 这种解决某种问题的固定的思维模式在数学学科中是不少的. 例如：代数式的四则运算，解方程和方程组的消元、降次法，因式分解中的提取公因式法、公式法和分组分解法，几何作图中的三角形奠基法、位似作图法，数列求和中的裂项法，证不等式的比较法、基本不等式法及“判别式”法，三角中的有理置换法、补助角法，立体几何中的降维法，解析几何

中的解析证法，求轨迹方程的基本法则等等．关于固定思维模式还应注意：

1．这类固定的思维模式，一般通过模仿不难掌握．通过一定量的练习就可转化为熟练的技能，要努力做到正确、迅速、合理，且在合理上下功夫．

例如，求直线 $x-(t_1+t_2)y+2pt_1t_2=0$ 与抛物线 $x^2=2qy$ 相切的条件．一般都通过方程组

$$\begin{cases} x-(t_1+t_2)y+2pt_1t_2=0 & ① \\ x^2=2qy & ② \end{cases}$$

有两组相同的实数解来解决．

在消元时，有三种途径：

(i) 从①解出 $y=\dfrac{x+2pt_1t_2}{t_1+t_2}$ 代入②；

(ii) 从①解出 $x=(t_1+t_2)y-2pt_1t_2$ 代入②；

(iii) 从②解出 $y=x^2/2q$ 代入①，得

$$x-(t_1+t_2)x^2/2q+2pt_1t_2=0,$$

即

$$(t_1+t_2)x^2-2qx-4pqt_1t_2=0.$$

得相切条件为

$$\Delta=4q^2+16pqt_1t_2(t_1+t_2)=0,$$

即

$$q+4pt_1t_2(t_1+t_2)=0.$$

容易看出，(iii)的方法运算量较小．

一般在解由一个一次，一个二次方程构成的方程组时，往往变换一次方程，用含有一个未知数的代数式来表示另一个未知数，再代入到二次方程中进行消元．如(i)与(ii)的做法，但这道题却反其道而行之．可见即使对于这类有固定思维模式的问题，仍然存在一个灵活运用问题，万万不可墨守成规，一成不变．这是呆板与灵活的辩证法，不可不引起重视．

2．这类固定的思维模式的建立仍存在一定的思维过程，其中

孕伏着第二、三章中论述的数学思维的基本观点和解决问题的策略思想. 因此,学习这类思维模式不能靠单纯的机械模仿,应该灵活地运用数学的基本知识,理解这些基本方法产生的思维过程. 这样既有利于基本知识的熟练掌握,又可不断提高思维能力.

例 1 求函数 $y=a\sin^2x+b\sin x\cos x+c\cos^2x$($a$、$b$、$c$ 为非零的实数)的最大值和最小值.

解 $y=\frac{1}{2}[a(1-\cos 2x)+b\sin 2x+c(1+\cos 2x)]$

$$=\frac{1}{2}(a+c)+\frac{b}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}(c-a)\cos 2x$$

$$=\frac{1}{2}(a+c)+\frac{1}{2}\sqrt{b^2+(c-a)^2}\sin(2x+\varphi),$$

其中 $\operatorname{tg}\varphi=\frac{c-a}{b}$.

当 $2x+\varphi=2n\pi+\frac{\pi}{2}$, 即 $x=n\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}$ 时, $n\in Z$)

$$y_{最大}=\frac{1}{2}(a+c)+\frac{1}{2}\sqrt{b^2+(c-a)^2};$$

当 $2x+\varphi=2n\pi-\frac{\pi}{2}$, 即 $x=n\pi-\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}$ 时, $(n\in Z)$

$$y_{最小}=\frac{1}{2}(a+c)-\frac{1}{2}\sqrt{b^2+(c-a)^2}.$$

这就是补助角法的应用. 补助角法的作用是使变化因素集中,便于研究函数的最大值和最小值.

例 2 求函数 $f(x)=\dfrac{\sin\pi x}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}}$ 的零点中距点 $\sqrt{6}$ 最近的一点.

$f(x)$的零点就是方程 $f(x)=0$ 的实根. 根据最简三角方程的解法,得

$$\begin{cases}\sin\pi x=0,\\ 1+\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}\neq 0,\\ \dfrac{\pi x}{4}\neq(2n+1)\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}\quad\therefore\quad\begin{cases}x=n,\\ \dfrac{\pi x}{4}\neq n\pi-\dfrac{\pi}{4},\\ \dfrac{\pi x}{4}\neq(2n+1)\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}\quad\text{即}\begin{cases}x=n,\\ x\neq 4n-1,\\ x\neq 4n+2.\\ (n\in Z)\end{cases}$$

$\therefore$ $f(x)$的零点为4的倍数，或4除余1，即

$$x=4n\text{ 或 }4n+1,\ (n\in Z).$$

当n为0, 1, -1,…时，x为0或1, 4或5, -4或-3, ……

其中离点$\sqrt{6}$最近的是点1.

解这道题还利用了整数的剩余类，逻辑划分的思想.

例3 设Z_1、Z_2、Z_3的模都等于1，且$Z_1+Z_2+Z_3\neq 0$，

求证：
$$\left|\frac{Z_1Z_2+Z_2Z_3+Z_3Z_1}{Z_1+Z_2+Z_3}\right|=1.$$

证
$$\because\quad |Z_1|=|Z_2|=|Z_3|=1,$$
$$\therefore\quad Z_1\cdot\bar{Z}_1=Z_2\cdot\bar{Z}_2=Z_3\cdot\bar{Z}_3=1.$$

故
$$\bar{Z}_1=\frac{1}{Z_1},\ \bar{Z}_2=\frac{1}{Z_2},\ \bar{Z}_3=\frac{1}{Z_3},$$

且
$$|Z_1Z_2Z_3|=|Z_1||Z_2||Z_3|=1,$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad\left|\frac{Z_1Z_2+Z_2Z_3+Z_3Z_1}{Z_1+Z_2+Z_3}\right|&=|Z_1Z_2Z_3|\left|\frac{\dfrac{1}{Z_3}+\dfrac{1}{Z_1}+\dfrac{1}{Z_2}}{Z_1+Z_2+Z_3}\right|\\&=\left|\frac{\bar{Z}_1+\bar{Z}_2+\bar{Z}_3}{Z_1+Z_2+Z_3}\right|\\&=\left|\frac{\overline{Z_1+Z_2+Z_3}}{Z_1+Z_2+Z_3}\right|\\&\qquad(\because\ |Z|=|\bar{Z}|)\\&=1.\end{aligned}$$

这里主要是运用了共轭复数的概念与性质，但也用到“字母代式”，这就是第二章中的映射观点(用Z表示$Z_1+Z_2+Z_3$).

例4 求和：$1+C_n^1\cos\varphi+C_n^2\cos 2\varphi+\cdots+C_n^n\cos n\varphi$.

在复数中常常用 $\cos\theta+i\sin\theta$ 来处理数列求和问题，从此联想到 $C_n^1\sin\varphi+C_n^2\sin 2\varphi+\cdots+C_n^n\sin n\varphi=S$，令

$$C=1+C_n^1\cos\varphi+C_n^2\cos 2\varphi+\cdots+C_n^n\cos n\varphi,$$

则
$$\begin{aligned}C+iS&=1+C_n^1(\cos\varphi+i\sin\varphi)+C_n^2(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)\\&\quad+\cdots+C_n^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi) &①\\&=1+C_n^1(\cos\varphi+i\sin\varphi)+C_n^2(\cos\varphi+i\sin\varphi)^2\\&\quad+\cdots+C_n^n(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n &②\\&=(1+\cos\varphi+i\sin\varphi)^n &③\\&=\left(2\cos^2\frac{\varphi}{2}+2i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)^n &④\\&=2^n\cos^n\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)^n &⑤\\&=2^n\cos^n\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{n\varphi}{2}+i\sin\frac{n\varphi}{2}\right). &⑥\end{aligned}$$

$$\therefore\quad C=2^n\cos^n\frac{\varphi}{2}\cos\frac{n\varphi}{2},\ S=2^n\cos^n\frac{\varphi}{2}\sin\frac{n\varphi}{2}.$$

这里，应用了二项式定理 $(1+x)^n=1+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n$，令 $x=\cos\varphi+i\sin\varphi$，就是由②转化为③的根据.

例 5 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱 $AA_1=4$，它的底面 $\triangle ABC$ 中有 $AC=BC=2$，$\angle C=90°$，E 是 AB 的中点．求截面 ACB_1 与侧面 ABB_1A_1 所成二面角的大小.

由于 $CE\perp AB$，且平面 $ABC\perp$ 平面 ABB_1A_1，故 $CE\perp$ 平面 ABB_1A_1.

截面 AB_1C 在平面 ABB_1A_1 上的射影为 $\triangle AB_1E$，因为 E 为 AB 的中点，所以

$$S_{\triangle AB_1E}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABB_1}=\frac{1}{4}S_{\square ABB_1A_1}=\frac{1}{4}\times4\times2\sqrt{2}=2\sqrt{2}.$$

如能算出 $S_{\triangle AB_1C}$，则可利用公式 $\cos\theta=S_{\triangle AB_1E}/S_{\triangle AB_1C}$，求出截面 AB_1C 与平面 ABB_1A_1 所夹的二面角 θ 的大小.