21世纪高等院校教材

复变函数

杨纶标 郝志峰 编

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

复 变 函 数

杨纶标　郝志峰　编

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书介绍了复变函数的基本概念、基本理论和方法，包括复变函数的概念、极限和连续、微分、积分、级数、留数和共形映射等. 本书在内容的安排上，深入浅出，叙述简明，列举了大量的例题来说明复变函数相关的定义和定理，每章还用小结的形式对该章主要内容做了归纳，每章末还配备了适量的习题，便于读者系统复习.

本书可作为大学工科诸专业学生的教学用书，也可供相关专业的教师和科技工作者参考.

图书在版编目（CIP）数据

复变函数/杨纶标，郝志峰编. —北京：科学出版社，2003.8
（21世纪高等院校教材）

ISBN 7-03-011760-3

Ⅰ. 复… Ⅱ. ①杨…②郝… Ⅲ. 复变函数-高等学校-教材
Ⅳ. O174.5

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第056031号

责任编辑：李鹏奇/责任校对：宋玲玲
责任印制：安春生/封面设计：黄华斌

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
西源印刷厂 印刷
科学出版社出版 各地新华书店经销
*
2003年8月第 一 版 开本：B5（720×1000）
2004年1月第二次印刷 印张：11 3/4
印数：6 001—9 000 字数：221 000

定价：17.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉）

前 言

在高等数学中研究了实变量函数，本书将研究复变量函数．其实，复变量函数是实变量函数的推广．

复变函数在数学中已形成一个重要分支，正因为复变函数中的许多概念（复变函数的定义、极限、连续、导数、积分等）、理论是实变函数在复数领域内的推广和发展，因此它们之间有很多相似之处，然而也有很多不同之点．我们在整个教与学的过程中，既要注意它们的共同之处，又要注意它们的相异之点．

复变函数与数学中其他分支一样，也是由于客观实际的需要产生和发展起来的．

回顾历史，瑞士数学家欧拉（Euler，1707～1783）在前人确信负数开方能施行的基础上于1737年第一次提出用 i 表示 -1 的平方根．因为这种数不是直接产生于计算或测量，所以相对于实数，人们很自然地称它为虚数．这样，数的概念在实数的基础上进一步得到发展，产生了复数与复变量．为了进一步研究复变量之间的依赖关系，德国数学家高斯（Gauss，1777～1855）于1811年正式引入了复变函数的概念．法国数学家柯西（Cauchy，1789～1857）给出了柯西-黎曼方程，于1814年建立起复变函数的积分理论，提供了计算留数公式．复变函数的级数理论是德国数学家魏尔斯特拉斯（Weierstrass，1815～1897）在19世纪初建立的，德国数学家黎曼（Reimann，1826～1866）在19世纪对复变函数的几何理论作出了很大贡献．

由于生产实际问题的需要，复变函数理论从19世纪以来得到了蓬勃的发展，它不仅与其他学科（如理论物理，自动控制等）有着密切的联系，而且与数学中其他分支有着密切的联系，我国数学家陈景润（1933～1996）在研究“哥德巴赫猜想”问题中就广泛应用了复变函数的理论．正因为复变函数有如此广泛的联系与应用，所以学好这门课就显得很有必要．

我校开设复变函数课程，开始是在无线电系，后来随着科学技术的发展和教学改革的深入，开设这门课程的院系和专业越来越多，除无线电系外，还有计算机、自动化、电力、机电、化机等学院及交通学院的有关专业．为了适应进一步发展的需要，编写了本教材，同时也把我们多年的教学所得，奉献给读者．

本教材根据教育部高等学校复变函数教学的基本要求，结合编者长期从事复变函数课程的教学和研究的经验编写而成．在编写过程中，参考了许多优秀的复

变函数教材，尤其是西安交通大学高等数学教研室编的《复变函数》（该书曾获“国家优秀教材奖”）．本教材吸取了该书的许多好的经验，也改进了该书的一些不足之处，使它成为更加适合工科专业的教学用书．

本教材得到国家工科数学教学基地之一华南理工大学数学系及学校教务处的资助．

本教材有如下特点：

1．注重介绍基本内容与基本方法，省略较难的证明，简化较为复杂的运算．在多年的复变函数的教学中，作者与电类及交通类等相关专业的学生保持着密切联系，对他们由于专业的特点所需的复变函数的基本内容比较了解，所以，按照电类等工科学生的专业背景设计了本教材的内容结构及其写作特色，这样就比较适合工科的学生使用．

2．教材力求通俗易懂、语言简明，概念叙述准确，条理清楚．例如，明确指出指数函数 $\exp z$，就是以无理数 e 为底复变量 z 为指数的函数 e^z，容易掌握．再例如，由于人们对“复对数”的概念理解不够透彻，故有错误的展开式：

$$\operatorname{Ln}\sqrt[n]{z} = \frac{1}{n}\ln|z| + \mathrm{i}\arg\sqrt[n]{z} + \mathrm{i}2k\pi,$$

并由此推出“$\operatorname{Ln}\sqrt[n]{z} = \frac{1}{n}\ln z$ 不再成立”的错误结论．本教材举例说明了上述展开式是错误的，并证明等式“$\operatorname{Ln}\sqrt[n]{z} = \frac{1}{n}\ln z$”是正确的．又如：有的书把“在 z_0 点的留数”说成是“$f(z)$在以 z_0 为中心的圆环内……”，这是不对的，对此本书也已举例说明，使对留数概念有准确的理解．

3．书中例题较多，对难懂的概念及运算方法通过例题说明，使之深入浅出．

4．每章后都附有“小结”，用来总结每章中的主要概念和定理，以及对难点和重点都作了提示．通过我们多年教学实践证明，小结能帮助读者深刻理解该章内容，把握好该章的重点和基本方法．

5．关于习题，选取时注意了工科学生的特点，在难度和题量方面均比较适中，并且注意习题与内容及例题的搭配，书末附有习题答案，或解题提示，方便教学．

本书编写过程中得到华南理工大学教务处和数学系领导及老师们的积极支持，科学出版社的大力协助，在此一并表示衷心的感谢．

本书共 6 章，其中第一、六章由郝志峰教授编写，第二、三、四、五章由杨纶标教授编写．

由于水平所限，不妥之处在所难免，敬请读者批评指正．

编　者

2003.6

目　　录

第一章　复数与复变函数

复变函数就是自变量为复数的函数，它是本课程的研究对象．复数是复变函数的基础，本章主要介绍复数的概念、性质及运算．考虑到在中学阶段已学过有关复数方面的知识，这里将在原有的基础上作必要的复习和补充．然后再介绍复平面上区域及复变函数的极限与连续等知识，为下面研究解析函数理论打下良好的基础．

§1.1　复数及其表示式

一、复数的概念

在解代数方程时，方程

$$x^2+1=0$$

在实数范围内无解．由于解方程等方面的需要，人们引入一个新数 i，记 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，称为**虚数单位**，并规定

$$\mathrm{i}^2=-1.$$

定义 1.1.1　对于任意两个实数 x,y，称 $z=x+\mathrm{i}y$ 或 $z=x+y\mathrm{i}$ 为**复数**，其中 x,y 分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**，记为

$$x=\mathrm{Re}(z),y=\mathrm{Im}(z),$$

符号"Re"是表示实部拉丁字 realis 的前两个字母，符号"Im"是表示虚部拉丁字 imaginarius 的前两个字母．

当 $x=0,y\neq 0$ 时，$z=\mathrm{i}y$ 称为**纯虚数**；当 $y=0,x\neq 0$ 时，$z=x+0\mathrm{i}=x$，这时看做是实数 x．因此我们看到复数是实数的推广．

定义 1.1.2　设有两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1,z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，若

$$x_1=x_2,\quad y_1=y_2 \tag{1.1}$$

时，则 $z_1=z_2$．

关于两个复数之间的关系有一点需作说明：一般说来，两个复数之间不能比较大小．

二、复平面

上述 $z=x+\mathrm{i}y$ 是复数的**代数表示式**，这里引入复数的几何表示式与向量表示式．

由复数相等的概念可以看出，一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 对应一对有序的实数

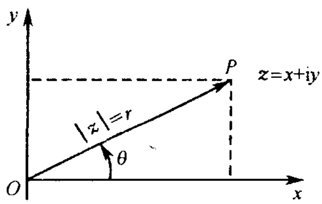

图 1.1

(x,y),而(x,y)与直角坐标平面上的点一一对应,于是复数就与平面上的点一一对应,因此可用坐标平面上的点来表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$(图1.1).这就是复数的**几何表示式**.

定义 1.1.3　在复数的几何表示式里,实数与 x 轴上的点一一对应,x 轴称为**实轴**.纯虚数 $\mathrm{i}y$ 与 y 轴上的点一一对应,y 轴称为**虚轴**.在虚轴上只有一个点即原点对应着实轴上的数 0.因此可以认为原点对应着复数 $z=0+\mathrm{i}0$,记为 $z=0$.

这样表示复数的平面称为**复数平面**(或 Z 平面),简称为**复平面**.

由于复数与平面上直角坐标系中的点建立了一一对应关系,因此为方便起见,以后不再区分"数 z"和"点 z".

如图 1.1 所示,复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可以用向量$\overrightarrow{OP}$来表示,此向量的起点在原点 $O(0,0)$、终点在点 $P(x,y)$,x 与 y 分别是向量$\overrightarrow{OP}$在 x 轴与 y 轴上的投影.这样,复数与平面上的向量$\overrightarrow{OP}$之间建立了一一对应关系,这就是复数的**向量表示式**.

定义 1.1.4　上述向量$\overrightarrow{OP}$的长度称为复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的**模**或**绝对值**,记为 $|z|$ 或 r,于是

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{1.2}$$

显然有

$$|x|\leqslant|z|,\ |y|\leqslant|z|,\ |z|\leqslant|x|+|y|. \tag{1.3}$$

定义 1.1.5　当 $z\neq0$ 时,向量$\overrightarrow{OP}$与 x 轴正向间的夹角 θ 称为复数的**辐角**,记为

$$\theta=\mathrm{Arg}z.$$

这时有

$$\begin{cases} x=|z|\cos\theta,\ y=|z|\sin\theta, \\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}. \end{cases} \tag{1.4}$$

复数的辐角在研究复变函数中是个很重要的概念,为此对于复数的辐角需作一些说明.

(1) 当 $z\neq0$ 时,复数的辐角不是惟一的,有无穷多个.若 θ_0 是复数 z 的辐角,则 $\theta_0+2k\pi$(k 为整数)也是复数的辐角.因此任何一个非零的复数都有无穷多个辐角,它们之间相差 2π 倍,即

$$\mathrm{Arg}z=\theta_0+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots). \tag{1.5}$$

满足 $-\pi<\theta_0\leqslant\pi$ 的辐角是惟一的,称为 $\mathrm{Arg}z$ 的**主值**,记为

$$\theta_0 = \arg z,$$

于是有

$$\begin{cases} -\pi < \theta_0 \leqslant \pi, \\ \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \end{cases} \tag{1.6}$$

复数辐角的主值在不同书中有不同的规定,这里规定 $\arg z$ 在 $(-\pi,\pi]$ 内.

(2) 当 $z\neq 0$ 时,复数辐角的主值可以由复数在复平面上所对应的点在哪个象限或坐标轴上来定,

$$\underset{(z\neq 0)}{\arg z} = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & z\text{ 在第一、四象限}, \\ \pi + \arctan\dfrac{y}{x}, & z\text{ 在第二象限}, \\ -\pi + \arctan\dfrac{y}{x}, & z\text{ 在第三象限}, \\ \dfrac{\pi}{2}, & z\text{ 在正虚轴上}, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & z\text{ 在负虚轴上}, \\ 0, & z\text{ 在正实轴上}, \\ \pi, & z\text{ 在负实轴上}, \end{cases} \tag{1.7}$$

其中 $-\dfrac{\pi}{2} < \arctan\dfrac{y}{x} < \dfrac{\pi}{2}$.

(3) 当 $z=0$ 时,这时 $|z|=0$,而辐角不确定.

例 1 求复数 $z=-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的模与辐角.

解

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = 2.$$

因为复数所对应的点在第二象限,所以

$$\begin{aligned} \arg z &= \pi + \arctan\frac{y}{x} = \pi + \arctan\frac{\sqrt{3}}{-1} \\ &= \pi - \arctan\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

三、复数的三角表示式与指数表示式

利用模 $|z|=r$ 及辐角 $\theta=\operatorname{Arg} z$,可表示复数 z 的实部 x 及虚部 y:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \tag{1.8}$$

上式称为复数的**极坐标表示式**.

这样可将复数的代数式 $z=x+\mathrm{i}y$ 表示为

$$\begin{aligned} z &= r\cos\theta + \mathrm{i}r\sin\theta = r[\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta] \\ &= |z|[\cos(\mathrm{Arg}z) + \mathrm{i}\sin(\mathrm{Arg}z)], \end{aligned} \tag{1.9}$$

上式称为复数的**三角表示式**.

利用欧拉公式

$$e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta, \tag{1.10}$$

三角表示式可表示为

$$z = re^{\mathrm{i}\theta}, \tag{1.11}$$

上式称为复数的**指数表示式**.

注意　这里的 θ 应为 $\mathrm{Arg}z$,为了书写方便,将 θ 写为 $\arg z$.

在高等数学里我们学习过欧拉公式,在(1.10)中若令 $\theta=\pi$,得到

$$e^{\mathrm{i}\pi} = -1,$$

即

$$e^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0,$$

这是一个绝妙的等式,它把数学中最基本、最常用而且在数学发展史上令人瞩目的一些常数:$\pi, e, \mathrm{i}, -1$ 或 $\pi, e, \mathrm{i}, 1, 0$ 用一个简单的式子联系起来了,这是一个多么耐人寻味的联系,由此可见复数与复变函数在科学发展史上所产生的巨大威力!学习复变函数这门课的重要性已是不言而喻的事了.

例 2　将复数 $z=-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 化为三角表示式和指数表示式.

解　利用例 1 求出复数的模与辐角得三角表示式为

$$z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right),$$

指数表示式为

$$z = 2e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}.$$

例 3　将复数 $z=1+\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta(-\pi<\theta\leqslant\pi)$ 化为三角表示式.

解一　$|z| = r = \sqrt{(1+\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2} = \sqrt{2(1+\cos\theta)} = 2\sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2}} = 2\cos\frac{\theta}{2}$,因为复数所对应的点在第一、第四象限,所以

$$\arg z = \arctan\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \arctan\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\theta}{2},$$

故

$$z = 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\right)(-\pi<\theta\leqslant\pi).$$

解二

$$z = 1+\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}+\mathrm{i}\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$
$$=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\right)\quad(-\pi<\theta\leqslant\pi).$$

四、复球面

除了用平面内的点或向量来表示复数外,还可以用球面上的点来表示复数.

取一个与复平面切于原点 $z=0$ 的球面,球面上的一点 S 与原点重合(图 1.2).通过 S 作垂直于复平面的直线与球面相交于另一点 N.我们称 N 为**北极**,S 为**南极**.

对于复平面内任何一点 z,如果用一直线段把点 z 与北极 N 连结起来,那么该直线一定与球面相交于异于 N 的一点 P.反过来,对于球面上任何一个异于 N 的点 P,用一直线段把 P 与 N 连结起来,这条直线段的延长线就与复平面相交于一点 z.这就表明:球面上的点,除去北极 N 外,与复平面内的点之间存在着一一对应的关系.前面已经讲过,复数可以看作是复平面内的点,因此球面上的点,除去北极 N 外,与复数一一对应.所以我们就可以用球面上的点来表示复数.

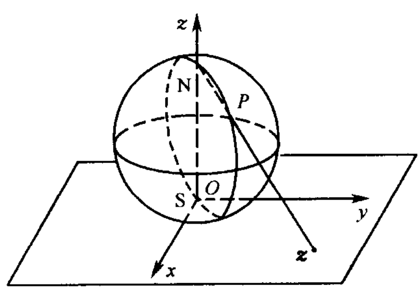

图 1.2

但是,对于球面上的北极 N,还没有复平面内的一个点与它对应.从图 1.2 中容易看到,当 z 点无限地远离原点时,或者说,当复数 z 的模 $|z|$ 无限地变大时,点 P 就无限地接近于 N.为了使复平面与球面上的点无例外地都能一一对应起来,我们规定:
(1) 复平面上有一个惟一的"无穷远点",它与球面上的北极 N 相对应;
(2) 复数中有一个惟一的"无穷大"与复平面上的无穷远点相对应,并把它记作∞.因而球面上的北极 N 就是复数无穷大∞的几何表示.这样一来,球面上的每一个点,就有惟一的一个复数与它对应,这样的球面称为**复球面**.这种用复球面上的点来表示复数的方法,称为**复数的球面表示法**.

在这里把包括无穷远点在内的复平面称为**扩充复平面**.不包括无穷远点在内的复平面称为**有限平面**,或者称为**复平面**.对于复数∞来说,实部、虚部与辐角的概念均无意义,但它的模则规定为正无穷大,即 $|\infty|=+\infty$.对于其他每一个复数 z 则有 $|z|<+\infty$.

复球面能把扩充复平面的无穷远点明显地表示出来,这就是它比复平面优越

的地方.

为了今后的需要,关于∞的四则运算作如下规定:

加法:$\alpha+\infty=\infty+\alpha=\infty(\alpha\neq\infty)$;

减法:$\alpha-\infty=\infty-\alpha=\infty(\alpha\neq\infty)$;

乘法:$\alpha\cdot\infty=\infty\cdot\alpha=\infty(\alpha\neq\infty)$;

除法:$\dfrac{\alpha}{\infty}=0,\dfrac{\infty}{\alpha}=\infty(\alpha\neq\infty),\dfrac{\alpha}{0}=\infty(\alpha\neq 0$,但可为$\infty)$.

至于其他运算:$\infty\pm\infty,0\cdot\infty,\dfrac{\infty}{\infty}$,我们不规定其意义.像在实变数中一样,$\dfrac{0}{0}$仍然不确定.

这里我们引进的扩充复平面与无穷远点,在后面的讨论中,能够带来一定的方便,但如无特殊声明,所谓“平面”一般仍指有限平面,所谓“点”仍指有限平面上的点.

五、复数的各种表示式之间的互化

在理论研究与实际应用中,可以根据不同的需要采用不同的复数表示式,要学会它们之间的互化.在复数的各种表示式中,关键在于复数的代数表示式与三角表示式之间的互化.

已知复数的代数表示式,利用(1.2),(1.5),(1.7)式,先求出复数的模与辐角,即可化为复数的三角表示式.

已知复数的三角表示式,利用(1.9)式,可化为复数的代数表示式.

§1.2　复数的运算及其几何意义

一、复数的加法与减法

定义 1.2.1　两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1,z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的加法与减法定义如下:

$$\begin{aligned}z_1+z_2&=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2),\\ z_1-z_2&=(x_1-x_2)+\mathrm{i}(y_1-y_2).\end{aligned}\tag{1.12}$$

根据这个定义,可见复数的加法与减法和相对应向量的加法与减法运算一致,即利用平行四边形法则(图 1.3)可以得到两个复数相加与相减的结果,这是复数加法与减法的几何意义.

由复数加法与减法的几何意义以及图 1.2 可见,显然有下列不等式

$$\begin{aligned}&|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|\text{(三角不等式)},\\ &|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||,\end{aligned}\tag{1.13}$$

其中$|z_1-z_2|$表示点 z_1 与 z_2 之间的距离(图 1.3).

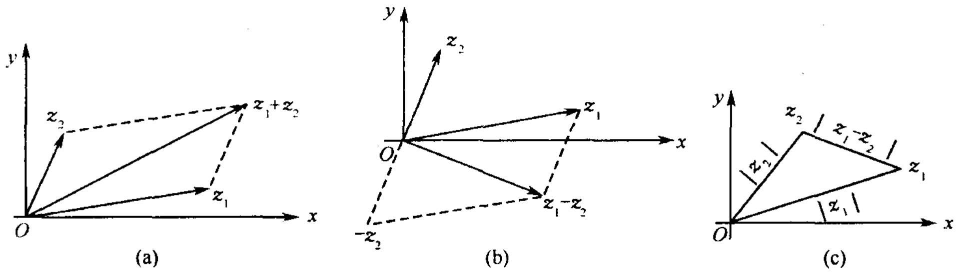

图 1.3

二、复数的乘法与除法

定义 1.2.2 两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1, z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的乘法与除法定义如下:

$$\begin{aligned}&(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)\\&=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1),\end{aligned}\tag{1.14}$$

$$\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}(z_2\neq 0).\tag{1.15}$$

不难证明,与实数情况一样,复数的运算满足交换律、结合律与分配律:

$$z_1+z_2=z_2+z_1, z_1z_2=z_2z_1,$$

$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3),(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3),$$

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

下面利用复数的三角表示式来讨论复数的乘法与除法.

设

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1), z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2),$$

由复数乘法的定义得

$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\\&=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\cos\theta_1\sin\theta_2+\cos\theta_2\sin\theta_1)]\\&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)],\end{aligned}$$

于是得

$$|z_1z_2|=r_1r_2=|z_1||z_2|,\tag{1.16}$$

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}r_1+\mathrm{Arg}z_2.\tag{1.17}$$

从而有下面的定理 1.2.1.

定理 1.2.1 两个复数乘积的模等于它们的模之乘积,两个复数乘积的辐角等于它们的辐角之和.

值得注意的是，由于辐角的多值性，等式(1.17)两端都是由无穷多个数构成的数集，等式应理解为其可能取值的全体是相同的，也就是说，对于左端的一个值，右端必有一个值和它相等；反之亦然.

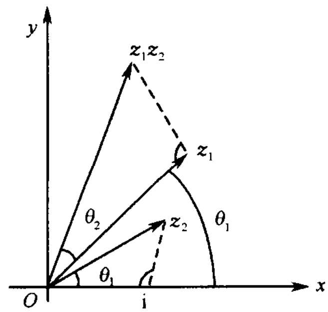

图 1.4

由(1.16)，(1.17)式可以看出，复数乘法的几何意义是：将复数 z_1 伸长(或缩小)到 $|z_2|$ 倍，然后再将辐角按逆时针方向旋转一个角度 $\mathrm{Arg}z_2$，如图 1.4 所示，即作一个相似变换，再作一个旋转变换. 特别，当 $|z_2|=1$ 时，乘法运算就变成了旋转变换，例如 $\mathrm{i}z$ 相当于将 z 按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$. 又当 $\arg z_2=0$ 时，乘法运算就变成了相似变换，例如 $5z$ 相当于将 z 伸长到 5 倍.

如果用指数表示式来表示复数

$$z_1 = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}, \quad z_2 = r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2},$$

那么定理 1.2.1 可简明地表示为

$$z_1z_2 = r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}. \tag{1.18}$$

若

$$z_k = r_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k} = r_k(\cos\theta_k + \mathrm{i}\sin\theta_k)(k = 1,2,\cdots,n),$$

则

$$\begin{aligned} z_1z_2\cdots z_n &= r_1r_2\cdots r_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)} \\ &= r_1r_2\cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n) \\ &\quad + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)]. \end{aligned} \tag{1.19}$$

例 4　利用 $(5-\mathrm{i})^4(1+\mathrm{i})$ 证明 Machin 公式

$$4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$

证　因为

$$(5-\mathrm{i})^4(1+\mathrm{i}) = (476-480\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) = 4(239-\mathrm{i}),$$

所以

$$\arg(5-\mathrm{i})^4 + \arg(1+\mathrm{i}) = \arg 4(239-\mathrm{i}),$$

而

$$\arg(5-\mathrm{i}) = -\arctan\frac{1}{5}, \quad \arg(5-\mathrm{i})^4 = -4\arctan\frac{1}{5},$$

$$\arg(1+\mathrm{i}) = \frac{\pi}{4}, \quad \arg 4(239-\mathrm{i}) = -\arctan\frac{1}{239},$$

则有

$$-4\arctan\frac{1}{5}+\frac{\pi}{4}=-\arctan\frac{1}{239},$$

即

$$4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}.$$

说明 利用复数的模与辐角及其运算还可以证明很多有趣的结果.

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\cdot\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$，则由复数除法的定义得

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2}&=\frac{r_1}{r_2}[(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\cos\theta_2\sin\theta_1-\cos\theta_1\sin\theta_2)]\\&=\frac{r_1}{r_2}[(\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)],\end{aligned}$$

则有

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{r_1}{r_2},\tag{1.20}$$

$$\mathrm{Arg}\frac{z_1}{z_2}=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2.\tag{1.21}$$

于是有下面的定理 1.2.2.

定理 1.2.2 两个复数之商的模等于它们的模之商；两个复数之商的辐角等于被除数与除数的辐角之差.

值得注意的是，(1.21)式与(1.17)式有相类似的理解.

由(1.20)式，(1.21)式可以看出，复数 z_1 除以复数 z_2 的几何意义是：将复数 z_1 的模除以 $|z_2|$，然后再将其辐角按顺时针方向旋转一个角度 $\mathrm{Arg}z_2$，即作一个相似变换，再作一个旋转变换.

如果用指数表示式来表示复数

$$z_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1},\quad z_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2},$$

那么定理 1.2.2 可简明地表示为

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}.\tag{1.22}$$

三、复数的乘幂与方根

定义 1.2.3 n 个相同的复数 z 的乘积称为 z 的 **n 次幂**，记为 z^n，即

$$z^n=z\cdot z\cdot\cdots\cdot z.$$

在(1.19)式中，令 $z_1=z_2=\cdots=z_n=z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，则

$$z^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta).\tag{1.23}$$

如果定义 $z^{-n}=\frac{1}{z^n}$(n 为正整数),那么当 n 为负整数时,上式亦成立.

特别地当 $|z|=r=1$ 时,即 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$,由(1.23)式有

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta, \tag{1.24}$$

这就是棣莫弗(De Moivre,1667~1754)公式.

例 5 试用 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 表示 $\cos3\theta$ 和 $\sin3\theta$.

解 由棣莫弗公式得

$$\begin{aligned}\cos3\theta+\mathrm{i}\sin3\theta&=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^3\\&=\cos^3\theta+3\cos^2\theta\cdot\mathrm{i}\sin\theta+3\cos\theta\cdot\mathrm{i}^2\sin^2\theta+\mathrm{i}^3\sin^3\theta\\&=(\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta)+\mathrm{i}(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta),\end{aligned}$$

于是有

$$\cos3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta,$$
$$\sin3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta.$$

说明 用棣莫弗公式还可以得到许多类似的结果.

定义 1.2.4 设有复数 w 和 z,若 $w^n=z$(n 为整数),称复数 w 为 z 的 **n 次方根**,记为

$$w=\sqrt[n]{z}.$$

若令 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$,$w=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$,则由(1.23)式和复数相等的概念,可得

$$\rho^n=r,\cos n\varphi=\cos\theta,\sin n\varphi=\sin\theta,$$

即

$$\begin{cases}\rho^n=r,\\n\varphi=\theta+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots),\end{cases}$$

于是

$$\begin{cases}\rho=\sqrt[n]{r},\\\varphi=\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots),\end{cases}$$

其中 $\sqrt[n]{r}=r^{\frac{1}{n}}$ 是算术根,所以

$$w=\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots), \tag{1.25}$$

当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时,得到 n 个相异的根:

$$w_0=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{n}\right),$$

$$w_1=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2\pi}{n}\right),$$