新世纪 理工科研究生入学考试指导丛书

典型题解析与实战模拟

离散数学

毛晓光 编著

国防科技大学出版社

新世纪

理工科研究生入学考试指导丛书

离散数学

典型题解析与实战模拟

毛晓光　刘万伟　编著

国防科技大学出版社

·长沙·

内 容 简 介

本书为硕士研究生考试人员“离散数学”课程考试复习用书。内容分为两部分：第一部分为解析篇，分为七章，前三章是有关集合论、关系、函数等朴素集合论的基本内容，第四章到第六章是有关数理逻辑的基本内容，包括命题逻辑、谓词逻辑和自然推理系统，第七章是图论，每一章均按复习提要、典型题解、习题及答案进行组织；第二部分为实战篇，包括两套模拟试卷和参考答案，以及全国一些重点院校硕士研究生入学考试“离散数学”试题汇编。

本书也可作为计算机科学与技术专业本科生、研究生学习“离散数学”课程时的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学：典型题解析与实战模拟/毛晓光等编著.—长沙：国防科技大学出版社，2003.8

(新世纪理工科研究生入学考试指导丛书)

ISBN 7-81024-973-8

Ⅰ.离… Ⅱ.毛… Ⅲ.离散数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 053221 号

国防科技大学出版社出版发行
电话：(0731)4572640 邮政编码：410073
E-mail：gfkdcbs@public.cs.hn.cn
责任编辑：黄煌 责任校对：罗青
新华书店总店北京发行所经销
国防科技大学印刷厂印装

*

开本：787×1092 1/16 印张：16.75 字数：387 千
2003 年 8 月第 1 版第 1 次印刷 印数：1-3500 册

*

定价：28.00 元

新世纪理工科研究生入学考试指导丛书
编审委员会

序

* *

新世纪来临,挑战和机遇共存。作为当代大学生和有志青年,当务之急是积累知识,培养能力,以备将来为祖国为人民服务,实现自身的理想和价值。因而,近年来高校“考研热”不断升温,引人关注。

为满足广大学生考研复习之需,更为了适应培养高素质高水平人才的形势,不少出版社出版了辅导学生深入学习课程的参考书,但多是关于数学、外语、政治等公共基础课的,针对各门专业课的指导书较少,精品更少。鉴于此,国防科技大学出版社经多方调研,全面规划,精心组织作者编写了这套旨在帮助学生学习各门专业课、提高考研应试能力的指导丛书。该套丛书具有以下几大特色:

(一)作者经验丰富,权威性强

本丛书的作者都是经悉心遴选,从事教学、科研、著书多年,某些是在全国有相当影响、所著的教材(或专著)在相应专业使用较广的资深专家教授。他们都是高校硕士或博士指导教师。他们在编写这套丛书时废寝忘食,躬行写作,将自己多年积累的经验、体会凝聚在字里行间,奉献给广大的读者,相信他们的辛勤劳动成果必然会对大家学习有关课程有极大帮助,这正是我们丛书编审委员会最感欣慰的。

(二)题目收集广泛,针对性强

这套丛书紧扣国家教育部制定的课程教学大纲和研究生入学考试要求,合理安排各书内容,条理清晰,详略分明,深入浅出,释疑去惑,并广泛搜集近年全国20余所

重点高校或研究所考研试卷，加以分析、归纳、提高，使读者既能把握各门专业课程的全貌，又能抓住主脉络，领会其中的主要原理、方法，真正提高能力。

（三）突出实战模拟，操作性强

这套丛书中每本书分解析篇和实战篇。其中解析篇按章分提要、例题、习题、习题解答，分别讲清理论、分析各种解题技巧、提供练习和检验机会，使学生全面掌握课程的概念、原理、方法和技巧，学深、学透。实战篇，提供几份模拟题及其参考答案、多份重点高校近年考研试卷，供学生在课程考试或考研的前夕实景备战，以巩固复习成果，丰富考场经验，增强自信心。这样的结构安排极利于学生使用好本丛书。

国防科技大学出版社、丛书编审委员会和编写者共同努力，辛勤劳动，所有的书稿均经多次审定、修改，使这套丛书达到了较高的质量水平，相信本丛书必能为在书海中遨游的学子指点迷津，助他们踏上成功之路。

本丛书除了适合高校学生学习使用外，对广大的自学者、相关专业工程技术人员亦会有所裨益。

丛书编审委员会邀我为该书作序，谨寄数言，既是对这套丛书的郑重推荐，也是对该套丛书编写者的敬意。

陳大旺

2003年6月

前　言

* *

计算机科学以研究计算机领域中的一些普遍规律为主要任务，所以需要大量的近代数学作为工具。由于它所用的数学多具有“离散性”和“能行性”两大特点，故而称之为“离散数学”。“离散数学”不仅理论性强，而且要求学生具有一定的抽象思维能力和逻辑思维能力，因而普遍认为“离散数学”学习曲线长、学习难度大。为了帮助学生更好地掌握“离散数学”课程的学习，掌握“离散数学”习题解答的思路，顺利通过硕士研究生入学考试，我们编写了这本参考书。

本书参照了全国一些重点院校计算机科学与技术专业“离散数学”课程的主要内容，收集并整理了硕士研究生入学考试的试题，并对所挑选的典型试题进行了细致、深入的分析，每一小节均配备相应的习题作为练习，希冀学生能籍此达到融会贯通的境界。本书内容分为两部分：第一部分为解析篇，分为七章，前三章是有关集合论、关系、函数等朴素集合论的基本内容，第四章到第六章是有关数理逻辑的基本内容，包括命题逻辑、谓词逻辑和自然推理系统，第七章是图论；第二部分为实战篇，包括两套模拟试卷和参考答案，还有十几份重点院校及研究所的考研典型试卷。本书的编写融入了作者多年的教学体会，比如自然推理系统中的证明策略和方法为本书特色。本书目前未收集有关抽象代数的内容。为了便于学习，前七章按复习提要、典型题解、习题及答案三部分进行组织。复习提要根据考试大纲的要求，对每一章学习内容进行总结，理清学习的重点、要点、难点和范围。主要内容包括基本概念、定理、定律、基本方法等。典型题解对硕士研究生“离散数学”课程考试中的典型试题进行了指导性分析，重在题目类型、解题方法、解题思路和解题要点。学生可以通过典型题解体会“离散数学”课程考试中分析问题、解决问题的方法、思路和技巧。习题及答案可以帮助学生进行巩固和提高，也可提供教师作为教学的参考材料使用。

本书主要面向计算机专业硕士研究生考试人员，主要作为“离散数学”课程考试复习用书，也可以作为计算机科学与技术专业本科生、研究生以及其他从事计算机工作的科研和工程技术人员学习“离散数学”课程时的参考用书。

本书的第一部分的一、二、三、七章由刘万伟和毛晓光编写，四、五、六章由毛晓光编写。第二部分的模拟试卷由毛晓光编写。

本书的编写得到了国防科技大学计算机系、计算机软件与理论教研室和国防科技大学出版社的大力支持，在此表示衷心的感谢。同时特别感谢王兵山教授、李舟军教授的支持。

由于时间仓促，作者水平有限，书中的错误在所难免，敬请读者批评指正。

作　者

2003 年 6 月

目　录

解　析　篇

第一章　集　合

第二章　二元关系

第三章 函 数

第四章 命题逻辑

第五章 谓词逻辑

第六章 自然推理系统

第七章 图 论

实　战　篇

第一部分　硕士研究生入学考试模拟试卷

第二部分　硕士研究生入学考试典型试卷

解析篇

第一章

集　合

集合是当代数学最重要、最基本的概念之一。然而，集合又是如此的基本，以至于无法给出其确切的定义；就像欧氏几何无法为点、直线、平面给出确切定义一样。近代数学却是完全构建在这些“朴素得无法再朴素的概念”之上。集合便是其中的一个。

本章主要研究集合及其表示、集合的运算、自然数和归纳法、笛卡尔乘积四个内容。其中集合的运算及其性质、两种归纳法应作为重点学习。

1.1　集合的表示及其运算

1.1.1　复习提要

一、基本概念

设 A、B 是任意集合，a 是任意元素。n(A) 表示 A 中元素的数目。

(1) 若 a 是 A 的元素，记作 $a \in A$。

(2) 若 a 不是 A 的元素，记作 $a \notin A$。

(3) 若 $n(A) = 0$，则 A 为空集，记作 $\varnothing$。

(4) 若 n(A) 为自然数，则 A 为有限集。

(5) 若 n(A) 为无穷大，则 A 为无限集。

(6) 若 $n(A) \neq 0$，则 A 为非空集。

(7) 若 $(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$，则称 A 为 B 的子集，记作 $A \subseteq B$。

(8) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则称集合 A 和 B 相等，记作 $A = B$。

(9) 若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$，则称 A 为 B 的真子集，记作 $A \subset B$。

二、导出概念

设 A、B 是任意集合，a 是任意元素。

(1) 集合$\{x \mid x \in A$ 或者 $x \in B\}$ 称为 A 和 B 的并集，记作 $A \cup B$。

(2) 集合$\{x \mid x \in A$ 并且 $x \in B\}$ 称为 A 和 B 的交集，记作 $A \cap B$。

(3) 集合$\{x \mid x \notin A\}$ 称为 A 的补集，记作 $\sim A$。

(4) 集合$\{x \mid x \subseteq A\}$ 称为 A 的幂集，记作$\mathscr{P}(A)$，这样的集合称为集类。

(5) 集合$\{x \mid x \in A$ 但 $x \notin B\}$ 称为 A 和 B 的差集，记作 $A - B$。

(6) 集合$\{x \mid x \in A - B$ 或者 $x \in B - A\}$ 称为 A 和 B 的对称差，记作 $A \oplus B$。

(7) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为一组集合，则有以下广义并、广义交的概念：

ⅰ. 称 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid (\exists i)((i \geqslant 1) \wedge (i \leqslant n) \wedge (x \in A_i))\}$ 为该组集合的广义并；

ⅱ. 称 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid (\forall i)((i \geqslant 1) \wedge (i \leqslant n) \to (x \in A_i))\}$ 为该组集合的广义交。

三、集合的基本性质及运算

一个集合必须满足以下三条性质：

1. 确定性：指对于任意的元素，是否属于该集合是可判定的。

例：确定下列哪些是集合：

a) 所有的河流；

b) 所有自身不包含自身的集合；

c) 所有善良的人。

其中，只有 a) 是集合。

2. 无序性：集合内元素的顺序是可交换的(区别于序偶)。

3. 互异性：同一集合内部，不存在两个完全一样的元素。

例：试问能否如下定义三元组(序偶)：

$$< a,b,c > = \{\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$$

(提示：如果这样的定义是合理的，你将如何区分 $< a,a,b >$ 和 $< a,b,a >$?)

集合运算的性质：

(1) 幂等律

$A \cup A = A$

$A \cap A = A$

(2) 结合律

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(3) 交换律

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

(4) 分配律

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(5) 同一律

$A \cup \varnothing = A$

$A \cap U = A$

(6) 零律

$A \cup U = U$

$A \cap \varnothing = \varnothing$

(7) 互补律

$A \cup \sim A = U$

$A \cap \sim A = \varnothing$

(8) 吸收律

$A \cup (A \cap B) = A$

$A \cap (A \cup B) = A$

(9) 德·摩根律

$\sim (A \cup B) = \sim A \cap \sim B$

$\sim (A \cap B) = \sim A \cup \sim B$

(10) 对合律

$\sim (\sim A) = A$

(11) $\sim U = \varnothing$

$\sim \varnothing = U$

其中,德·摩根律是比较重要的定律,是连接与转化“与”和“或”两种操作的桥梁。

四、归纳定义法

数学归纳法是定义集合的常用方法,其要素包含三个方面:

(1) 基本项:已知某些元素属于目标集合,保证该集合非空。

(2) 归纳项:给出某些规则,从已经构造出的元素出发,利用这些规则,保证得到的新元素还是该集合中的元素。

(3) 极小化:保证目标集合是所有满足(1)、(2) 条件集合中的最小集合(取交集)。一般可以省略。

1.1.2 典型题解

例1

设 $A = \{\varnothing, a, \{a,b\}\}$,定义 $f: A \times A \to 2^A$ 如下:$f(<x,y>) = \{\{x\},\{x,y\}\}$。请判断下式是否成立:

ⅰ. $f(<\varnothing,\varnothing>) = \{\{\varnothing\}\}$ (   )

ⅱ. $f(<\varnothing,\varnothing>) = \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ (   )

ⅲ. $f(<a,\{a\}>) = \{\{a\}\}$ (   )

iv. $f(<a,\{a\}>) = \{\{a\},\{a,\{a\}\}\}$ (　　)

（西安交通大学 1996 年硕士研究生入学考试试题）

分析

题目本身不难，关键是要搞清楚该函数的真正定义，特别是当参数本身也是一个集合时。

解答

i.(√)　　ii.(×)　　iii.(×)　　iv.(√)

例 2

判断下述命题的正确性：

i. 设 A,B 为集合，如果 $A\cup B=A$，那么 $B=\varnothing$； (　　)

ii. 设 A,B 为集合，则 $\mathscr{P}(A)\cap\mathscr{P}(B)=\mathscr{P}(A\cap B)$。 (　　)

（西安交通大学 1997 年硕士研究生入学考试试题）

分析

对于 i：$A\cup B=A$ 成立，只要 B 是 A 的子集就可以了，而不一定要求 B 是空集，因而错误；对于 ii，结论正确，详细证明参考例 4。

解答

i.(×)　　ii.(√)

例 3

设 A,B,C 均为非空集合，如果：$A\cup C\subseteq B\cup C$，且 $A\cap C\subseteq B\cap C$，那么，$A\subseteq B$ 一定成立吗？给予证明或者举出反例。

（西安交通大学 1997 年硕士研究生入学考试试题）

分析

由文氏图可以看出，$A\subseteq B$ 一定成立，下面给予证明。

解答

$A\subseteq B$ 一定成立，理由如下：

对于任意的 $x\in A$，则 $x\in C$ 和 $x\notin C$ 二者之中有且仅有一个成立。

(1) 当 $x\in C$ 时：由于 $x\in A$，所以有 $x\in A\cap C$ 成立，而 $A\cap C\subseteq B\cap C$，因此，$x\in B\cap C$，从而，$x\in B$；

(2) 当 $x\notin C$ 时：由于 $x\in A$，所以有 $x\in A\cup C$ 成立，而 $A\cup C\subseteq B\cup C$，因此，$x\in B\cup C$。但 $x\notin C$，故只能是 $x\in B$；

由(1)、(2) 知：对于任意的 $x\in A$，均有 $x\in B$。于是，$A\subseteq B$ 一定成立。

例 4

对于任意的集合 A,B，证明：$\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)\subseteq\mathscr{P}(A\cup B)$，$\mathscr{P}(A)\cap\mathscr{P}(B)=\mathscr{P}(A\cap B)$，并举例说明 $\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)\neq\mathscr{P}(A\cup B)$。

（中科院软件研究所 1998 年硕士研究生入学考试试题）

解答

(1) 对于任意的 $C\in\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)$，一定有 $C\in\mathscr{P}(A)$ 或者 $C\in\mathscr{P}(B)$。若 $C\in\mathscr{P}(A)$，则 $C\subseteq A$，于是，$C\subseteq A\cup B$，所以，$C\in\mathscr{P}(A\cup B)$；同理，当 $C\in\mathscr{P}(B)$ 时，亦

有 $C \in \mathscr{P}(A \cup B)$ 成立。因此，$\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) \subseteq \mathscr{P}(A \cup B)$。

(2) 一方面，对于任意的 $C \in \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$，一定有 $C \in \mathscr{P}(A)$ 且 $C \in \mathscr{P}(B)$，由幂集的定义知：$C \subseteq A$，并且 $C \subseteq B$，于是 $C \subseteq A \cap B$。再由幂集定义知：$C \in \mathscr{P}(A \cap B)$，所以，$\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B) \subseteq \mathscr{P}(A \cap B)$；另一方面，对于任意的 $C \in \mathscr{P}(A \cap B)$：根据定义有 $C \subseteq A \cap B$，所以 $C \subseteq A$，进而 $C \in \mathscr{P}(A)$；同理，$C \in \mathscr{P}(B)$，所以，$C \in \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$；由以上知：$\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B) = \mathscr{P}(A \cap B)$。

(3) 令 $A = \{a\}$，$B = \{b\}$，则 $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}\} \neq \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\} = \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$。

例 5

下列集合运算中(　　　)是正确的。

A. $\varnothing \cup \{\varnothing\} = \varnothing$　　　B. $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} - \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing\}$

C. $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} - \{\varnothing\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$　　　D. $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} - \varnothing = \{\{\varnothing\}\}$

(北京理工大学 1996 年硕士研究生入学考试试题)

分析

该题目主要考察基本概念，一定要区分空集 $\varnothing$ 和以空集为元素的集合 $\{\varnothing\}$ 之间的区别。

解答

B。

例 6

下列命题中，(　　　)为假。

A. $x \in \{x\} \cup \{\{x\}\}$　　　B. $\{x\} \subseteq \{x\} - \{\{x\}\}$

C. 若 $A = \{x\} \cup x$，则 $x \in A$ 且 $x \subseteq A$　　　D. $A - B = \varnothing \iff A = B$

(北京理工大学 1996 年硕士研究生入学考试试题)

分析

该题目主要考察基本概念，要搞清楚“$\in$”和“$\subseteq$”的定义。

解答

D。

例 7

设 A 是以空集 $\varnothing$ 作为惟一元素的集合，集合 $B = \mathscr{P}(\mathscr{P}(A))$，则有(　　　)。

A. $\varnothing \in B$　　　B. $\varnothing \subseteq B$　　　C. $\{\varnothing\} \subseteq B$

D. $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \subseteq B$　　　E. $\{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\} \in B$

(重庆大学 1998 年硕士研究生入学考试试题)

分析

由题目知：$A = \{\varnothing\}$，则 $\mathscr{P}(A) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$，所以 $B = \mathscr{P}(\mathscr{P}(A)) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$。这样，很显然地就有 A、B、C、D 成立。

解答

A，B，C，D。