青年数学叢書

直線形

張克明著

中国青年出版社

青年数学叢書

直　線　形

張 克 明 著

中国青年出版社

一九五七年・北京

直　線　形

張克明著

*

中國青年出版社出版
（北京东四12条老君堂11号）
北京市書刊出版業營業許可証出字第036号
中国青年出版社印刷厂印刷
新华書店总經售
*
787×1092 1/32　2 5/16 印張　35,000字
1952年4月第1版　1957年2月北京第7次印刷
印数 42,001—72,000

統一書号：13009·123

定价(7)二角四分

內 容 提 要

本書以直線形部份為例，反映從感性認識到理性認識的過程，給讀者指出了學習幾何的新途徑。它首先說明點、線、面、體諸概念是實在物體的點、線、面、體的直觀及表象在概念上的加工，指出了幾何的基礎不是定義和公理，而是客觀實際；再逐步說明直線形的公理、定理及其證明都是客觀的幾何性質的反映。

目　次

一 緒 論㊀

1. 公理與證明

哲學從古到今就分成唯心、唯物兩派，這兩派哲學，不但影響社會科學，也影響自然科學，影響數學，特別是影響數學哲學問題. 這本書編寫的目的，是想用辯證唯物觀點來講歐氏平面幾何，好同過去幾何學中間的唯心解釋和形而上學的思想方法，劃分一個界限.

幾何學的萌芽很早，從埃及金字塔的建築，我們可以設想，那時候已經有了很多幾何知識，傳到希臘就更加發展，等到歐幾里德編著幾何原本，就把古代的幾何知識集中起來，就使它更有系統，更加精確，並具有了現代平面幾何學的規模. 歐幾里德的功績是很大的，是值得我們稱頌和紀念的！

幾何原本開端就是點、線……等二十三個定義，其次就是十個公理（卽五個公理和五個公法），又其次是從上述的定義和公理推演出來的命題㊁. 從這些，我們知道歐幾里德把幾何的內容分成定義、公理和命題幾個部分. 其中的公理，都沒有證明，而每個命題是用定義、公理和已經證明的命題做根據

㊀ 初讀幾何的人，可將此段略去，直接從直線開始，等全書讀完，再讀此段.

㊁ 見陳藎民著非歐派幾何學第八節.

來證明的．這樣，定義和公理就成爲證明命題的最後根據．要是定義和公理都對，證明的話也對，我們就可以斷定命題也對．反過來講，如果定義和公理不對，或是部分不對，那末根據它們證得的命題，自然也不可靠．

這樣一來，就引起了以下的幾個問題：第一，命題靠定義和公理證明，公理又靠什麽證明呢？公理能不能證明呢？不證明又是否可靠呢？第二，這樣的敍述方法對不對呢？好不好呢？下面就分别討論這些問題．

最早研究數學的學者，認爲‘公理是不證自明的’．這種看法，自然不能解決問題，須要更進一步的説明．十八世紀的康德認爲公理是先天的，那就把公理塗上了唯心的色彩了．後來有了非歐幾何，推翻公理是先天的錯誤看法，但這個偉大的數學成就並沒有澈底肅清幾何學上的唯心觀念．十九世紀末的班加雷就説：‘公理是一種人爲的假説或公約，祇要和諧完全及獨立卽可．’希爾伯特對公理有很大貢獻，他把幾何公理分成五類，補充和發展了歐氏公理，使幾何更加嚴格；但他對公理與實際聯系的問題也沒有很好地解決．當然也有一些唯物傾向的人，反對唯心見解，如霍爾德就説：‘公理是適合經驗的假説，’但就整個公理的思潮來説，唯物主張並沒有取得決定性的勝利．

首先要肯定的，公理不能像命題一樣，用已經證明的命題來證明，因爲用已經證明的命題去證其他命題，推到最後，必

有幾個開始的命題，沒有其他命題來做證明它們的根據，而這幾個命題，就成為我們所講的公理了．其次，公理必須用唯物觀點來解釋．我們應當肯定，公理和命題（其中絕大部分是定理）都是幾何實際性質的反映，公理正確與否就看它能否與客觀實際相符．‘實踐是眞理的標準’，對其他學問如此，對幾何公理和定理也是如此．幾何公理和定理，都是人類從無數次的實踐得來，又可以用現在及將來的實踐來證明的．絕不是先天的，也不是人為的假說或公約，更不是與經驗無關的．公理和命題一樣，必須證而後明，決不會‘不證自明’，不過它的證明方法是用實踐，不是用的理論罷了（其實用理論證明的也必須與實際相符，否則不能算眞正的理論證明）．有些人認為公理不能證明，或是公理可以不證自明，這都是片面的看法，他們只承認理論證明，而不承認實際證明，只承認用公理及已經證明的命題來證明，而不承認用無數次的實踐來證明，其錯誤是很明顯的．

公理和定理既然都是客觀幾何性質的反映，都可以用實踐來證明，那末為什麼又有公理和定理之分呢？為什麼公理和定理不都用實踐證明，而定理要用公理及已證的定理去證明呢？為什麼又有用公理或已證明的定理去證明新定理的可能性呢？因為人類認識事物，固然要憑感性認識，要憑經驗證明，但也要憑理性認識，也要憑理論證明，這樣纔能使我們更好地認識外界事物．同樣的，也用理論方法纔能使我們對幾何的

研究工作更加發展，使我們對幾何性質不必都依靠無數次的實踐來證明，和避免不好直接從實踐證明的一些複雜現象，卻可以從公理及其他定理加以證明．這就是在幾何知識的發展過程中必須引用理論方法，及理論方法倒反後來居上的原因．而引用理論方法也就必然劃分成用理論證明的定理，和不能用理論證明的公理了．其次，客觀事物是互相聯系、互相依賴、互相制約着的，某些事物具備某些性質，則與這些事物關聯的，或由這些事物構成的一些新事物，就可能具備某些與之有關的性質．因之，就有用公理及已證明的定理去證明新定理的可能．因之，我們在認識新事物的方法上，也往往先觀察新事物的某些現象，猜想它可能具有某些性質，然後利用與之有關的諸事物，或構成它的諸事物之已知性質，及新事物的部分性質，從理論上說明新事物必須具備某些性質（如同利用直線、角等性質，去證明三角形的某些性質似的）．像這樣的認識過程，就成爲我們研究新事物的過程，而認識所得的結果的敍述，在幾何上就成爲現在所習用的定理了．然而我們必須認清，新事物的性質，畢竟是新事物的客觀實際反映，是從新事物的研究當中得來的，從舊的公理和定理推演，只能成爲研究新事物的先導之一，而不應過分誇大它的作用，甚至認爲依靠定義和公理，就可以推演出全部幾何．

公理在幾何上既然佔有特殊地位，那末選做公理的幾何性質，有沒有特殊的地方呢？班加雷所提的公理條件，確是很

寶貴的意見．幾何性質可以當做公理的第一個條件，就是這些性質是眞實的、正確的；也就是說，是客觀實際的反映．試問歐氏幾何公理，對於平面幾何有一個是不眞實的嗎？是與實際不符的嗎？當然公理的正確性是對一定範圍的幾何實際講的，假使客觀的實際不同，公理也就有了改變，像在非歐幾何（雙曲線幾何、橢圓幾何）裏面，平行線公理就與歐氏不同，從此更可以說明公理的基礎，是客觀的實際．班加雷所提的和諧性(卽不自矛盾性)本質上就是要求公理具有客觀的眞實性，不過他的敍述卻披了唯心的外衣．做公理的幾何性質，還應當適合第二個條件，就是這些性質是更基本些，把它們當做公理，來證明其他定理就能證的更多，方法更簡單，而且公理的總數也少．反過來，要是換上另外一些命題當公理，就需要更多數目的公理，而且定理的證明也不簡便，這正像所有的商品都可以當做交換媒介，然而最適宜的交換媒介卻是金子和銀子．做公理的幾何性質的第三個條件，就是這些性質，愈簡單明瞭，愈容易爲人類實踐所證明愈好．一般人說，公理是不證自明的，正是反映這點．但這一點可以允許例外，因爲要適應研究問題的需要，有時還須把難於用實踐證明的命題列做公理，像平行線公理，就是一個例子．第四個條件，整個幾何體系中的公理必須剛好够用（亦卽班加雷所講的完全性與獨立性），沒有足够數目的公理，證題就不够用，把可以證明的命題當公理，也沒有必要，所以這個條件也很自然．

從公理敍述幾何，並且對公理限制很嚴，使它儘量的簡單和減少，這還有一個很大的好處，就是借用起來方便．例如非歐幾何就可以借用歐氏幾何中未用平行線等公理證明的定理，因而可以從歐氏幾何的性質得出非歐幾何的一些性質來．這種情況，曾給近代數學一個很大的影響和推動．例如近世代數，就往往規定最簡單和最抽象的定義，把適合某幾個性質的集合，叫做羣、環、體……等，以便把從這些基本特性研究出來的結果，更廣泛地使用到很多具體東西上面．代數上這種發展，從具體到抽象，從個別到一般，雖然是代數發展本身的要求，卻也受些公理化的影響．

總結以上的敍述，我們可以說：公理必須用實踐證明，公理是與一定的實際相符合，所以雖然不用理論證明，它們還是可靠的，沒有絲毫可以懷疑的地方．幾何從定義、公理到定理的編排方法，是符合認識論的，是便利學術的研究和學習的，基本上是對的，也是好的．至於缺點方面，到後面再詳細去談．

2. 理論幾何與實驗幾何

講到理論幾何，可以拿歐幾里德的幾何原本做代表．他把許多零星的幾何知識組織成系統知識，把許多感性的幾何知識提高成理性知識．通過了幾何原本，不但傳播了幾何知識，而且推動整個數學，重視理論和證明，所起的影響基本上是好的．但在流傳的過程中，也引起一些輕視實際、輕視感性認

識的缺點．首先，就是以後的數學家對點、線、面、體及幾何公理都產生一些唯心解釋，阻礙了對幾何的正確了解．其次，某些研究數學的人，忽視了實際事物的觀察實驗，而把從舊定理推尋新定理當做首要事情．忘記了實際是理論最豐富的泉源，甚至認爲可以任意規定一套定義和公理，從此推演出另外的一套幾何．再次，幾何原本的定義和公理，聯系到感覺的地方太少，初學的時候總是覺得太抽象，而定理和定理的證明也使人感覺突然，不知道它們是怎樣得來的．另外，還有一些人曾經把歐氏幾何的推演方法用到社會科學方面，主觀地規定幾條道理，說是天經地義，再根據自己規定的道理，去證明他所企圖證明的東西，以服務於資產階級，這種理論看起來好像很合科學，實際上一點也沒有道理．

用什麼方法來糾正以上的缺點呢？有人提倡實驗幾何，這是重視實際．但只憑實驗，不能嚴格地證明幾何定理，於是又在實驗幾何之後，再來一個理論幾何，重走歐氏的老路；事實上還是沒有解決問題．

解決上面問題的正確方向，應當本着辯證唯物的精神，把實驗證明與理論證明相結合，把感性認識與理性認識相結合．當然這是一件新的工作，不是一下就能做好，本書只是一個初步的嘗試．在本章裏，想說明點、線、面、體諸概念，是物質的點、線、面、體的‘直觀及表象在概念上的加工’；說明公理性質，來顯示幾何的基礎不是定義和公理，而是客觀實際．在以下

各章裏，也力圖說明直線形的公理、定理及其證明都是客觀的幾何性質反映．都是從幾何圖形的觀察試驗，發現它可能具有某種性質，而後加以理論證明（用定義、公理及已證的定理證明），精確地說明它是否眞正具有某種性質．而這些證明，有的能從觀察試驗當中直接引導或啟示出來，有的須要摸索試探，反覆思考，添出許多補助線，把原來的圖形放到更開展、更複雜的局面下加以研究，證明纔能被找出來；帶着改造自然、認識自然的深刻意義．這些證明雖然顯示出它們有高級和低級之分（界限自然不是那樣明顯），但總的講，都是從事物互相聯系當中考察出來，從人們實踐活動當中考察出來的．定理的產生如此，定理證明的產生還是如此．這樣的敍述方式，是企圖反映從感性到理性的認識過程，從提出問題到分析問題、解決問題的過程．綆短汲深，想到未必就能做到，但這是一個正確的方向，也是唯一的方向．拋磚引玉，希望今後在這方面能有更多的人與更多的作品出現，久而久之，一定可以解決這個問題．

3. 點線面體觀念

人類很早就有了點、線、面、體的觀念，這觀念絕不是從一個物體或一次接觸當中得來，而是從無數萬個物體和無數萬次接觸當中得來，尤其是要從長期的生產鬥爭當中，纔能逐漸形成起來，因此我們很難具體地說出它的起源．例如：

(1) 在很古的時候，人們過着狩獵生活，他們打到一匹大的野獸，就覺得比打到一匹小的野獸好，住一所大的窰洞或房子，就覺得比住一所小的窰洞或房子好；對於野獸、窰洞或房子的形狀大小的觀念，就是我們的體的觀念．

(2) 有些時候，人們爲着實際需要，不去注意整個物體的形狀大小，而專門注意它的表面．例如耕種田地，耕種的天數愈多，所耕的面積越大；草原地區愈廣，可供牧畜的時間越長．以上種種事實，使人們的頭腦中不但有了體的觀念，而且也逐漸有了面的觀念

(3) 更進一步，人們對於物體，不但注意它們的表面，而且注意到它的邊緣，注意到它的交界地方．另外還有一些東西，像繩子、細線等，給我們最深刻的印象是長短，而寬窄粗細就不很重要，於是在我們的腦子裏又引起了線的觀念．

(4) 最後，天上閃爍的星，地下極小的塵埃，針的尖端，桌子的拐角，它們都是非常微小，甚至小到人們不容易看清，對於這些東西，我們往往都把它們當做小點，而有着點的觀念．

總之，人類在和無數物體的無數次接觸當中，形成了點、線、面、體諸觀念，但這只是原始的感性的點、線、面、體觀念，我們還得進一步去分析它．

4. 點線面體觀念之分析

現在我們更進一步去問：點、線、面、體究竟是指什麼？它

們中間到底有哪些差別?

我們仔細分析一下，就可以看出，我們所講的體，是指物體整個的形狀大小；對於面就只講某一物體的表面，不再管它的厚薄；至於線呢，就只問它是多長，而不去管它們的寬窄、厚薄或粗細；對於點就只講它的位置，再沒有什麼形狀大小之分．我們日常的點、線、面、體觀念就是如此．

根據以上的分析，我們就可以得出下面的點、線、面、體諸概念的規定．

5. 點線面體概念的規定

(1) 體　對於自然界任何具體的物體加以抽象，就是把它看成只有幾何性質，如形狀、大小和位置，而沒有其他的性質，如輕重、顏色、組織成分等等，這一種物體的抽象就叫做體，或叫做幾何學上的體．

(2) 面　像上面講的那樣抽象的體的表面叫做面，面的特點，是沒有厚薄(規定面爲體的表面，而且沒有厚薄，這樣纔能反映人們對面不管其厚薄的特點．同時也必須規定面無厚薄，纔能與體分開．以下關於點、線的概念的規定，也有同樣的精神)．

(3) 線　體內或面上的極細的線叫做線，線的特點，只有長短，而無寬窄、厚薄或粗細．

(4) 點　是一個極小的點，僅有位置，而沒有什麼大小形

狀的不同*.

6. 關於規定的點線面體的存在問題

第一，像上面所規定的點、線、面、體，是否眞實存在呢?

是的，像上面所講的點、線、面，是不單獨存在的，紙片雖然很薄，還是有厚，毛髮雖然很細，還是有粗，塵埃雖然很小，也還是體，所以沒有一個獨立存在的像上面規定的物質的點、線、面. 但規定的點、線、面，若與具體的物體比較（如桌面、桌邊、桌拐等），就可以看出，規定的點、線、面與所有物體上的點、線、面近似. 又如物體的厚甚小，或不管其厚薄時，就得到規定的面（點和線的情況與此類似）. 於是知道規定的面是具體物體面的抽象的、一般的代表，正像人的概念代表具體的一切的人一樣，所以它們是客觀現實在人們意識當中的反映，有着它們唯物的本性的.

其實，體的規定也是一樣，我們在世界上找不出沒有顏

* 對於點、線、面、體，很難下一個淸楚明白、令人滿意的簡短定義. 上述點、線、面、體概念的規定，一方面是描繪它們的形象（如說物體、表面、細線、小點等）；一方面分別指出它們的特點（如所具有的長短、寬窄、厚薄等），想綜合這兩方面來確立點、線、面、體的概念. 同時，在規定面的概念時，不避免表面這個觀念，因爲這裏的敍述精神，不在於把它的基礎放到用其他名詞的解釋上，而在於把它的基礎放到人們對實際物體的面的反映上，所以就引用了人們習用的表面這個名詞. 點、線、體的敍述情況與此類似.