数学統計法推測洪水的原理

万 良 逸 著

人 民 鉄 道 出 版 社

目 次

I 前 言

在桥渡設計中，当有若干年洪水記錄以数学統計法推測設計洪水时，其計算的步驟在設計規程及桥梁水文書籍中均已列举，並备有計算頻率的專表可查，但对其計算原理及各計算公式的由來則多未詳述。洪水推測的原理涉及到机率理論，該理論一般載於統計学及最小二乘方等書籍中。为了讀者对此能有較詳細的了解，著者將洪水推測的原理詳加說明，有关的数学公式亦詳加引証，以免讀者参閱他書之劳。

計算頻率的專表系福斯特（Foster）根据皮尔生（Pearson）偏态机率曲綫積分而得。本文先將該曲綫介紹，次述及該曲綫对推測洪水的应用。

II 皮尔生机率曲綫

凡一事物中某种現象的發生，均有其一定的遭遇机率。例如測量一段距离，使用的尺度虽已校正，但因其他种种偶然的原因常發生誤差，致各次所測得的長度不尽相同。由多次施測的結果，其与实际距离相近者（即誤差小者）所發生的次数較多；其与实际距离誤差較大者則較少，誤差愈大者則愈少，誤差最大者則不致發生；大於和小於实际距离的誤差所發生的次数趋於相等；这种誤差發生的現象很有規律。洪水發生的情形也有它一定的規律，由观測的結果，得知在某一河流中某种程度的洪水时常發生，較大或較小的洪水則發生較少，最大的洪水則發生更少；但大於和小於某种常見的洪水所發生的次数則不相等，这与測量

距离时誤差所發生的現象不完全相同。各种事物中某种現象遭遇机率的分佈情形均可用机率曲綫來描述。

統計学者皮尔生將机率曲綫分为十三种：計型Ⅰ至Ⅻ及另一常态曲綫。其应用最廣者为常态曲綫，此即高斯（Gauss）曲綫。通常应用的机率紙即按此曲綫制成。其与洪水机率曲綫最相似者为皮尔生曲綫第Ⅲ型。故本文只介紹上述兩种型式的机率曲綫，其它各型則不述及。

§1. 重复試驗中机率的分佈

假如我們对一个試驗重复地做了 n 次，在每次試驗中某种現象出現的机率是p；現在要來求算在 n 次試驗中这种現象出現 x' 次的机率是若干？

用一个实例來說，假如一个袋內裝有 s 个球，其中有sp个是紅球，其余sq个是白球。在一次試驗中，取得一个紅球的机率是p，取不到紅球的机率是$q=1-p$。如果每次取得的球仍放还袋內，現在要問：假如取了n 次，不論取到紅球的順序怎样，其中能有x'个紅球的机率是若干？

按机率理論，取得x'个紅球的机率假定为$y_{x'}$，則

$$y_{x'}=C^n_{x'}p^{x'}q^{n-x'}$$

亦即

$$y_{x'}=\frac{n!}{x'!(n-x')!}p^{x'}q^{n-x'} \qquad (1)$$

式（1）即等於二項式$(p+q)^n$的展开式中包含$p^{x'}$的那一項。当要取到的紅球个数不同，机率亦隨着改变。各不同数值x'的机率分佈情形，即相应於二項式$(p+q)^n$的展开式中各項的分佈。因此，这种分佈也称为二項式的分佈。

§2. 机率曲綫

按二項式的分佈並非一連續的曲綫，但如n 的数值很大时，

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

各机率的分佈实接近一連續的曲綫，这种曲綫即称为机率曲綫。在实际問題中，某种現象出現的机率 p 常不能預先知道，式（1）也不便应用。为了求得这一連續曲綫的方程可作如下的推演：

如果在 n 次試驗中，要求取得（$x'+1$）个紅球，則其机率 $y_{x'+1}$ 当为

$$y_{x'+1}=C^{n}_{x'+1}\,p^{x'+1}\,q^{n-x'-1}$$

或

$$y_{x'+1}=\frac{n!}{(x'+1)!\,(n-x'-1)!}p^{x'+1}\,q^{n-x'-1} \qquad (2)$$

由式（1）及（2）可得

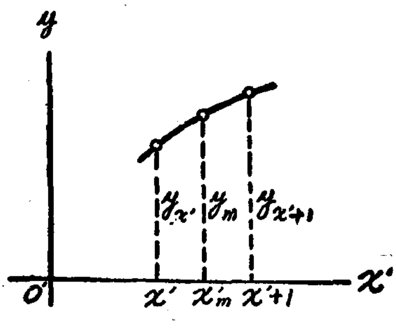
$$\frac{y_{x'+1}}{y_{x'}}=\frac{(n-x')p}{(x'+1)q}$$

由比例关系可得

$$\frac{y_{x'+1}-y_{x'}}{y_{x'+1}+y_{x'}}=\frac{(n-x')p-(x'+1)q}{(n-x')p+(x'+1)q}$$

$$=\frac{np-q-x'}{np+q+(q-p)x'} \qquad (3)$$

取座标軸如圖（1）所示，經过（x'，$y_{x'}$）及（$x'+1$，$y_{x'+1}$）兩点設想有一条能为算式所代表的曲綫。如此，該小段曲綫上的中点（x'_m，y_m）可近似地有下列之关系：



圖（1）

$$\frac{dy_m}{dx'_m}=\frac{y_{x'+1}-y_{x'}}{(x'+1)-x'}$$

$$=y_{x'+1}-y_{x'}$$

$$y_m=\frac{1}{2}(y_{x'+1}+y_{x'})$$

$$x'_m=x'+\frac{1}{2} \text{ 或 } x'=x'_m-\frac{1}{2}$$

將以上各式代入式（3）中，則得

$$\frac{1}{2y_m}\cdot\frac{dy_m}{dx'_m}=\frac{np-q-(x'_m-\frac{1}{2})}{np+q+(q-p)\left(x'_m-\frac{1}{2}\right)}$$

或

$$\frac{1}{y_m}\cdot\frac{dy_m}{dx'_m}=\frac{\left(np-q+\frac{1}{2}\right)-x'_m}{\frac{1}{2}\left[np+q-\frac{1}{2}(q-p)\right]+\frac{1}{2}(q-p)x'_m}\tag{4}$$

去掉 x' 和 y 的註脚 m，上式的一般形式可寫为如下的微分方程式:

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx'}=\frac{A-x'}{B+Cx'}\tag{5}$$

式中 A、B、C 为与式（4）中各部分相对应的恒数項。但式（4）有兩种情形，即 $p=q=\frac{1}{2}$ 及 $p\neq q$ 的情形。前者的机率分佈曲綫为高斯常态曲綫，后者为皮尔生第Ⅲ型偏态曲綫。玆分别述之於后。

§3. 高斯常态曲綫

（a）**曲綫方程的推演** 在式（4）中如 $p=q=\frac{1}{2}$，則式（5）中之 $C=0$，即該微分方程式为

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx'}=\frac{A-x'}{B}$$

或

$$\frac{dy}{y}=\frac{A-x'}{B}dx'$$

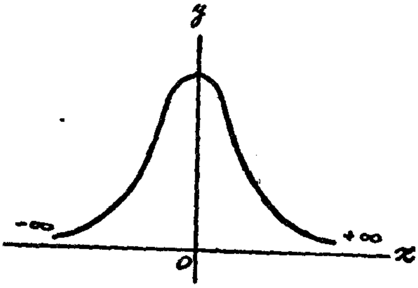
積分之可得

$$y=ke^{-\frac{(A-x')^2}{2B}}\tag{6}$$

式中 k 为積分恒数。由式（4），当$p=q$，顯然B为正值，今假定$\frac{1}{2B}=h^2$。又如將y移軸使$x'=x+A$，由是式（6）可为

$$y=ke^{-h^2x^2} \tag{7}$$

上列方程式中，因y为x的平方函数，故此曲綫与y軸对称，如圖（2）所示。式（7）中之h及k为待定之恒数，但此二恒数並非彼此独立。由二項式，顯然此曲綫与x軸所形成之面積ω为$(p+q)^n=1$。在实际問題中应用此曲綫时，常因座标軸所取的單位不同，其面積有时並不等於1。例如，不以y軸代表机率而代表出現的次数，則其面積为n。实际上我們以后应用該曲綫时，所需者为各部分面積的比值，其总面積等於何值固無关系也。今为在其它情况应用此曲綫时便於讀者更易明了起見，在下式積分中仍書以ω而不以1代之，即



圖（2）

$$k\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2x^2}\,dx=\omega \tag{8}$$

或

$$\int_{0}^{\infty} e^{-h^2x^2}\,dx=\frac{\omega}{2k}$$

为了求得上式的積分，在左右兩項各乘以h，並令$t=hx$及$dt=hdx$，由是

$$\int_{0}^{\infty} e^{-t^2}\,dt=\int_{0}^{\infty} e^{-h^2x^2}\,hdx=\frac{\omega h}{2k} \tag{9}$$

在$\int_{0}^{\infty} e^{-t^2}\,dt$中，其積分界限是由0至$\infty$，而变数$t$可看成任一变

数，故可將$\int_0^\infty e^{-t^2}dt$寫成$\int_0^\infty e^{-h^2}dh$，其值是恒等的，於是

$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt=\int_0^\infty e^{-h^2}dh \tag{10}$$

以式（9）及（10）相乘，則

$$\left[\int_0^\infty e^{-t^2}dt\right]^2=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-h^2(1+x^2)}hdxdh$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{-dx}{1+x^2}\int_0^\infty e^{-h^2(1+x^2)}(-2h)(1+x^2)dh$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{-dx}{1+x^2}\cdot\left[e^{-h^2(1+x^2)}\right]_{h=0}^{h=\infty}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\left[\operatorname{tg}^{-1}x\right]_0^\infty=\frac{\pi}{4}$$

所以

$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{\omega h}{2k}$$

由是

$$k=\frac{\omega h}{\sqrt{\pi}} \tag{11}$$

上式即为恒数h与k的关系，將它代入式（7）中得机率曲綫方程为

$$y=\frac{\omega h}{\sqrt{\pi}}\ e^{-h^2x^2} \tag{12}$$

該式即为高斯常态曲綫方程，式中 h 为一待定的恒数（通常均使$\omega=1$）。

（6）**恒数h与面積迴轉半徑的关系**　今以 i_y 表示机率曲綫下的面積繞y軸的迴轉半徑，則

$$i_y^2=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}x^2y\,dx}{\omega}=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^2\,e^{-h^2x^2}\,dx \tag{13}$$

为了求得上式的積分，由式（8）及（11）得

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-h^2x^2}\,dx=\frac{\omega}{k}=\frac{\omega}{\omega h/\sqrt{\pi}}=\frac{\sqrt{\pi}}{h}$$

把h当成变数而將上式微分，則得

$$-2h\int_{-\infty}^{\infty}x^2\,e^{-h^2x^2}\,dx=-\frac{\sqrt{\pi}}{h^2}$$

或

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2\,e^{-h^2x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2h^3}$$

將上式代入式（13）中，得

$$i_y^2=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2h^3}=\frac{1}{2h^2}$$

或

$$h=\frac{1}{i_y\sqrt{2}}$$

由是式（12）所表示的常态曲綫方程亦可寫为

$$y=\frac{\omega}{i_y\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2i_y^2} \tag{14}$$

式中i_y仍为未定的恒数。在最小二乘方中i_y的算式与均方差相同，通常以均方差的符号σ代之。由於在校的同学多未学習过最小二乘方，故暫不引入該概念而俟以后再述之。

§4. 皮尔生曲綫第Ⅲ型

（a）曲綫方程的推演 当$p\neq q$时，由式（5）机率曲綫

的微分方程为

$$\frac{dy}{y}=\frac{A-x'}{B+Cx'}dx'=\left(-\frac{1}{C}+\frac{1}{C}\cdot\frac{A+\frac{B}{C}}{\frac{B}{C}+x'}\right)dx'$$

積分之，得

$$\ln y=-\frac{x'}{C}+\frac{A+\frac{B}{C}}{C}\ln\left(\frac{B}{C}+x'\right)+D$$

式中D为積分恒数。將y移軸使$x'=x+A$，則

$$\ln y=-\frac{x}{C}+\frac{A+\frac{B}{C}}{C}\ln\left(A+\frac{B}{C}+x\right)+\left(D-\frac{A}{C}\right)$$

令 $A+\frac{B}{C}=a$，　及 $D-\frac{A}{C}=\ln E$，則

$$\ln y=-\frac{x}{C}+\frac{a}{C}\ln(a+x)+\ln E$$

由是

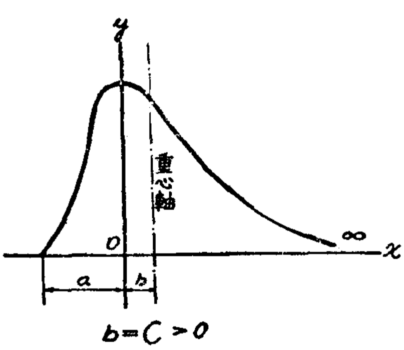
$$y=E(a+x)^{\frac{a}{C}}e^{-\frac{x}{C}}$$

或

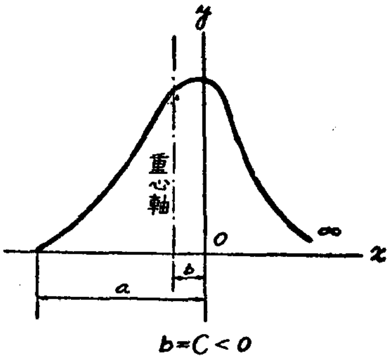
$$y=Ea^{\frac{a}{C}}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{a}{C}}e^{-\frac{x}{C}} \tag{15}$$

式中a、C、E均为待定的恒数。此方程所代表的曲綫如圖（3）或圖（4）所示，因 $C=\frac{1}{2}(q-p)$ 可能为正值亦可能为負值。此項曲綫左右不对称，形成偏态，如圖（3）者称为正偏，如圖（4）者称为負偏。我們以后分析洪水的机率曲綫时多为正偏情形，以下均从正偏情形言之。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com



圖（3）



圖（4）

曲綫的左端有一下限，即 $x=-a$，$y=0$；曲綫的最大縱座标在y軸处，假定为y_0，由式（15）可知
当$x=0$，

$$y_0=Ea^{\frac{a}{C}}$$

曲綫面積的重心軸与y軸之距离称为偏态半徑，假定为b，而b即等於C，此点容后証明。（註：一般書籍中偏态半徑均以符号 d 表示，本文为避免与微分符号相同而改用b示之。）由是式(15)可寫为

$$y=y_0\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{a}{b}}e^{-\frac{x}{b}} \tag{16}$$

上式即为皮尔生第Ⅲ型的曲綫方程，这种曲綫我們簡称为偏态曲綫。式中y_0、a、b为待定之恒数，此三恒数只有兩个为独立的恒数，因曲綫下的面積为 $(p+q)^n$恒等於1。同前述理由仍以ω示此曲綫下的面積，即

$$\int_{-a}^{\infty}ydx=\omega \tag{17}$$

（6）**曲綫方程的改变**　为了積分的方便將偏态曲綫方程作

如下的改变:

令

$$\frac{a+x}{b}=Z \text{ 及 } \frac{a}{b}=\lambda$$

由是

$$x=bZ-a=b(Z-\lambda)$$

$$dx=bdZ$$

將上列各值代入式（16）中，則得

$$y=y_o\left(\frac{e}{\lambda}\right)^{\lambda}Z^{\lambda}e^{-Z} \tag{18}$$

由是

$$\omega=\int_{-a}^{\infty}ydx=y_o\left(\frac{e}{\lambda}\right)^{\lambda}b\int_{o}^{\infty}Z^{\lambda}e^{-Z}dZ$$

$$=y_o\left(\frac{e}{\lambda}\right)^{\lambda}b\Gamma(\lambda+1)$$

$$y_o=\left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda}\frac{\omega}{b\Gamma(\lambda+1)} \tag{19}$$

式中

$$\Gamma(\lambda+1)=\int_{o}^{\infty}Z^{\lambda}e^{-Z}dZ \tag{20}$$

將式（19）代入式（18），由是偏态曲綫的方程可为

$$y=\frac{\omega}{b\Gamma(\lambda+1)}Z^{\lambda}e^{-Z}=\omega cZ^{\lambda}e^{-Z} \tag{21}$$

式中

$$C=\frac{1}{b\Gamma(\lambda+1)}$$

（B）**Γ函数的特性**　式（20）的積分式在数学中称为Γ函数，这种函数具有下列的特性。今用部分積分法求此函数的積分为

$$\Gamma(\lambda+1)=\int_0^\infty Z^\lambda e^{-Z}dZ=\int_0^\infty Z^\lambda d(-e^{-Z})$$

$$=\left[-Z^\lambda e^{-Z}\right]_0^\infty-\int_0^\infty(-e^{-Z})\lambda Z^{\lambda-1}dZ$$

$$=0+\lambda\int_0^\infty Z^{\lambda-1}e^{-Z}dZ=\lambda\Gamma(\lambda)$$

重复应用上面的步驟，可得

$$\Gamma(\lambda+1)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-k)\Gamma(\lambda-k)$$

式中k为小於λ的正整数。如λ亦为正整数，则

$$\Gamma(\lambda+1)=\lambda!$$

对於非整数的Γ函数，一般積分手册中备有專表可查，本文从略。

（r）**恒数a、b与面積静矩的关系** 偏态机率曲綫的方程由式（21）來看：ω为一定值，其未定的恒数只有兩个，即c及λ或为a及b。由是可知，当a及b兩个恒数可以决定时，则此曲綫的方程即可得出一定的形式；換句話說，这一机率曲綫的形狀只是和a及b有关的。为了决定这些恒数和曲綫形狀的关系，讓我們以J_m表示該曲綫面積繞重心軸的m次静矩，使$m=1$，2，3並計算其一次、二次和三次的静矩，即J_1、J_2、J_3等。J_m的定义为

$$J_m=\int_{-a}^\infty(x-b)^m y dx \tag{22}$$

或

$$J_m=\omega c b^{m+1}\int_0^\infty(Z-\lambda-1)^m Z^\lambda e^{-Z}dZ \tag{23}$$

今計算其一次静矩J_1，如果計算的結果能得到$J_1=0$，那么亦即前述$C=b$为重心軸所在的位置之明証。由式（23）使$m=1$，则

$$J_1=\omega cb^2\int_0^\infty (Z-\lambda-1)Z^\lambda e^{-Z}dZ$$

$$=\omega cb^2\left[\int_0^\infty Z^{\lambda+1}e^{-Z}dZ-(\lambda+1)\int_0^\infty Z^\lambda e^{-Z}dZ\right]$$

$$=\omega cb^2[\Gamma(\lambda+2)-(\lambda+1)\Gamma(\lambda+1)]$$

$$=\omega cb^2[(\lambda+1)\Gamma(\lambda+1)-(\lambda+1)\Gamma(\lambda+1)]=0$$

由式（23）計算其二次及三次静矩如下：

$$J_2=\omega cb^3\int_0^\infty (Z-\lambda-1)^2Z^\lambda e^{-Z}dZ$$

$$=\omega cb^3\int_0^\infty \left[Z^2-2(\lambda+1)Z+(\lambda+1)^2\right]Z^\lambda e^{-Z}dZ$$

$$=\omega cb^3\left[\Gamma(\lambda+3)-2(\lambda+1)\Gamma(\lambda+2)+(\lambda+1)^2\Gamma(\lambda+1)\right]$$

$$=\omega cb^3\left[(\lambda+2)(\lambda+1)-2(\lambda+1)^2+(\lambda+1)^2\right]\Gamma(\lambda+1)$$

$$=\omega cb^3(\lambda+1)\Gamma(\lambda+1)=\omega b^2(\lambda+1)=\omega b(a+b) \tag{24}$$

同理可得

$$J_3=\omega cb^4\int_0^\infty (Z-\lambda-1)^3Z^\lambda e^{-Z}dZ$$

$$=2\omega cb^4(\lambda+1)\Gamma(\lambda+1)=2\omega b^2(a+b) \tag{25}$$

命μ_1、μ_2、μ_3之定义如下列方程式中所示，此項μ_1、μ_2、μ_3在統計学中称为一次、二次、三次动差，由上列各式得

$$\mu_1=\frac{J_1}{\omega}=0$$

$$\mu_2=\frac{J_2}{\omega}=b(a+b) \tag{26}$$

$$\mu_3=\frac{J_3}{\omega}=2b^2(a+b) \tag{27}$$

解方程式（26）及（27）可得

$$b=\frac{\mu_3}{2\mu} \tag{28}$$

$$a+b=\frac{2\mu_2^2}{\mu_3} \tag{29}$$

$$a=\frac{2\mu_2^2}{\mu_3}-\frac{\mu_3}{2\mu_2} \tag{30}$$

由是可知，在皮尔生第Ⅲ型曲綫中，如果μ_2和μ_3可以知道，那么a、b及y_0均可算出，於是偏态曲綫的方程式(16)或(21)就可得到了。至於它在洪水推測的方法中如何应用則於以后述之。

Ⅲ. 洪水的推測——經驗頻率曲綫法

§5. 洪水的頻率

河流發生洪水的次数和大小均难預知。根据統計的資料，大体言之，中級的洪水比較常見，較大的洪水則出現較少，而最大的洪水更所罕見。所謂常見或少見乃比較之詞，我們要以数学的方式來表示始有具体的印像。例如，某种洪水出現很少，但究竟少至何种程度?某种洪水时常發生，究竟100年中可能發生几次?或者若干年可能發生一次？因此我們須考慮各种洪水遭遇机会多少的問題，以便在設計时对於未來年代的洪水，可以預測到某种遭遇机会的洪水大小如何。在未來年代中某一洪水遭遇的机会实难确切断定，但对於自然界未來时間中可能發生的現象，我們可借助於自然界曾經發生过的現象來推測它。

例如，某一河流有50年的洪水記錄，假定在这50年中洪水变化的情形可以代表任何时間中一般的变化，那么每年就代表全部时間的1/50或2％。如果將这50年洪水量的記錄按大小遞減的次序排列为$Q_1 \geqslant Q_2 \geqslant Q_3 \geqslant \cdots\cdots \geqslant Q_{50}$，那么遭遇到超出（等於或大於）$Q_1$的洪水的机会以所佔的时間來表示为1/50，遭遇到超出Q_2的洪水的机会为2/50。依此，如記錄年数为n，遭遇到Q_m的机会为m/n，其中m为遞減次序中的級次。如以百分数表示，即

$$P=\frac{m}{n}\cdot 100 \tag{31}$$

上述超出某一程度的洪水所遭遇的机会称为某一洪水的频率，或者說某一頻率的洪水。式中P示頻率的%。如Q_1的頻率为2%，这一頻率的意义是指任何一年中皆有2%的机会遭遇到Q_1的洪水，並不是指必須在50年之后才有遭遇到Q_1一次的洪水，也不是說在未來的50年中只可能發生一次Q_1的洪水。

洪水的大小除用頻率表示外，有时也用週期（T）來表示，如上述的Q_1为50年一次的洪水，即週期$T=50$年，Q_2的週期$T=25$年。習慣上对於洪水的大小多用週期來表示，但頻率的意义較为确切。頻率与週期的关系为

$$P=\frac{100}{T} \tag{32}$$

在桥渡設計时，我們要推測較小頻率的洪水，如設計規程規定桥下的孔徑要能保証通过$P=1$%的洪水。頻率$P=1$%的这一意义，也就是說我們要求結構物在通过洪水时有小於而几近1%的不安全性，而有99%的安全性。这样的規定，应当意味着是我們有意地在估計洪水时加入的一种安全因数，使我們可以避免一些不能預料的意外情形。要得出这样規定的設計洪水，那就要从洪水的大小与頻率的关系來决定。

§6. 經驗頻率曲綫

將逐年的洪水量为縱座标，以頻率P（洪水所佔时間的%）为横座标，繪成一曲綫用來表示我們观測到的洪水量与頻率的关系，这样的曲綫称为某河流的經驗頻率曲綫。

当記錄年数較短，繪制經驗頻率曲綫时常發生一种曲綫位置差誤的問題。例如有10个洪水記錄，依遞減次序排列如表（1）。每个記錄所佔的时間百分数为10%。今依式（31）計算各級洪水的頻率如表（1）中第三行所示，然后將記錄表示如圖（5）。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com