平面几何学——面積

林鶴一　武田登三著
黃　元　吉　譯

商　务　印　書　館

平面几何学

面积

林鶴一　武田登三著
黄元吉譯

商务印書館

平面几何学——面积

林鶴一　武田登三著

黃元吉譯

商務印書館出版

北京東總布胡同10號

〔北京市書刊出版業營業許可證出字第107號〕

新華書店總經售

上海圭記印刷廠印刷

統一書號 13017·121

1933年4月初版	開本 787×1092 1/32
1958年10月10版（修訂本）	字數 50,000
1958年10月上海第3次印刷	印數 54,301—64,300
印張 2 12/16	定價(7) ¥0.26

目 次

第一章 矩形的面积

預备知識。

1. 平面形的**面积**，或簡單称做**积**，是指此形内所包含的平面的量的多少。

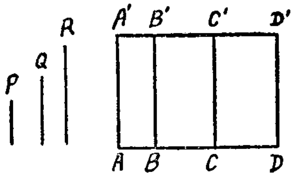
2. 兩个直綫形能叠合时，它們一定相等。反过来說，兩直綫形面积相等时它們未必恰能叠合。因为有这种区别，所以兩个能叠合的直綫形，特别叫做**全等形**。用“≡”这記号。

3. 以給定的二綫段为矩形的二鄰边，則此矩形，即称为**所給二綫段所包的矩形**。如 a, b 为所給的二綫段，則此二綫段所包的矩形，即以 ab 这記号来表示。如果要表示 $(AB+CD)$ 及 $(A'B'+C'D')$ 二綫段所包的矩形，可用 $(AB+CD)(A'B'+C'D')$ 这記号来表示。但这是表示矩形的記号，与代数学乘积的記号，意义不同。

4. 以所給一綫段，为正方形的一边，則这正方形，就称为**所給一綫段上的正方形**。如 AB 为所給的一綫段，則这一綫段上的正方形，就以 $\overline{AB}^2$ 这記号来表示。这也不与代数学的二次乘冪的意义相同。

5. 于一綫段上任取一点，称为**内分**。于一綫段的延長綫上任取一点，称为**外分**。自分点各至此綫段兩端点形成二个部分，外分所形成的兩部分，容易产生誤会，要特別注意。

定理 1. 某一綫段与另外几个綫段之和所包的矩形，等于这几个綫段各与第一綫段所包各矩形的和。



題意. 設某一綫段为 H，另外几个綫段为 P, Q, R，則

$$H\cdot(P+Q+R)=H\cdot P+H\cdot Q+H\cdot R.$$

証. $AA'=H$, $AB=P$, $BC=Q$, $CD=R$.

$\therefore\quad AD=P+Q+R.$

作 AA', AD 所包的矩形 $ADD'A'$，

由 B, C 兩点，作 AD 的垂綫，与 $A'D'$ 相交于 B', C' 兩点。

則 $\quad \square AD'=\square AB'+\square BC'+\square CD'$。

但 $\quad \square AD'=H\cdot(P+Q+R)$，

$\square AB'=H\cdot P$，

$\square BC'=H\cdot Q$，

$\square CD'=H\cdot R$。

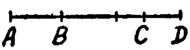
故 $\quad H\cdot(P+Q+R)=H\cdot P+H\cdot Q+H\cdot R$。

注意. 这定理的演算式，与代数学公式 $m(a+b+c)=ma+mb+mc$ 虽然相当。但其意义，各不相同。因为代数学所用的文字指的是数。这定理所用的文字，指的是直綫，而不是数。所以几何学的式子，与代数学的式子要区别开来。

系. 同以一綫段为一边的各矩形的和，等于相同的一边与其他不同的边的和所包的矩形。

主要問題 1. 于一直綫上，順次取 A, B, C, D 四点，可以得到下面的式子：

$$AC\cdot BD=AB\cdot CD+AD\cdot BC.$$ 試証明之。



証. $AC\cdot BD=(AB+BC)\cdot BD$

$=AB\cdot BD+BC\cdot BD$

$=AB\cdot(CD+BC)+BC\cdot BD$

$=AB\cdot CD+AB\cdot BC+BC\cdot BD$

$=AB\cdot CD+(AB+BD)\cdot BC$

$=AB\cdot CD+AD\cdot BC$

注意. 此問題就是尤拉(Euler)定理。

習 題 I

1. 某二綫段之差与另外一綫段所包之矩形，等于此二綫段各与那第三綫段所包兩矩形的差。

2. 二矩形有一边相同时，此二矩形之差，等于相同的一边与另外不同的二边之差所包的矩形。

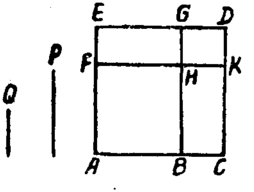
3. 一綫段被內分或外分为二部分，則全綫上的正方形，分别等于二部分各与全綫所包兩矩形之和或差。

4. 二綫段各分为二部分則二全綫所包之矩形，等于一綫段上之二部分各与他綫段上二部分所包各矩形的和。

注意. 这与代数学公式

$$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd \text{ 相当}$$

定理 2. 二綫段之和上的正方形，等于各綫段上正方形之和加二綫段所包矩形的二倍。



題意. P, Q 为二綫段，

$$(P+Q)^2=P^2+Q^2+2P\cdot Q$$

証. 于直綫 ABC 上，

取 $AB=P$, $BC=Q$, 然后作 AC 上的正方形 $ACDE$。由 B 点作 AC 之垂綫 BG, ED 交于 G。

又于 AE 上取 $AF=P$, 由 F 点作 AE 之垂綫 FK。与 CD 交于 K。FK, BG 之交点为 H。

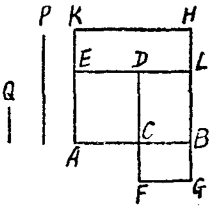
如是則 $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{HK}^2+KC\cdot BC+FH\cdot FE.$

即 $$(P+Q)^2=P^2+Q^2+P\cdot Q+P\cdot Q$$
$$=P^2+Q^2+2P\cdot Q。$$

第二种証法. $$(P+Q)^2=(P+Q)(P+Q)$$
$$=(P+Q)\cdot P+(P+Q)\cdot Q \qquad [定理 1]$$
$$=P^2+P\cdot Q+P\cdot Q+Q^2 \qquad [定理 1]$$
$$=P^2+2P\cdot Q+Q^2。$$

注意. 此定理与代数学公式
$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$
虽然相当。然其意义各不相同。

定理 3. 二綫段之差上的正方形，等于各綫段上正方形之和减二綫段所包矩形之二倍。



題意. P, Q 为二綫段
$$(P-Q)^2=P^2+Q^2-2PQ。$$

証. 于直綫 ACB 上取 $AB=P$，$CB=Q$，然后作 AC 上的正方形 $ACDE$，又作 AB 上的正方形 $ABHK$，而 BC 上的正方形 $BCFG$，系作于反对之側。

于是 AEK，FCD，GBH 各成为一直綫。延長 ED，使与 BH 交于 L。

于是 $$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-KH\cdot KE-FD\cdot FG$$
$$=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-AB\cdot BC-AB\cdot BC$$
$$=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2AB\cdot BC。$$

即 $$(P-Q)^2=P^2+Q^2-2P\cdot Q。$$

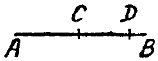
第二种証法. $$(P-Q)^2=(P-Q)(P-Q)$$
$$=(P-Q)\cdot P-(P-Q)\cdot Q$$
$$=P^2-P\cdot Q-P\cdot Q+Q^2$$
$$=P^2+Q^2-2P\cdot Q。$$

注意. 这与代数学公式
$$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab \text{ 相当。}$$

主要問題2. 將 AB 綫段二等分于 C 点，又任意將它分于 D 点,則得到下面的式子:

$$\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=\overline{2AC}^2+\overline{2CD}^2,\text{試証明之。}$$

証.
$$\begin{aligned}\overline{AD}^2&=(AC+CD)^2\\&=\overline{AC}^2+\overline{CD}^2+2AC\cdot CD\cdots\cdots(1)\\\overline{BD}^2&=(BC-CD)^2\\&=(AC-CD)^2\\&=\overline{AC}^2+\overline{CD}^2-2AC\cdot CD\cdots\cdots(2)\end{aligned}$$



$(1)+(2)\cdots\cdots\cdots\ \overline{AD}^2+\overline{BD}^2=\overline{2AC}^2+\overline{2CD}^2$。

習　題　II

1. 設 C 为綫段 AB 之中点，則 $\overline{AB}^2=4\overline{AC}^2$，試証明之。

2. 由二綫段之和的正方形，減其差的正方形，必恰巧等于二綫段所包矩形的四倍。

3. 將所給的綫段分为三部分,使每一部分上正方形的和为最小。

4. 將所給的綫段分为三部分，則全綫上之正方形等于各部分上正方形之和加不同二部分所包矩形的兩倍。

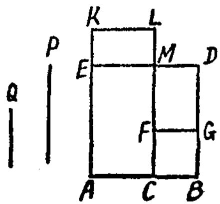
注意. 本題与代數学公式

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\ \text{相当。}$$

5. 分 AB 綫段于 C。令 $\overline{AC}^2=2\overline{BC}^2$，得到下面的式子:

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2AB\cdot AC,\ \text{試証明之。}$$

6. 分 AB 綫段于 C，令 $AC\cdot AB=\overline{BC}^2$，得到下面的式子: $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=3\overline{BC}^2$，試証明之。



定理4. 二綫段上各正方形之差，等于二綫段之和与差所包之矩形。

題意. $P\cdot Q$ 为二綫段。　　$P>Q$

当 $$P^2-Q^2=(P+Q)(P-Q)$$

証. 作 AB，令等于 P。

于 AB 上取 BC 等于 Q，所以 AC 等于 $P-Q$。

再于 AB，BC 上各作正方形 $ABDE$，$BCFG$。

延長 AE，令 $EK=Q$。

延長 CF，令 $FL=P$，且与 ED 交于 M。

于是 $\overline{AB}^2-\overline{BC}^2=AC.AE+FG\cdot FM$。

然而 $FG\cdot FM=EM\cdot EK$

故
$$\begin{aligned}\overline{AB}^2-\overline{BC}^2&=AK\cdot AC\\&=(AE+EK)(AB-BC)\\&=(AB-BC)(AB-BC)。\end{aligned}$$

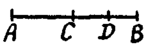
$$P^2-Q^2=(P+Q)(P-Q)。$$

注意. 此定理与代数学公式

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$相当。

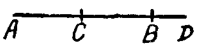
主要問題 3. 分一綫段为二部分，此二部分所包之矩形，等于半綫段上之正方形与由中点至分点間距离上正方形之差。

題意. C 为綫段 AB 的中点，D 为任意的分点，当



$$AD\cdot BD=\overline{AC}^2-\overline{CD}^2$$

証.
$$\begin{aligned}AD\cdot BD&=(AC+CD)(BC-CD)\\&=(AC+CD)(AC-CD)\\&=\overline{AC}^2-\overline{CD}^2\qquad [定理 4]\end{aligned}$$



習 題 III

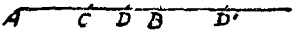
1. 將綫段 AB 二等分于 C，又將它任意分于 D，得到下面的式子：
$\overline{AD}^2-\overline{BD}^2=2AB\cdot CD$，試証明之。

2. 各矩形二边的和有定長。則在这些矩形中面积最大者，其二边

必相等，試証明之。

3．在周界相等的各矩形中求面积最大的矩形。

4．將綫段 AB，内分或外分于 D，D'，而 C 为 AB 的中点得到下面的式子：



$$\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=4\overline{CD}^2+2AD\cdot BD$$

及 $\overline{AD'}^2+\overline{BD'}^2=4\overline{CD'}^2-2AD'\cdot BD'$，試証明之。

第二章　平面形的面积

第一节　直綫形的面积

預备知識。

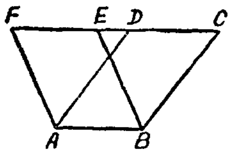
1. 平行四边形以它的任意一边为底边，底边与其对边的距离，就是平行四边形的高。矩形以它的任意一边为底边，底边的鄰边，就是矩形的高。所謂矩形的底边和高，实际上就是它的兩个鄰边。任取其一为底边则另一个就是高。

2. 三角形由其頂点至底边作垂綫，此垂綫就是三角形之高。

3. 梯形的高就是平行的二边間的距离，而平行的二边都是底边，分别叫做**上底**与**下底**。

4. 于平行四边形对角綫上任取一点，由此点作平行于各边的直綫，就把原形分为四个平行四边形。其中，有二个以原对角綫为对角綫，故称为**附于对角綫的平行四边形**。其他二个称为**余形**。

定理 5. 凡平行四边形，有同一底边，又同夾于二平行綫之間，則它們的面积必相等。



題意. $AB \parallel FC$ 則

$\square ABCD = \square ABEF$

証. 在 $\triangle BCE$，$\triangle ADF$ 內，

$$BC=AD,\ \angle BCE=\angle ADF,$$
$$\angle BEC=\angle AFD$$

∴　　$\triangle BCE=\triangle ADF$.

∴　　四边形 $ABCF-\triangle ADF$

　　$=$四边形 $ABCF-\triangle BCE$。

即　　　　$\square ABCD=\square ABEF$.

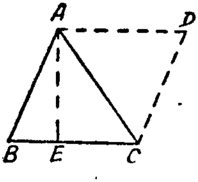
系 1. 平行四边形与同底，等高之矩形等积。

系 2. 凡两平行四边形 $\begin{cases}\text{等底，等高的，必等积。}\\\text{等底，等积的，必等高。}\\\text{等高，等积的，必等底。}\end{cases}$

定理 6. 三角形的面积，等于同底，等高的矩形的面积的一半。

题意. $\triangle ABC$ 的底边为 BC，高为 AE，则 $\triangle ABC=\frac{1}{2}BC\cdot AE$

証. 由 A，C 两点，各作对边之平行綫，相交于 D。于是 $ABCD$ 为平行四边形。



故　　$\triangle ABC=\frac{1}{2}\square ABCD$

$$=\frac{1}{2}BC\cdot AE。$$

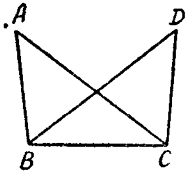
[定理 5，系 1]

系 1. 凡两三角形 $\begin{cases}\text{等底，等高的，必等积。}\\\text{等底，等积的，必等高。}\\\text{等高，等积的，必等底。}\end{cases}$

系 2. 作三角形的任一中綫，则此中綫必恰巧分此三角形为二等分。

主要問題 4. 等积的两个三角形 ABC，DBC，同以 BC

为底边，且同在一侧，则联結它們的頂点的 AD 直綫，必与底边平行。



証． 由 A，D 兩点，各作底边 BC 之垂綫，此二垂綫必相等，(兩三角形同底等积)且平行；

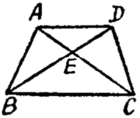
故 AD 平行于 BC。

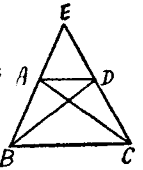
習　題　IV

1．試由面积定理，証明下列的問題。

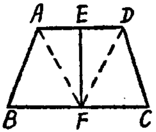
［联結三角形二边之中点的直綫必与第三边平行］。

2．令四边形 $ABCD$ 兩对角綫之交点为 E，若 $\triangle ABE$ 等于 $\triangle DCE$，則 AD 必与 BC 平行。





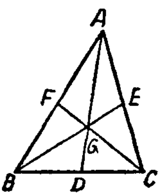
3．令四边形 $ABCD$ 的对边 BA，CD 的延長綫相交于E，若 $\triangle EBD$ 等于 $\triangle EAC$，則此四边形必为梯形。



4．若兩三角形的底边，頂角，面积皆相等，則此兩三角形必为全等。

5．令四边形 $ABCD$ 的对边 AD，BC 之中点依次为 E，F，联結 E，F。若此直綫恰巧分原形为二等分，則此四边形必为梯形。

主要問題 5． **將三角形的重心与各頂点联結，所得到的三直綫必分原三角形为三等分。**



題意． ABC 为三角形，

AD、BE、CF 为三中綫，G 为重心，則

$\triangle ABG=\triangle BCG=\triangle ACG$

証. $\triangle ABE=\triangle CBE$ [定理 6 系 2]

$\triangle AGE=\triangle CGE$ [定理 6 系 2]

$$\frac{\qquad\qquad\qquad\qquad}{\triangle ABE-\triangle AGE=\triangle CBE-\triangle CGE}\ (-$$

$\therefore\qquad \triangle ABG=\triangle BCG.$

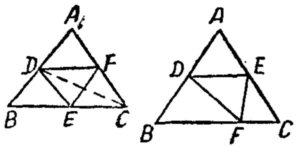
依同理,可証 $\triangle BCG=\triangle ACG$。

習 題 V

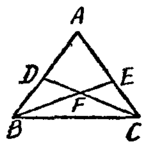
1. 三角形的三中綫,必分面积为六等分。

2. 將三角形每取二边的中点联成直綫,则此三直綫必分原三角形为四等分。

3. 將三角形二边的中点联成直綫,以此直綫为另一三角形的底边,而其頂点則在原形的底边或其延長綫上;則此新作的三角形必等于原三角形的四分之一。

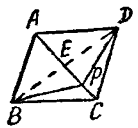


4. 三角形 ABC 的中綫 BE, CD 相交于 F,如是則四边形 $ADFE$ 必适等于三角形 BFC。



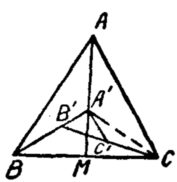
5. 在平行四边形 $ABCD$ 对角綫 AC 上任取 P 点,分別与 B 及 D 联結,得直綫 PB, PD,于是有下式:

$\triangle APB=\triangle APD$,試証明之。

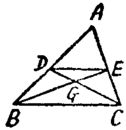


解法注意. 凡平行四边形問題。往往作其对角綫,为解法之輔助。

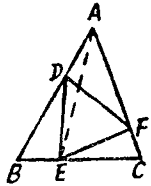
6. AM 为三角形 ABC 的中綫 A', B', C' 依次为 AM, $A'B$, $B'C$ 的中綫。于是三角形 $A'B'C'$ 必等于原三角形的八分之一。



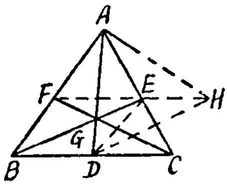
7. 三角形兩个边的中点及重心，共三点。問由此三点所成之三角形为原三角形若干分之一。



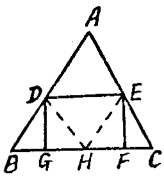
8. 依次在三角形 ABC 各边上分别取等于它的三分之一的綫段，如 AD、BE、CF。則三角形 DEF 必等于原三角形三分之一。



*9. 以三角形的三中綫为三边作一三角形，此三角形必等于原三角形的四分之三。



主要問題 6. 將三角形兩个边的中点联成直綫，以此直綫为平行四边形的底边，而其对边則在原三角形的底边或底边的延長綫上，則此平行四边形，必等于原三角形之半。



題意. ABC 为三角形、$D.E$ 为 AB、AC 兩个边的中点，則

$$\square DEFG=\frac{1}{2}\triangle ABC.$$

証. 令 BC 的中点为 H，与 D、E 相联，成 DH、EH 二直綫；則三角形 DHE 为原三角形的四分之一。 [習題 V. 2]

而 $\square DEFG=2\triangle DEH$ [定理 6]

$\therefore$ $\square DEFG=\frac{1}{2}\triangle ABC$。

有*号的为較难的問題。初学者可以略去。