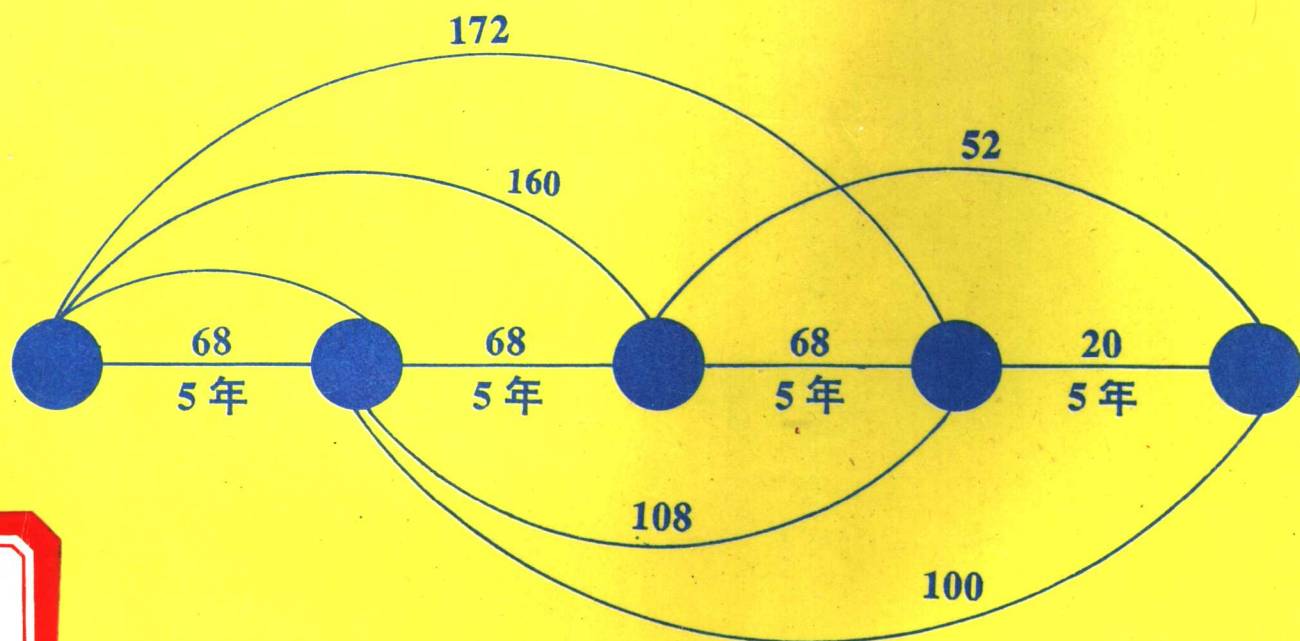


高等学校试用教材

道路与交通 工程系统分析

(道路与交通工程专业用)

姚祖康 主编
张树升 主审



人民交通出版社

高等学校试用教材

道路与交通工程系统分析

Daolu Yu Jiaotong Gongcheng Xitong Fenxi

(道路与交通工程专业用)

姚祖康 主编

张树升 主审

人民交通出版社

内 容 提 要

本书共分三部分。第一部分(第一章)介绍系统和系统分析的基本概念、原理和方法。第二部分(第二章到第六章)讨论涉及合理配置和有效使用资源的各种分析技术和方法,包括线性规划、非线性规划和动态规划,网络分析和排队论。第三部分(第七章到第九章)讨论与选择最佳方案有关的分析方法,包括对未来需求或对策后效的预测方法,对方案的经济分析和评价方法。

本书为高等学校道路与交通工程专业试用教材,也可供有关工程技术人员和管理人员参考和自学。

(作者地址:200092 上海四平路 1239 号 同济大学道路与交通工程系)

图书在版编目(CIP)数据

道路与交通工程系统分析/姚祖康主编.-北京:人民
交通出版社,1995

高等学校试用教材

ISBN 7-114-02304-9

I. 道… II. 姚… III. ①道路工程-系统分析-高等学校-
教材 ②交通工程-系统分析-高等学校-教材 IV. ①U41
②U491

中国版本图书馆CIP数据核字(95)第23883号

高等学校试用教材

道路与交通工程系统分析
(道路与交通工程专业用)

姚祖康 主编

张树升 主审

人民交通出版社出版

(100013 北京和平里东街10号)

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经销

外语教学与研究出版社印刷

开本:787×1092 1/16 印张:11.25 字数:277 千

1996年12月 第1版

1996年12月 第1版 第1次印刷

印数:0001-3900 册 定价:11.20元

ISBN 7-114-02304-9

U·01596

前 言

工程系统分析是探讨规划、设计、修建和营运管理工程系统的方法,其任务是为管理部门提供合理配置和使用资源、选择最佳方案的决策分析工具。道路与交通工程是复杂而庞大的工程系统,在规划、设计和修建时往往要涉及数以亿计的资金投入,而营运管理中每天都关联着数千辆车辆直接或间接的运行效率和经济性。编写本书的目的是,针对道路与交通工程的规划、设计、修建和营运管理问题的特点,综合系统分析方法论、优化技术、微观经济概念、预测方法和决策理论等学科知识,向读者介绍进行资源配置和方案选择的分析方法。

本书第一章、第二章和第八章由姚祖康撰写,第三章和第四章由杨涛撰写,第五章和第六章由王炜和蒋冰蕾撰写,第七章由顾保南撰写,第九章由陆亚兴撰写。全书由西安公路交通大学张树升教授主审。本书存在不少缺点和错误,恳请读者批评指正。

姚祖康

1995年9月

7 2010

目 录

第一章 引论	1
第一节 系统和系统分析.....	1
第二节 系统分析的过程.....	2
第三节 模型和分析工具.....	4
第二章 线性规划	7
第一节 线性规划模型的建立.....	7
第二节 线性规划模型的图解法.....	9
第三节 线性规划的标准形式.....	10
第四节 单纯形法.....	12
第五节 对偶理论和单纯形法.....	21
第六节 灵敏度分析.....	27
第七节 整数规划.....	31
第三章 非线性规划	34
第一节 概述.....	34
第二节 一维搜索.....	39
第三节 多变量无约束求极值问题简介.....	49
第四节 多变量有约束求极值问题简介.....	52
第四章 动态规划	58
第一节 动态规划基本原理.....	58
第二节 资源分配问题.....	63
第三节 生产库存问题.....	69
第四节 阶段不确定的最短路问题.....	71
第五章 图论	75
第一节 最小树问题.....	75
第二节 最短路问题.....	79
第三节 最大流问题.....	83
第四节 图论在道路与交通工程中的应用.....	89
第六章 排队论	96
第一节 排队系统模型.....	96
第二节 顾客到达分布和服务时间分布.....	100
第三节 生灭过程.....	103
第四节 $M/M/1$ 排队系统分析.....	106
第五节 $M/M/S$ 排队系统分析.....	113

第六节 排队论在道路与交通工程中的应用.....	118
第七章 预测	122
第一节 概述.....	122
第二节 经验法.....	123
第三节 时间序列法.....	125
第四节 因素分析法.....	130
第五节 马尔可夫链预测.....	136
第八章 经济分析与评价	141
第一节 费用分析.....	141
第二节 效益分析.....	146
第三节 资金的时间价值.....	150
第四节 评价指标和分析方法.....	154
第九章 决策分析	160
第一节 决策的基本概念.....	160
第二节 风险型问题的决策分析.....	162
第三节 不确定型问题的决策分析.....	165
第四节 层次分析法.....	167
第五节 决策支持系统.....	171

第一章 引 论

系统分析是一套用于解决工程规划、设计、施工和营运管理中有关资源最佳配置和方案合理选择的方法。它为管理部门提供如何最经济有效地实现或达到预定目标或目的的强有力的决策分析工具。本章主要介绍系统分析的基本概念和进行系统分析的基本方法,以便读者在进入以后各章之前能对系统分析的全貌有一个概略的了解。首先,阐明系统的定义和限界以及系统分析的定义和目的;其次,着重阐述系统分析的过程,即进行系统分析的基本步骤;而后,说明定量分析模型在系统分析中的作用以及建模技术;最后,进一步论述定量分析和定性分析相结合在系统分析中的重要作用。

第一节 系统和系统分析

一、什么是系统

系统是由一些相互联系、相互依赖、互感相关的独立单元或部分组合而成的复杂集合,每个单元或部分具有各自的特性和功能,而相关的单元或部分按一定的目的和结构方式协调地统一在系统的整体中,以实现特定的系统功能。例如,由铁路运输、道路运输、航空运输、水路运输和管道运输所组成的交通运输系统,各种运输方式采用不同的运载工具和基础设施,具有各自的运输特性和效率,适用于不同的运输对象,分别组成独立的系统,而各个系统又相互配合、协调、补充,构成一个综合运输系统,以适应和满足整个社会在经济、政治、文化和生活等方面对运输的各种不同需求。

系统在我们的生活中无处不有,大到宇宙系统,小至原子结构系统。系统既可能是天然的,也可能是人造的;既可以是物质的,也可以是概念的。然而,并不是随意的一些事物或概念都能组成一个系统。组成系统的要素包括:组成单元、各单元的属性及各单元间及其属性间的关系。一个系统是由一组相互关联的单元为实现共同的目的而组合在一起的,每个组成单元的性质和行为对整个系统的性质和行为有影响,同时也对系统中一个以上其它单元的性质和行为有影响。系统的目的必须明确规定,并使之有可能确立度量其效果的指标,以显示系统实现预定目的的程度。

系统的限界和功能是由人们按一定的目的和需要来定义和规定的。例如,我们可以将路基、垫层、基层和面层定义为路基—路面结构系统,或者将基础、墩台、上部结构和桥面系定义为桥梁结构系统,分析不同组合的系统内各组成部分在荷载和环境因素作用下产生的应力或位移量,以寻求使各组成部分的承载能力或使用功能都得到充分利用的平衡设计方案。我们也可以将路面、桥梁或其它工程设施在计划和使用期内经历的规划、设计、施工、养护和监测等管理阶段组合成一个路面、桥梁或其它工程设施项目的管理系统,为管理部门提供以最低的总费用实现要求的服务水平的最佳路面、桥梁或其它工程设施项目的对策方案。对于一条高速公路,可以将进出各出入口和在各路段上行驶的车辆看作为一个交通运行系统,通过设立交通监

控系统,诱导和控制路上运行的车辆,以减轻或消除交通拥挤,使全线的交通流量达到最大,提高公路设施的利用率。

每个系统由一些单元组成,而其中任一单元又可分为较小的单元。如果一个系统包含二个阶层的单元,则下一层的单元称之为子系统。例如,上述铁路、道路、航空、水路和管道运输都可以作为交通运输系统的子系统,而航空运输系统又可看作为由航空公司、机场、空中交通管制等子系统组成的一个系统。再如,上述高速公路交通运行系统也可看作是一个子系统,同高速公路各项设施的维修保养子系统、交通安全子系统、收费子系统、信息管理子系统和行政管理子系统等组合成一个高速公路营运管理系统。因此,系统、子系统和单元的限定都是相对的,在阶层结构某一层的系统或子系统,对于上一层来说则是它的一个子系统或单元。所以,重要的是对于所考虑的系统要规定其限界,而系统也要为它的子系统规定其限界,留在系统限界外的,都被看作是系统的环境,没有一个系统可以完全孤立在其环境之外。通过限界进入系统的材料、能量和信息等,为系统的输入;由系统进入环境的,则为系统的输出。

二、什么是系统分析

工程系统分析可看作是由一套定性、定量或二者相结合的方法组成的集合,用以解决项目规划、工程设计、施工和经营管理中的一些重要问题,这些问题可大致分为两种类型:

1. 资源配置问题——如何经济、合理、有效地把各种资源(劳力、资金、材料、能源和设备等)组合在一起,以达到或实现系统预定的目的。

2. 方案选择问题——如何提出、分析比较和评价各种相互独立的对策方案,以选取实现系统目的和目标的最佳方案。

系统分析方法不同于囿于学科限制单一地、孤立地和微观地分析事物的传统方法,而是综合应用多种学科知识,从总体上分析和认识系统各组成部分之间的内在关系。系统分析首先用极大的努力去搞清系统各个部分和系统整体的性状或行为特性;系统分析要进行价值分析,以探讨或确认为系统所设立的目的是否合适,是否能被接受,并且要明确定义度量目的的指标;系统分析要研究依据系统同社会和经济因素的交互作用预测系统未来需求或性状的方法;系统分析为有效地寻找各种可能的解决方案提供途径,并且配置各种可获得最佳方案的优化技术;系统分析也为决策者提供在可能方案中作出选择的策略。

系统分析的目的是为了改进现有系统的效率和效能,或者为了设计更有效地实现预定目的或目标的新系统。运用系统分析可以收到下述效果:

1. 使决策者能充分考虑可能面临的各种不同选择;
2. 能更有效地利用各种稀缺而昂贵的资源;
3. 能以最少的消耗或支出达到预定的目的;
4. 能在目标设定、政策制定和贯彻、资源合理分配等方面加强决策能力;
5. 能为决策者提供不同决策策略的后效分析。

因而,系统分析是决策者改善政策制定质量和实施有效领导的有力工具。

第二节 系统分析的过程

系统分析的基本过程,可以用下述五个基本步骤表明,虽然这种划分不能完全说明一个复杂的系统分析中所包含的各个要素,但它可为整个分析过程提供一个有用的概念框架。这些步

骤为：

1. 弄清问题,明确目的和目标;
2. 提出可供选择的方案;
3. 分析和评价方案;
4. 选择方案;
5. 实施和验证。

一、明确问题、目的和目标

进行系统分析的第一步,应弄清系统存在的问题,以便明确系统需要解决的问题,规定系统分析的目的和目标。

任何时候,只要系统的实际性能或状态同人们期望的性能或状态之间出现偏差,就说明系统存在某种问题,有必要对之进行分析,以改进系统的有效性或效率。如果不知道问题所在,那就很难进行有效的分析,也提不出针对性的解决方案。虽然明确问题的必要性和重要性是很明显的,但在系统分析的过程中,常常会被当作次要的一步而未给予足够的重视,在问题还含混不清的时候就急于进入具体的分析,以致于投入了许多分析精力也得不到合适的解决方案。

在系统较简单或系统的问题表现得较明显时,系统分析员可通过对主管、管理人员、用户和其他有关人员进行面访、函调或座谈讨论等搜集情况,了解各方面的看法和主管的意图,而后提出得到各方公认的有关存在的问题及系统的目的和目标的报告。

对于一个复杂的大系统,搞清系统存在的问题不是一项简单的任务,首先要明确定义系统及其范畴,弄清各组成部分之间的关系及系统的环境;而后,大量采集反映系统行为、性状或性能的数据,通过对系统行为、性状或性能的评定指标和评价标准的选择,对现有系统的性能或状态作出定性的描述和定量的评价;然后,对系统目前和未来的需求进行调查和预测,通过与系统实际性能或状态作比较后,确定系统需解决问题的内容和范围,在此基础上进行价值分析后,提出可被接受和可望实现的系统目的和目标。显然,要完成上述调查分析工作,准确地摸清问题所在,需投入大量的精力和费用。实施时,可分两步进行,在系统分析的起始阶段,可以先通过对现有系统的粗略调查,提出对存在问题的初步分析意见,并同主管讨论后,初步确定系统分析的目的和目标;而后,再大量采集数据,建立系统模型,对现有系统的性能或状态进行定量分析;最后再进一步对存在的问题和系统目的作详细深入的分析工作。

二、提出可供选择的方案

为解决系统所存在的问题,实现系统预定的目的和目标,可先提出若干个解决方案以供分析和选择,而所提出的方案要尽可能在技术上、经济上和政治上是可行的。技术可行性是指达到系统技术状况和性能指标预定目标的可能性;经济可行性是指具有可用资源的可能性;政治可行性是指政策选择被决策者或当事人接受的可能性。同时,所提供的选择方案不能过多,以免造成过大的分析工作量,但又要避免把有选择价值的方案遗漏掉。因而,提出选择方案的阶段可看作是对多个可能方案进行可行性分析,按系统的问题及所定的目的和目标进行初步筛选,得到值得进一步作系统分析和评价的可供选择的方案。

三、分析和评价选择方案

对于上面提出的各个比较方案,要应用表征系统行为、性状或特性的一个或多个模型进行

详细的技术、经济和政治可行性分析。这些模型为判断各个方案的实施后效提供了定量分析的基础。将调查采集到的反映系统状态及其变化的各项参数数据及其它有关数据输入模型,通过计算分析,可以了解各个方案实施后系统的状态。据此,可比较各个方案满足系统预定目标要求的程度。

然而,在分析和比较之前,要先选择能反映系统状态(行为、性状或性能)的代表指标作为评定指标,同时还要为之确定同系统目标相吻合的评价标准。各个系统具有各不相同的特性,因而所采用的评定指标不尽相同,但总要考虑技术(系统的性能)、经济(费用和效益)和可运行或可操作性三个方面的指标。因而,系统的评价指标往往不是单一的,这就使得方案的比较和选择呈现出多元化。

四、方案选择与决策

系统分析实质上是替决策人搞清问题所在,向他提供有关解决问题方案的选择信息。因而,系统分析员在结束分析工作后,应以概述的形式向决策者表述经过结构化的分析结果。即阐明问题所在,表明系统目的和目标确定的依据,说明所采用的评定指标和评价标准,提出可供考虑和选择的方案,讲清各个比较方案的实施效果(包括技术、经济和政治方面的效果,正面和负面的影响,不确定性和风险),提出分析员对方案选择的建议和意见。

选择不单是一个技术问题,它是对各种可能后果进行平衡或折衷的艺术。虽然分析员对各个方案在技术上和经济上作出了定量的评价,但仍有一些影响因素无法量化。然而,即使定量的评价也是多指标的,不同的利益集团对各个量化或非量化的指标有不同的价值观和偏爱,因而对各个方案也有不同的倾向性,决策者应权衡各方面的利弊作出最后的选择。

五、实施与反馈

对选定的方案要付诸实施。在执行过程中和结束后,应对系统分析的结果进行验证,以修正或改善分析方法或所用参数,或者推荐新的方案或政策。

第三节 模型和分析工具

一、系统分析中的模型

模型是对现实事物的简化、模拟和抽象。它是人们进行思维和分析的工具,也是表述、实现或检验理论思维成果的主要工具。模型可能是先进的,也可以是对现实的反映。

模型可以是物理的,作为实际物体的缩小品、放大品或复制品。模型也可以是相似的,不是在外形上,而是在物理性质和各元素的关系上相似。例如,用电路代表水力系统,用图和代码表示现实情况的模型,称为图解模型。又如,反映由配件组装成汽车的工艺顺序的流程图,表示机构内人员间关系的组织系统图等等。用数学语言描述或说明系统的,称作数学模型。此外,模型既可以反映宏观的,也可以反映微观的事物;它既可以是描述性的,反映系统各单元的行为或性状特性,也可以是规定性的,说明为达到预定目的而应采取的行动或手段;它既能反映处于确定状态的事物,也能反映处于不确定状态的事物。

模型在系统分析中是很有用的工具。建立和运行模型的目的,是使决策者能清楚地了解系统和问题的全貌,从而加强他们的直觉决策能力。模型被用以描述系统各组成部分的行为和性

状,各单元之间以及它们同周围环境之间的交互作用。分析员可以应用所建立的模型来分析各种因素、变量和关系之间的因果依赖关系,推测各种变化、行动和决策可能给整个系统的行为、性状或性能带来的变化和影响,探索各种可能解的后果并寻求最优解,评价各个方案对改进系统的效果。因而,建立和运行模型成为系统分析过程的中心环节。

建立模型可以遵循下述四个步骤:

1. 初步设计模型;
2. 通过同已有观察数据的比较,进行初步证实;
3. 应用模型对新的情况进行预测;

4. 改进模型,直到预测结果同实际的偏差在允许误差范围内。在建立系统的分析和实施阶段之间,要继续不断地反馈和改进,才能得到好的模型。

二、定量和定性分析

系统分析须顾及定量和定性两个方面。定量分析方法采用量化指标表述系统各单元和系统整体的行为和性能。量化关系反映系统各单元之间和系统同环境之间的交互作用,能使有关的知识条理化和结构化,使决策所面临的复杂而又不确定的问题能表述得较为容易把握和便于分析。定量化为系统的输出结果提供了判断的标准,以便衡量系统的效率和有效性。通过定量化,可以将发生的事件记录下来,便于复查、估价、比较和验证。量化可以使进行重复处理的系统仿真模拟成为可能,也可以使通过调节自变量对输出结果进行敏感性分析成为可能。同时,通过定量度量,使我们能够利用功能愈来愈强、运算愈来愈迅速、使用愈来愈方便的计算机,通过信息管理系统积累和处理数据。因而,没有某种程度的定量化,如将物质世界和人类社会抽象为定量模型,就不可能进行系统分析。

定量分析借助于数学(矩阵代数、集合论、网络理论等)、概率论、统计学、经济学、计算机科学(程序设计、算法应用等)以及决策理论进行逻辑分析和推论。系统分析中完成定量分析所用的工具和技术,可分为确定性分析和随机分析两大类。确定性分析模型,是指那些用于只有一种状态的系统,在采取某种决策后,其变量、约束条件、不同选择都是已知的、确定的、按一定的统计置信度可以预见的工具或技术。表 1-1 列出了系统分析中一些常用的确定性分析模型和技术。当系统存在一种以上状态,需要估计和确定每一种的可能性,并要分析在每一种状态下用各种决策选择所得出的输出结果时,可以采用随机分析模型和技术。一些常用的随机模型也列于表 1-1。当然,在实践中,上述确定性分析和随机分析的区别并不是绝对的。

系统分析中的定量分析模型和技术

表 1-1

模 型、技 术	应 用
确定性分析 收支平衡(损益)分析 线性规划、非线性规划 顺序模型(项目评审技术) 排队论 随机分析 动态规划 计算机模拟技术 马尔可夫分析 决策树 随机排队模型 指数平滑、回归分析	经营管理决策 资源的合理配置、分配和优化 生产和建设计划的制订 人、事物或事件的等待服务问题 考虑时间因素的资源合理配置、分配和优化问题,多阶段决策 分析不确定条件下所作出的实际决策,评价可供选择的行动方案 状态转移分析 用图解法进行决策选择 人、事物或事件的随机等待服务问题 预测

定量分析可针对系统存在的问题提出一些可供选择的解决方案。然而,如果仅仅依据定量分析的结果采取行动,则会导致不适当的、浪费的或低效率的后果。由于系统各单元间的复杂关系,系统同环境间的复杂影响,总有一些因素和关系难以量化,使模型只能是现实的一个简化反映。对于这些难以量化而未予考虑的因素所带来的影响,应辅之以定性的分析。同时,系统目的和目标的设定以及系统性能评价标准的选定,都同人们的价值观有关,而更主要的是行动方案的选择即决策选择,受决策者、决策部门和社会力量的价值观、超理性因素和政治因素等方面的复杂影响。因而,为了使系统分析的结果能被接受,在分析过程中,要使定量分析和定性分析结合在一起进行,建立定量分析模型时应把决策环境的真实情况和环境对决策的约束条件考虑进去。

系统分析中的定性分析主要考虑以下几个方面:

1. 政策战略选择。选取积极的目标还是消极的目标;选用逐步改进的渐进方案还是一步到位的激进方案;偏向短期效果(益)好的目标还是长期效果(益)好的目标;偏向确定性大而风险小的方案还是确定性小而风险大的方案;坚持采用最优方案还是最好采用次优或能将就对付的方案。

2. 价值分析。价值是指偏好的事物或原则。价值观联系着人们的直觉,影响着人们的信念和选择的合理性。个人、组织或社会的价值观,是不依具体情况而转移的期望和评价标准。价值分析工作,在于识别决策者和部门、当事人及社会的价值观,分析系统中价值的一致性,确认系统所设定的目标是否合适,所提出的解决方案是否能被接受,对系统的改进效果是否良好,并通过一组价值标准来衡量系统的质量和完备性。

3. 政治因素。分析所建议的政策或解决问题的方案在政治上的可行性。即被领导层、各级政府部门和社会不同利益集团接受和贯彻的可能性。

4. 超理性因素。决策者的个人风格(思想和行为特点、工作作风、工作方式等)、能力(创造力、洞察力、决断力等)、习惯和经验等,都会不通过逻辑推理的作用而直接影响其行为和决策。

参 考 文 献

- [1] Krone R. M. Systems analysis and policy sciences. New York: John Wileys & Sons, Inc., 1980. 陈东威译. 系统分析和政策科学. 北京:商务印书馆, 1985.
- [2] Ossenbruggen P. J. Systems analysis for civil engineers. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1984.
- [3] Blanchard B. S., W. J. Fabrycky. Systems engineering and analysis. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, Inc., 1981.
- [4] Byrd B., L. T. Moore. Decision models for management. New York: McGraw-Hill Book Company, 1982. 陈尚霖译. 管理决策模型. 北京:商务印书馆, 1992.

第二章 线性规划

规划所关注的问题是如何合理、有效地使用或配置各种资源(劳力、材料、机具设备或资金等),使实现预定目标所需的费用最小(或资源最少),或者所获得的收益(或效益)最大。为此,往往先提出若干个可行的使用或配置方案,而后在其中寻找出最优的方案,这个最优方案,通常可以通过先把实际问题抽象为数学模型,然后再设法求解此数学模型后得到。数学模型包含一些有待决策的非负变量,一个确切表述预定目标的函数式,一组必须满足的资源供应、财政、物理和体制等方面的约束条件。当目标函数和一组约束条件都可以用线性方程或线性不等式表示时,这种规划问题称为线性规划。

由于不同领域内的各种问题都可以(或者近似地)用线性模型表述,而线性规划问题的求解技术已臻成熟,线性规划技术因而被广泛地应用于解决许多军事、工业、经济和社会问题。同样,在道路和交通工程的规划、设计、施工和营运管理工作中,也可应用它来解决资源的合理使用和配置以及方案的评价和优选等方面的问题。

本章先介绍如何建立线性规划模型,而后通过图解法直观地说明线性规划问题求解的一些基本概念。线性规划问题最主要的一种求解方法是单纯形法,但在求解之前须先将模型转化为标准形式。本章着重介绍单纯形法的求解过程。每一个线性规划问题都有一个伴生的对偶问题,利用这一对偶原理和关系,可以从不同的角度分析问题和求解问题。线性规划问题中的目标函数参数以及约束条件系数和限制量,往往是不确定的。线性规划问题提供的答案,不能仅仅是一个确定的最优解,而还应包含这些不确定因素的变化对最优解结果的影响分析。本章将介绍进行这种灵敏度分析的方法。最后,本章还讨论了一种特定的规划问题——整数规划问题的求解方法。

第一节 线性规划模型的建立

线性规划的数学模型包含一个目标函数式和一组约束条件式。模型的建立,通常采用下述三个步骤:

第一步,明确所需确定的未知变量。它们是所讨论问题中的一些可变化的参数,称之为决策变量、设计变量或控制变量。这些变量可用 x_j 表示,其中下标 $j=1,2,3,\dots,n$, n 为变量数。在一个物理系统中,决策变量往往都是非负值,可以表示为:

$$x_j \geq 0$$

第二步,明确问题所需满足的约束条件或限制条件,并将它们表示为上述未知变量的一组线性方程或不等式。约束条件可能是资源方面的(如劳力、机具设备或材料供应量的限制)、物理方面的(如材料性质或结构尺寸的限制)、财政方面的(如预算或价格的限制)或者制度方面的(如各种规定、规范或规程条文上的限制等)。而表述各种约束条件的方程可能是等式,如

$$g_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = b_i$$

或者是不等式,如

$$g_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \geq b_i$$

或

$$g_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \leq b_i$$

其中, $i=1, 2, 3, \dots, m$, m 为约束条件数。

第三步, 规定所需达到的目标, 并表述为决策变量的线性函数, 称作目标函数。目标函数是预定目标的一个数学表述, 同时也是对目标实现效果的一个度量。目标函数可以是最大化的, 例如在使所得收益或效益最大的问题中

$$\text{Maximize: } Z = f(x)$$

目标函数也可以是最小化的, 例如在使所支出的费用最小或消耗最少的问题中

$$\text{Minimize: } Z = f(x)$$

综合上述三步, 线性规划的数学模型可一般表示为:

$$\begin{aligned} &\text{Maximize (或 Minimize): } Z = f(x) \\ &\text{Subject to: } g(x) \{ =, \geq, \leq \} b \\ &x \geq 0 \end{aligned} \quad (2-1)$$

(在下文中, Maximize 用 max 表示, Minimize 用 min 表示, Subject to 用 s. t 表示)

现举例说明线性规划模型的建立。

[例 2.1] 构件预制工厂生产三种型号的产品, 每种型号产品所消耗的原材料、所投入的劳力和能获取的利润列于表 2-1, 能供应给工厂的原材料为每天 2 000kg, 工厂具备的劳力为每天 150h, 请建立一线性规划模型, 以协助安排生产计划, 使所获得的利润达到最大。

表 2-1

产品型号	1	2	3	产品型号	1	2	3	产品型号	1	2	3
劳力(h/件)	7	4	6	材料(kg/件)	50	30	60	利润(元/件)	400	200	300

第一步, 确定决策变量。安排生产计划所需确定的未知变量为每种型号产品的产量, 现以 x_1 、 x_2 和 x_3 代表 1、2 和 3 号产品的日产量。

第二步, 明确约束条件。工厂生产所受到的限制为资源供应条件、劳力和材料。据此, 可建立两个约束条件: 第一个是三种产品每天投入的劳力总量 ($7x_1 + 4x_2 + 6x_3$) 不超过 150h; 第二个条件是三种产品每天消耗的材料总量 ($50x_1 + 30x_2 + 60x_3$) 不超过 2000kg。此外, 决策变量 x_1 、 x_2 和 x_3 必须是非负值, 因为产量不可能是负的。

第三步, 规定目标函数。本题的目标是所获得的利润最大。工厂产品每天的总利润为:

$$Z = 400x_1 + 200x_2 + 300x_3$$

因而, 目标是寻求三种产品的合适产量 x_1 、 x_2 和 x_3 , 使总利润 Z 为最大。

由上述分析可建立如下的线性规划模型:

$$\begin{aligned} &\max Z = 400x_1 + 200x_2 + 300x_3 \\ &\text{s. t } 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 150 \\ &\quad 50x_1 + 30x_2 + 60x_3 \leq 2000 \\ &\quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

[例 2.2] 道路工地需用砂砾材料修建垫层, 按规范要求, 混合料中砂的含量不得少于

30%，砾石的含量不得大于60%，粉土的含量不得大于10%。工地附近有3个料场可供应砂砾料，各个料场的砂砾混合料级配组成以及混合料单价列于表2-2。工地每天需供应100m³砂砾料。请建立一线性规划模型，以协助安排各料场的供应计划，使垫层砂砾混合料的费用最小。

表2-2

料 场	1	2	3	料 场	1	2	3
砂 (%)	5	30	100	粉 土 (%)	35	—	—
砾 石 (%)	60	70	—	单 价 (元/m ³)	10	30	20

第一步，确定决策变量。供应计划所需确定的是各个料场每天的供应量，现选用 x_1 、 x_2 和 x_3 作为决策变量，代表各个料场每天供应的材料量(m³)。

第二步，明确约束条件。由各料场供应的材料组成的混合料必须满足规范要求，即三个料场组成的混合料中，砂的组分($5x_1 + 30x_2 + 100x_3$)不得少于30%，砾石的组分($60x_1 + 70x_2$)不得大于60%，粉土的组分($35x_1$)不得大于10%。同时，每天的供应量必须为 $x_1 + x_2 + x_3 = 100$ 。此外，决策变量 x_1 、 x_2 和 x_3 必须为非负值，因为材料供应量不可能是负的。

第三步，确定目标函数。供应计划的安排目标是，由三个料场材料组成的混合料的费用最小，每天供应的混合料的费用为：

$$Z = 10x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

因而，目标是寻求三个料场的合适供应比例，使混合料的费用 Z 为最小。

综合上述，线性规划模型便为：

$$\begin{aligned} \min Z &= 10x_1 + 30x_2 + 20x_3 \\ \text{s. t } &x_1 + x_2 + x_3 = 100 \\ &5x_1 + 30x_2 + 100x_3 \geq 30 \\ &60x_1 + 70x_2 \leq 60 \\ &35x_1 \leq 10 \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

第二节 线性规划模型的图解法

线性规划模型建立后，下一步便是模型的求解。对于只包含两个决策变量的线性模型来说，可以采用图解法求解，这是一种简便而直观的方法，其求解步骤为：

第一步，依据约束方程建立可行区；

第二步，假设一个初始解 Z_0 ，按目标函数式绘出其坡度线(即 Z_0 等值线)；

第三步，平行于 Z_0 坡度线，绘制通过可行区边界线交点(称作极点)的等值线，由此确定最优解。

下面通过例题说明上述求解步骤。

[例2.3] 请用图解法求解下述双变量线性规划模型：

$$\begin{aligned} \max Z &= 5x_1 + 6x_2 \\ \text{s. t } &x_1 + x_2 \geq 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1 &\leq 5 \\x_2 &\leq 3 \\x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

由于决策变量都是非负值,求解过程在第一(正)象限内进行(图2-1)。

第一步,确定可行区。先分别按每一个约束方程在图上绘出其可行范围(图中以箭头方向表明),三个范围共同包围的部分即为满足三个约束方程的可行区。位于可行区内的点,都是该模型的可行解,但不一定是最优解。而位于可行区以外的点,都是不可行解。

第二步,先假设一个初始解,例如 $Z_0=5$,按目标函数绘出 $Z_0=5$ 的坡度线(设 $x_1=0$,得 $x_2=5/6$ 点,设 $x_2=0$,得 $x_1=1$ 点,连接此两点的线即为 $Z_0=5$ 的等值线)。

第三步,平行推移此坡度线。由于本题设定的目标为寻求最大解,故将坡度线往使 Z 值增大的方向推移,当此坡度线通过可使 Z 值达最大的可行区的极点时,便获得最优解($Z=43$)。

上述例题也可用以说明寻求最优解的一些基本概念:

1. 满足约束方程组条件的解,是可行解。
2. 所有可行解的集合,便为可行区。
3. 最优解为可行解,并且其目标函数值是所有可行解目标函数值中的最大或最小者。因而,位于可行区边界交点处的极点,是最优解的候选解。也即,如果存在最优解,则可行区的极点中总有一个是最优解。这一基本特性是下面将要介绍的单纯形法求解线性规划问题的基础。

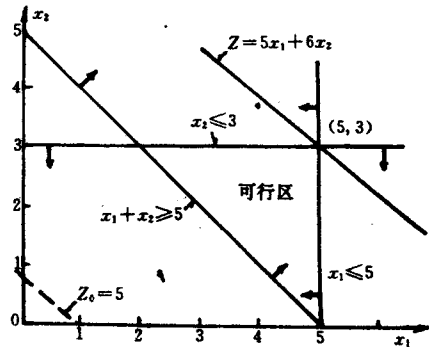


图2-1 双变量线性规划模型的图解法

4. 最优值为相应于最优解的目标函数值。
5. 当线性规划问题只有一个最优解时,称作唯一最优解。当平行于目标函数坡度线的最大或最小等值线同可行区的边界线相重合(通过两个极点)时,该问题便有多多个最优解(位于该等值线上两个极点之间的都是最优解)。

第三节 线性规划的标准形式

图解法虽然简单直观,但只能求解双变量线性规划问题,当含有多个变量时,需采用数学方法求解。下面介绍线性规划模型的数解法。

线性规划数学模型求解时需采用一种标准形式。含有 n 个决策变量和 m 个约束条件的线性规划问题,用下述标准形式表示:

$$\begin{aligned}\max(\text{或 } \min) \quad & Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{s. t} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ & \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0\end{aligned} \tag{2-2}$$

上述标准形式的主要特征是：

1. 目标函数为极大化或极小化类型；
2. 所有约束条件都用等式表示；
3. 所有变量都为非负值；
4. 每个约束方程的右端常数都是非负值。

不少线性规划问题所建立的模型不符合标准形式的要求，例如，第一节[例2.1]和[例2.2]中所建立的线性规划模型，其约束方程组都包含有不等式 \geq 或 \leq ，遇有这种情况时，需首先将线性规划模型转换成标准形式，转换方法随下述不同情况而异。

第一种情况：约束条件为不等式。这时，在不等式中引入独立的、非负的控制变量，使之成为等式。当约束条件为“ \leq ”形式的不等式时，在不等号的左端添加一个非负的变量，称作松弛变量；当约束条件为“ \geq ”形式的不等式时，则在不等号的左端减去一个称作剩余变量的非负变量，把不等式改为等式。例如，[例2.1]和[例2.2]中的约束方程组按所述方法转换为标准形式即为：

[例2.1]

$$7x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 150 \rightarrow 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 = 150$$

$$5x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 200 \rightarrow 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_5 = 200$$

其中， x_4 和 x_5 为添加的松弛变量。

[例2.2]

$$5x_1 + 30x_2 + 100x_3 \geq 30 \rightarrow 5x_1 + 30x_2 + 100x_3 - x_4 = 30$$

$$60x_1 + 70x_2 \leq 60 \rightarrow 60x_1 + 70x_2 + x_5 = 60$$

$$35x_1 \leq 10 \rightarrow 35x_1 + x_6 = 10$$

其中， x_4 为减去的剩余变量， x_5 和 x_6 为添加的松弛变量。

第二种情况：约束方程右端常数为负值。这时，可在方程两端都乘上 -1 ，如果约束方程为不等式时，则乘 -1 后不等号要转换， \leq 转为 \geq ， \geq 转为 \leq ，例如：

$$7x_1 - 2x_2 = -10 \rightarrow -7x_1 + 2x_2 = 10$$

$$5x_1 - 3x_2 \leq -10 \rightarrow -5x_1 + 3x_2 \geq 10$$

$$-3x_1 - 6x_2 \geq -6 \rightarrow 3x_1 + 6x_2 \leq 6$$

第三种情况：变量符号不确定。即所选用的决策变量可能为正值，也可能是负值，不能预先确定。这时，可以选用两个非负变量替代此变量。例如，约束方程如为 $x_1 + y_1 = 10$ ，其中 y_1 为可正可负的变量，则用 x_2 和 x_3 两个变量替代 y_1 ，也即以 $y_1 = x_2 - x_3$ 代入约束方程，使之成为 $x_1 + x_2 - x_3 = 10$ ($x_1, x_2, x_3 \geq 0$)。

第四种情况：目标函数由极大化类型转为用极小化类型求解，或由极小化类型转为用极大化类型求解。这时，可对极大化的目标函数乘以 -1 ，而后按极小化类型求解，再对求解结果乘以 -1 ，得到极大化的解；或者，对极小化的目标函数乘以 -1 ，按极大化类型求解后，再对求解结果乘以 -1 ，得到极小化的解。例如：

$$\max Z = cx \rightarrow \min Y = -cx, Z = -Y$$

$$\min Z = cx \rightarrow \max Y = -cx, Z = -Y$$

采用矩阵向量表示时，上述线性规划问题(式(2-2))可以写成如下的简洁形式：

$$\max(\text{或 } \min) Z = CX$$