中学数学思维方法丛书

整体方法

周学祁　编著

ZHENGTIFANGFA

ZHOUXUEQI

ZHONGXUESHUXUESIWEIFANGFACONGSHU

ZHONGXUE
SHUXUE
SIWEIFANGFA
CONGSHU

大象出版社

中学数学思维方法丛书

整体方法

周学祁　编著

大象出版社

ZHENGTIFANGFA
ZHOUXUEQI

图书在版编目(CIP)数据

中学数学思维方法丛书:整体方法/王梓坤,张乃达主编;周学祁编著.-郑州:大象出版社,1999
ISBN 7-5347-2339-6

Ⅰ.中… Ⅱ.①王… ②张… ③周… Ⅲ.数学课-思维方法-中学 Ⅳ.G634.602

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第25887号

责任编辑 李 晶　　责任校对 魏巧英

大象出版社出版(郑州市农业路73号 邮政编码450002)
新华书店经销　河南省瑞光印务股份有限公司印刷
开本850×1168　1/32　印张5.125　字数111千字
1999年9月第1版　1999年9月第1次印刷
印数1—2 500册　定价6.00元

序

早在 1995 年 8 月,大象出版社(原河南教育出版社)在扬州举办了一个座谈会,邀请十余位数学水平很高的数学教师参加,商讨出版一套“中学数学思维方法丛书”。与会同仁认为,这是一个富有创见的倡议,因而得到大家热烈赞许。提供一套既有较深厚的理论基础,又富有文采和启发性、可读性的关于数学思维的参考书,对中学数学教学,无疑会是非常有益的;而更主要的,广大的中学生们,将在形象思维、逻辑推理和严密计算等方面,学到很多的东西。这对将来无论做什么工作,都会受益无穷。

回想我们青少年时期学习数学的情景,总会有几分乐趣几分惊异。做出了几道难题是乐趣,而惊异则来自方法的进步。记得小学算鸡兔同笼,必须东拼西凑,多一只兔便比鸡多了两条腿,好不容易才能做出一题。而学过代数,这类问题便变得极为简单。做几何题也一样,必须具体问题具体解决,而学过解析几何后便有了一般的

程序可循。至于算圆的面积，如果不用积分便会相当麻烦。由此可见，方法的进步对科学的发展是何等重要。以上是对学习现成的东西而言。如果要进行科研，从事创新、发现或发明，那就更应重视方法，特别是思维方法。没有新思想，没有新方法，要超过前人是很困难的。有鉴于此，一些优秀的数学家便谆谆告诫学生们，要非常重视学习方法和研究方法。美国著名数学家 G. Pólya 写过好几种关于数学思想方法的书，如《怎样解题》、《数学的发现》、《数学与猜想》，后来都成为世界名著，很受欢迎。

学习任何一门科学，都有掌握知识和培养能力两方面。一般说来，前者比较容易。因为知识已经成熟，而且大都已经过前人整理，成为循序渐进的教材。但能力则不然，那是捉摸不定、视之无形的东西，主要靠自己去思考，去探索，去总结，去刻苦锻炼。老师的培养固然重要，但只能起辅导作用。只可意会，不可言传，而有时甚至连意会都做不到。正如游泳，只靠言传是绝对学不会的。这是对受业人而说的。

至于老师，则应无保留地传授自己的经验和体会，尽量缩短学生学习的时间。中国有句古诗："鸳鸯绣出凭君看，不把金针度与人。"意思是说知识可以输出，但能力不可传授。前一句话意思很好，后一句应改为"急把金针度与人"。这套丛书，正是专门传授金针的。

一般的科学研究方法，可分为演绎与归纳两大类。在数学中，演绎极为重要，而归纳则基本上用不上，除了 C. F. Gauss 等人偶尔通过观察数列以提出一些数论中的猜想而外。不过自从计算机发明后，这种情况已大为改

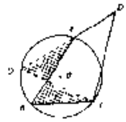
观。混沌学主要靠计算机而发展起来，数学模拟也主要靠计算机。再者，以往数学中极少实验，还是由于计算机的广泛使用，现在不少数学系已有了实验室，特别是统计实验室。可以期望，计算机对改变数学的面貌，对改善数学的思维方法，都会起到越来越大的作用。

在此之前，我国已经出版了几本关于数学方法的书，它们都各有特色。如就规模之大，选题之广，论述之精而言，这套丛书也许是盛况空前、蔚为大观的。我们希望它在振兴我国的科学事业和培养数学人才中，将会起到令人鼓舞的作用。

王梓坤

99.7.6.

目　　录



一、什么是整体方法

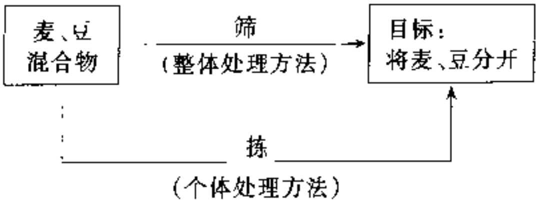
在数学思维方法璀璨的星空中，整体方法是一颗光芒耀眼的明星.

在这本书中，我们将揭开这颗明星的美丽面纱，探索它的奥秘.

什么是整体方法？让我们还是先从具体例子开始吧.

1.整体方法——聪明人的方法

在日常生活中可能会遇到这样的麻烦事：不小心把麦子和豆子混合在一起了，要把它们重新分开，该怎么办？——一般有两个方案：一是拣豆子，由于豆子颗粒较大，可以通过逐个“拣”的方法，把它拣出来；二是筛麦子，即选择一个筛孔大小恰当（只能让麦粒通过）的筛子，将麦、豆混合物“筛”一遍，这样，豆子就留在筛子里了.



两种处理方案在思想方法上有什么差别？拣豆子的方案，是着眼于个体，通过逐一的个别处理来解决问题的；筛麦子的方案，是着眼于整体，根据“将麦、豆分开”这一目标，抓住麦、豆混合物中两类种子颗粒大小不同的特征而采取的整体处理方法．显然，这种方法要简便得多！这两种处理方法实际上体现了两种不同的观念．从整体出发的处理方法，体现了一种着眼全局、通盘考虑的整体观念．

下面来看一道趣味数学题：

例1 甲、乙二人从相距 20 千米的两地同时出发，相向而行，甲的速度为 6 千米/时，乙的速度为 4 千米/时．一只小狗与甲同时出发向乙奔去，遇到乙后立即调头向甲跑去，遇到甲后又立即调过头来迎乙……直到二人相遇为止．若小狗的速度是 13 千米/时，在这一奔跑过程中，小狗的总行程是多少千米？

对本题的处理，可以有几种不同的方案：

第一种方案，是逐段计算小狗奔跑的路程．这是可以做到的：例如，第一次遇到乙时，小狗所走的路程为$\frac{20}{13-4}\times 13$(千米)，求所有路程的和即得．

第二种方案，是逐段计算小狗奔跑的时间．例如，第一次遇到乙时，小狗奔跑的时间为$\frac{20}{13+4}$(小时)，求出奔跑时间的总和，再乘以小狗的速度即得．

第三种方案，注意到小狗来回奔跑的时间之和，恰等于甲、乙

二人从出发到相遇所需的时间(这一发现很重要！因为在这段时间内,小狗是不停奔跑的),故小狗奔跑的总时间为$\frac{20}{6+4}=2$(时).从而可迅速得到小狗奔跑的总路程为:$13\times2=26$(千米).

比较上述三种方案可知,如果我们的思路被小狗牵着鼻子走,沿着它的奔跑路线,去逐段计算路程或时间(即执行第一、二种方案),将要进行大量的计算,且要涉及无穷递缩等比数列求和的运算,过程比较繁复(有兴趣的读者不妨一试).而第三种方案,却显得机巧、简捷,一目了然!

下面再来看一道数学竞赛题:

例2 正方体的棱长为11,将这个正方体分割成11^3个单位立方体,从空间的某一点望去,最多能看到多少个单位立方体?

解法一:从空间的某一点看去,最多可以看到原正方体的三个面,而每个面中有11^2个单位立方体;但3×11^2个单位立方体中,三条棱上的立方体(如图中涂有影线的立方体)作了重复计数,故应减去3×11个,但三棱交会处的立方体应计算一次,故共有

$$3\times11^2-3\times11+1=331(\text{个}).$$

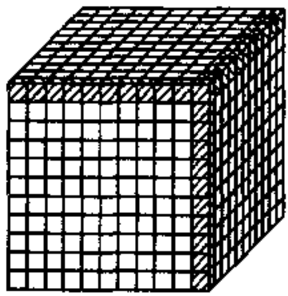


图 1

解法二:设想将所看到的三个面上的单位立方体全部移开,那么,剩下的就是藏在它们后面的、棱长为10的正方体,它共有10^3个单位立方体,从总数11^3中减去10^3个,即为所求.

∴ 从空间的某一点最多可以看到的单位立方体的个数为

$$11^3-10^3=1331-1000=331(\text{个}).$$

对上述两题的解题过程进行一下反思,就可以发现:不同解法

中,有繁有简只是显露出来的表面现象,而思想方法上的差异,才是它们的本质.

例 1	
解法一、二:以每次相遇为分界点,将小狗奔跑的路程(或时间)分割成若干小段,然后进行累加.是一种着眼于具体过程与细节的方法.	解法三:注意到小狗奔跑的总路程只与总时间有关,而小狗奔跑的总时间又等于甲、乙二人从出发到相遇所经历的时间,从而避免了路程或时间的分段计算(这对于最后结果显然并非是必须的).是一种从时间整体上考虑问题的思想方法.

例 2	
解法一:采用了直接计数的方法,不可避免地要处理重复计数等问题,需要防止重数或遗漏,从而使过程复杂化.	解法二:采用了间接计数的方法.把需要统计的三个面上的单位立方体当做一个整体来统计.这一整体中单位立方体的个数恰等于两个正方体(其棱长相差 1)体积数之差.由于思考角度的易位,从而使解法简化.

从上述两题的分析比较中,不难看出解题者在思想方法上的差距:方法的繁简后而、实质上是思想方法优劣的问题.因此,我们可以说:整体方法,是聪明人的方法!

2.整体方法必须胸怀全局

在战争中,整体方法表现在不计一城一地的得失,而着眼于整个战役的胜利.古今中外都有不少这方面的战例,这是在战争中运用整体方法的结果.在围棋对弈中,有所谓"宇宙流"、"大模样"的

弈棋风格或布局模式，这种局部服从整体、着眼于全局得失的深谋远虑，实际上是整体方法的娴熟运用．类似的，象棋对弈中的“丢卒保车”、“弃子保帅”等招数，同样是这种全局观念的具体体现．

在中医的诊断、治疗过程中，往往把病人的经络看成是一个相互联系的整体，着眼于病人总体状况的改善．治疗失眠，可以在脚心的涌泉穴药灸．治疗胃疾，也可以在足三里下针．这就是胸怀全局、着眼整体的思想方法．

下面看一段关于解题的对话：

例3 对于实数 x、y，定义新运算 $x*y=ax+by+c$，其中 a、b、c 是常数，等式右边是通常的加法与乘法运算．已知 $3*5=15$，$4*7=28$，那么 $1*1=$______.

王珍与顾菊是要好的同桌同学，她们对本题进行了如下的讨论：

顾菊：初看这道题，觉得那还不容易嘛，既然 $3*5=15$，$4*7=28$，“$*$”就代表了普通的乘法运算，因此 $1*1=1$．再一想，问题可能不那么简单：那已知条件就用不上了．

王珍：的确如此．我们不妨从新运算的定义入手，根据两个特殊的运算结果，可以得到

$$3*5=3a+5b+c.$$

$$4*7=4a+7b+c.$$

顾菊：后来我也是这样想的，于是很快得到方程组

$$\begin{cases}3a+5b+c=15, & ①\\ 4a+7b+c=28. & ②\end{cases}$$

王珍：那么，解题的下一步是——

顾菊：确定常数 a、b、c！所以我立即着手解①②联立所成的方程组，由于三个未知数只有两个方程，就显得束手无策

了……

王珍：不过，我们的最后目标是求 $1*1$ 等于多少，根据定义，$1*1=a+b+c$，就是求 $a+b+c=?$

顾菊：现在解题卡了壳，这 $a+b+c$ 怎么求呢？

王珍：我仔细研究了"$3a+5b+c$"、"$4a+7b+c$"与所要求的"$a+b+c$"三者之间的关系，有一个很重要的"巧妙"发现——"$a+b+c$"恰等于"$3(3a+5b+c)-2(4a+7b+c)$"……

顾菊：真是妙不可言！我知道了——

"$a+b+c=3\times15-2\times28=-11$"！

就是"$1*1=-11$"！

分析一下两位同学的思维过程，不难发现她们在思想方法上的差别：

顾菊同学把解题关键定为求 a、b、c 的值，在解题中企图"各个击破"，从而使解题过程受阻；而王珍则根据最后的解题目标，把"$a+b+c$"当成一个整体，从而使问题获得了顺利解决.

从本例可以看出，在解决问题的过程中，能否胸怀全局，把所研究的问题看成一个有机整体，是否善于用"集成"的眼光，把某些式子或图形看成一个整体，善于把握它们之间的关联，进行有目的、有意识的整体处置，是关系到解题成败的至为重要的关键.

因此，整体方法首先必须从整体出发.

3.整体方法必须注重对局部的研究

在战争中，如果不了解每个据点敌人的兵力部署，不了解每个方位的最新动态，不了解每个地区的敌我力量对比，就不能指挥整

个战役取得胜利.

同样,在中医诊断中,不了解病人具体的体征,如脉象、舌苔、气色等等,就不能对病人的整体状况及病因作出准确的判断,就不能做到对症下药.

在处理数学问题的过程中,在眼观整体、胸怀全局的前提下,同样需要加强对局部的研究与分析,从而促使思维主体对问题的整体情况分析判断得更为深刻,制定出切合实际的解题方案.

例 4 如图 2,直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面为等腰直角三角形($\angle ABC=90°$),且 $BC=B_1B$,O 为 AC 之中点,求:(1)$\angle OBC_1$ 的度数;(2)二面角 $O-C_1B-C$ 的大小.

下面是师、生二人关于本题解法的一段对话——

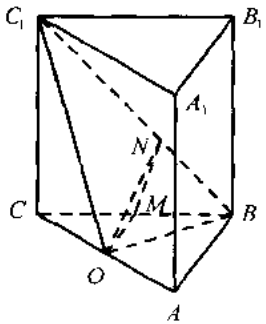


图 2

师:你准备从哪里着手解决这个问题?

生:第(1)问似乎好办,只要连结 C_1O,设 $AB=BC=BB_1=a$,不难求出 $\triangle C_1OB$ 三边的长,可用余弦定理求出 $\cos B$ 来……

师:那第(2)问呢?

生:看来……第(2)问也只有走解三角形这条路了.在底面 $\triangle ABC$ 中,过 O 作 $OM\perp BC$,$\because$ 平面 $ABC\perp$ 平面 CC_1B,$\therefore$ $OM\perp$ 平面 CC_1B,再过 M 作 $MN\perp C_1B$,垂足为 N,连结 ON,由三垂线定理得 $ON\perp C_1B$,所以,$\angle ONM$ 就是二面角 $O-C_1B-C$ 的平面角……

师:接下来就要解 $\mathrm{Rt}\triangle OMN$……

生:……是的.

师:你刚才所说的方法是可行的,也是通常采用的方法.根据

本题几何体的特点,有没有更简捷的方案呢?

生:……

师:注意到 $AB=BC=BB_1$,且$\angle ABC=90°$,这个直三棱柱似乎与某一常见的几何体有些联系……

生:它正好是正方体的一半!

师:对了,抓住这个局部特征,我们不妨在这三棱柱的旁边,再添加一个与它类同的三棱柱,把它拼接成一个正方体……

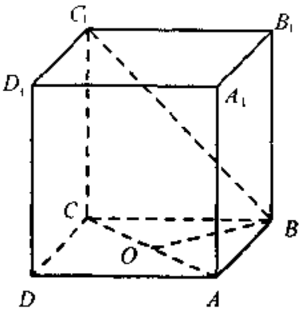


图 3

生:让我试试——这样一来,可以拼成一个正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$(如图 3).

师:你再看看,原来的线段 C_1B、BO 在新拼成的正方体中的位置——

生:C_1B 这时是正方体一个面的对角线,因为 O 是 CA 的中点,OB 就是正方形 $ABCD$ 的对角线 CA 的一半——我知道了,$\triangle C_1DB$ 是正三角形,$\therefore\ \angle C_1BO=60°$!

师:我们已经初步尝到了这种方法的甜头,再看看第(2)问怎么办? 二面角 $O-C_1B-C$ 的大小有没有更简便的求法呢?

生:(自言自语)在新补成的正方体中,已经出现了一个新面 C_1DB——不,它就是原来的面 C_1BO.

师:因此,二面角 $O-C_1B-C$ 就是二面角 $D-C_1B-C$……

生:只要作 $CE\perp C_1B$,垂足 E 就是C_1B 的中点,连结 DE,由三垂线定理 $DE\perp C_1B$,因此$\angle DEC$ 就是所求二面角的平面角——这下可简单了:设正方体的棱长为 1,$CE=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\mathrm{tg}\angle DEC=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore \quad \angle DEC = \text{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,这就是所求二面角的大小！想不到竟来得全不费功夫！

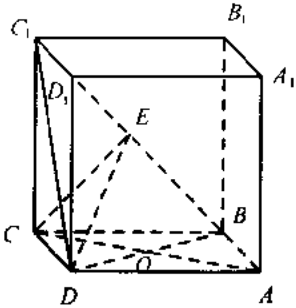


图 4

师:你是不是可以小结一下?

生:一开始,我看问题是就事论事的,虽然注意到了局部特征,但仍然局限在所给的三棱柱中考虑问题,因此只能走当时那条路.后来把它放到正方体中考虑,眼界似乎陡然开阔起来.

师:这就是由局部想到整体,从整体的角度再看局部所带来的结果.

生:真是高明的修补师,神奇的“整”形术!

本例说明,整体是由局部组成的,没有局部就没有整体.强化对局部特征的研究,目的在于深化对整体的了解与把握.因此,这里所说的局部是在整体观念指导下的局部,而不是以偏概全、坐井观天式的臆想.

整体方法离不开对局部的深入剖析.

4.整体方法必须有利于达到“整体”的彼岸

在战争中指挥员总是特别关注那些影响全局的战斗,并及时把局部的胜利扩大为整个战役的胜利.

在中医诊疗中,医生总是把关键性体征的正常化,作为重要的阶段目标,因为它们是通向痊愈的桥梁.

同样,在解题过程中也必须注意从局部到整体的过渡,即有利