勾股定理

中國數学会上海分会
中学數学研究委員会編

新知識出版社

10

勾 股 定 理

中國數学会上海分会
中学數学研究委員会編

新 知 識 出 版 社
一九五七年·上海

勾　股　定　理

中國數学会上海分会
中学數学研究委員会編

*

新　知　識　出　版　社　出　版
(上 海 湖 南 路 9 号)
上海市書刊出版業營業許可証出 015 号
上海协兴印刷厂印刷　新華書店上海發行所总經售

*

開本：787×1092　1/32　印張：2 7/8　字數：65,000
1956年5月第1版　1957年7月第7次印刷
印數：145,001—155,000本

統一書号　13076：39
定　价：(7) 0.26元

序　言

本会为了学習苏联先進經験，帮助教師積極提高教学質量，並根据当前中学教学实际需要，决定着手編寫有關高初中數学各科包括几何、代數、三角、算術教材內容的小册子，陸續分批出版，以提供中学數学教師作为進一步研究和了解教材的参考，从而更好地掌握教材的教学目的。同時，也可供高初中学生作为課外鑽研的題材，以利更深刻理解教材內容。我們希望通过这套小册子的出版，能使數学界同志对中学數学教材的研究得到廣泛的交流。

这本“勾股定理”的小册子，系根据中学數学教学大綱修訂草案“三角形与圓的各种綫段的相互關系”並参考吉西略夫高中平面几何編寫的。它对於勾股定理及其推廣作了比較詳細的敍述，在解决具体問題上尽可能联系銳角三角函數，並介紹了我國古代數学家对勾股定理的成就；關於圓的比例綫段，則着重綫段之間的相互關系；对於某些綫段的一次式及二次方程根的作圖，也作了簡單的分析与討論。

本会在編寫本册前，曾拟就編寫計划，經編輯組兩次討論，然后确定初步提綱，分別由張元書、賴云林兩同志提供材料，而由黃松年同志执筆寫成，再經楊荣祥、范际平兩同志校訂，最后由楊荣祥、黃松年兩同志作了修正。虽然这样，但由於我們水平有限，時間忽促，缺點是难免的，希望數学界同志予以批評和指正。

中國數学会上海分会中学數学研究委員会

1956年2月

目　錄

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

勾股定理及其歷史

看到了一个建筑物，如果要測量它的高度，我們学習了相似三角形的性質，知道只要在建筑物的前面，直立一根測桿 $A'B'$，运用圖 1 的方法和下面的式子，就可以測量出它的高度來。

$$\because \quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C},$$

$$\therefore \quad AB=\frac{A'B'\cdot BC}{B'C}.$$

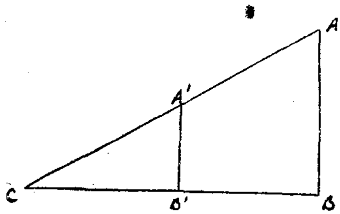

圖 1

（在這里 $A'B'$，$B'C$ 及 BC 均可以直接測量）

但是上面这个測量問題，当 BC 的距离已經量出，如果我們能运用測角器測出 $\angle C$ 的度數，則可以运用銳角三角函數定义來計算 AB 之高度，顯然比前者較簡便了。

銳角三角函數，是运用几何圖形相似三角形的性質和代數的运算方法，來解決三角形的問題。它为我們在实际測量或計算中，帶來了較簡捷的方法。

關於銳角三角函數的定义，在吉西略夫教本中已有詳細的敍述，这里不作重複。現在談談运用銳角三角函數解直角三角形的問題。

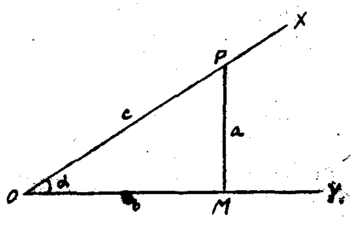

圖 2

这里又必須根据兩个基本

原則：

1. 兩銳角互为余角的關係；

2. 銳角三角函數的定义。

由三角函數定义

$$\sin A=\frac{a}{c},$$

$A, a, c,$ 为三个量。

我們必須知道其中任何兩个量，才可求出第三个量，余傚此。但希注意，三角函數是边角相依的關係，如果只知道兩个銳角，等於只知道一个銳角 A，欲求 a, c 仍不可能；必須知道其中一个銳角和一条边長。

我們从三角函數定义出發，可推得下面的一些結果：

1. $$\boldsymbol{a=c\sin A};$$

2. $$\boldsymbol{b=c\cos A};$$

3. $$\boldsymbol{a=b\tan A}.$$

上面三个關係式，是我們解直角三角形問題的基本形式，現在列举一些实际的測量例子說明如下：

1. 以長 16 m 之梯，斜倚於大樓的屋簷，其傾斜与地面成 30° 之角，問屋簷离地之高 P 及該梯下端与牆脚之距离。

解 因为牆与地平面互相垂直的，故梯斜倚於屋簷与牆及地平面可視为一直角三角形，而梯表示斜边。

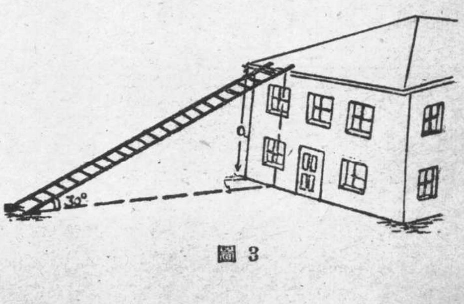

圖 3

現在已知斜边及一銳角而須求兩直角边，顯然只要应用 $a=c\sin A$ 及 $b=c\cos A$

兩關係式卽可求得。

$$\because \qquad c=16\,\mathrm{m},$$

$$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}, \qquad \cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \qquad a=c\sin A$$

$$=16\,\mathrm{m}\times\frac{1}{2}=8\,\mathrm{m}.$$

$$b=c\cos A$$

$$=16\times\frac{\sqrt{3}}{2}=8\sqrt{3}$$

$$\approx 8\cdot 1.732\approx 13.9(\mathrm{m}).$$

2. 海岸外停泊一船，某生站在海岸 C 點置羅盤儀測量，見船在正東，該生从 C 點向正南方向進行至 $200\,\mathrm{m}$ 之 B 點，見船在向東偏北15°之处，求 C 點与船之距离。

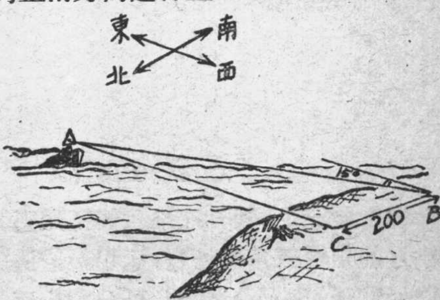

圖 4

解 設 A 为船之位置，

$$BC=200\,\mathrm{m},$$

由於从 B 點观測船在向東偏北 15° 之处，

$$\therefore \qquad \angle ABC=75^\circ.$$

現在已知一直角边及一銳角而須求另一直角边 AC，顯然只要应用 $b=a\tan B$ 的關係式，卽可求得。

$$\therefore \qquad AC=BC\tan 75^\circ. \quad 但\ \tan 75^\circ=3.7321,$$

$$\therefore \qquad AC=200\times 3.7321\approx 746(\mathrm{m}).$$

3. 以鉄絲之一端，系於垂直在地面高 $8\,\mathrm{m}$ 之电線桿頂上，而

另一端系於离电線桿 7 m 之地面之牆脚上，求鉄絲長。

解　电線桿長 8 m，卽直角三角形之一直角边 $a=8$ m，电線桿至牆脚之距离 7 m 卽为直角边 $b=7$ m.

現在欲求鉄絲之長，卽为求这直角三角形的斜边 c。

顯然須根据三角函數定义，設鉄絲之傾斜度爲 α，$\therefore \tan\alpha=\frac{a}{b}$，可根据 a 与 b 之比值檢三角函數表而求出 α 角之値，再根据 $c=\frac{a}{\sin\alpha}$ 的關係式可求 c 長。

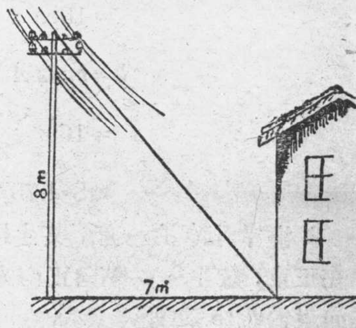

圖 5

$\therefore\quad \tan\alpha=\frac{8}{7}=1.1429.$

而　$\tan 48°=1.1106.$

$\tan 49°=1.1504.$

$\alpha=49°.$

$\therefore\quad$ 但 $\sin 49°=0.7547,$

$$\therefore\quad c=\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{8}{0.7547}\approx 10.6(\text{m}).$$

像上面三个問題，如果我們不用三角函數，是否可运用以前所学过的相似三角形性質，运用对应边成比例的關係以求得呢？我們知道任何一个三角形，可分割为兩个直角三角形，兩直角三角形由於兩銳角互余的關係，所分割的兩个直三角形必能与原直角三角形相似。但在問題 1 及問題 2 中，只有一个已知边的条件，其他一已知銳角的条件，則对运用相似三角形概念求線段來講並無作用，因此不能运用比例線段的關係而求得其他的边長來。至於問題 3，則情況有所不同，因为它就是已知直角三角形的兩直角边 a 及 b，而須求斜边 c 的問題。我們可以运用相似三角形的性質，而逐步推導出直角三角形三边的關係式來，茲將推

導的过程敘述如下：

若 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=\angle R$，過 C 作 $CD\perp AB$，D 为垂足，則 CD 將 $\triangle ABC$ 分割为兩个直角三角形 ACD 和 CBD.

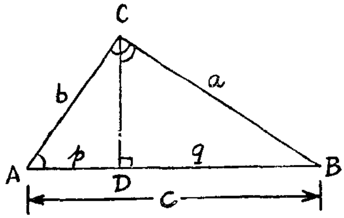

圖 6

但在 Rt$\triangle ACD$ 和 Rt$\triangle CBD$ 中，

$$\angle CAD=\angle BCD=90^\circ-\angle DCA.$$

$\therefore$ $$\triangle ACD\sim\triangle CBD.$$

$\therefore$ $$\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{BD}.$$

又在 Rt$\triangle ACD$ 和 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 是公共的銳角，

$\therefore$ $$\triangle ACD\sim\triangle ABC,$$

$\therefore$ $$\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB}.$$

又在 Rt$\triangle CBD$ 和 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle B$ 是公共的銳角，

$\therefore$ $$\triangle CBD\sim\triangle ABC,$$

$\therefore$ $$\frac{BD}{BC}=\frac{BC}{BA}.$$

如果我們命 $AD=p$, $BD=q$, $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$,

卽有 $$\frac{q}{a}=\frac{a}{c},\qquad \frac{p}{b}=\frac{b}{c},$$

$\therefore$ $$cq=a^2 \tag{1}$$

$$cp=b^2 \tag{2}$$

(1)+(2)得 $$cq+cp=a^2+b^2.$$

卽 $$c(q+p)=a^2+b^2.$$

但 $$q+p=c.$$

$\therefore$ $$c^2=a^2+b^2.$$

顯然問題3我們可运用 $c^2=a^2+b^2$ 的關係式來求得。

$\because \quad a=8\text{m}, \quad b=7\text{m},$

$\therefore \quad c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{8^2+7^2}=\sqrt{64+249}$

$=\sqrt{113}=10.6(\text{m}).$

上面所推導出來的直角三角形中 $c^2=a^2+b^2$ 的關係式也就是說，**凡一个直角三角形的斜边的平方，等於其他兩直角边平方的和。我們称这个定理叫做勾股定理。**

在几何圖形中，有一种正射影的概念。什么叫做正射影呢？正射影的定义是：由點 A 到定直線 l 所作垂線的足，則 A_1 就称为點 A 在直線 l 的正射影。而正射影一般就簡称为射影。如果 A 點就在这个直線上時，則 A 點的射影就是它的本身。同样由點 A 及 B 在直線 l 上的射影連接而成的線段 A_1B_1，就称为線段 AB 在直線 l 上的射影。

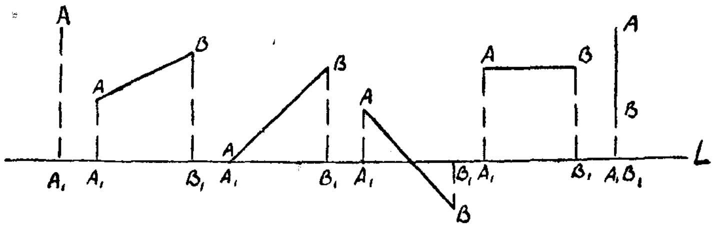

圖 7

我們从上面勾股定理的推導过程中，又可以看出直角三角形中線段之間，有下面几个關係存在：

1. $CD^2=AD\cdot BD.$

2. $AC^2=AD\cdot AB.$

3. $BC^2=BD\cdot AB.$

这也就是說：**直角三角形斜边上的高，是兩条直角边在斜边上的射影的比例中項。每一条直角边，是这条直角边在斜边上**

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

的射影和斜边的比例中項。由於这个定理，我們才導出勾股定理的存在。此外，我們根据它又可以推導出下面兩个性質：

1. 結合半圓的弓形角是直角的性質推導出："从圓上任意一點，向直徑所引的垂綫，是直徑被垂綫足所分成兩綫段的比例中項。而連接这點和直徑的一个端點的弦，是这弦在直徑上的射影和直徑的比例中項。"

設 AB 为 O 圓之直徑，C 为圓周上任意一點，$CD \perp AB$，D 为垂足，AC 及 BC 为弦。

則 1. $\dfrac{AD}{CD}=\dfrac{CD}{BD}$；

2. $\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AC}{AB}$；

3. $\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{BC}{BA}$.

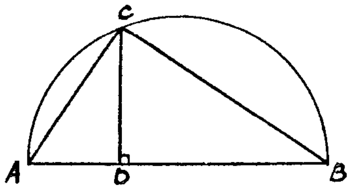

圖 8

2. 得出了一个重要的几何基本作圖："求作兩已知綫段的比例中項。"並提供了理論根据。

設 a 及 b 为兩已知綫段。

求作 a 及 b 的比例中項。

分析 (1)根据圖 9 中 $CD^2=AD\cdot BD$ 的性質，假如命 $BD=b$, $AD=a$, 則 $AD+BD=a+b=AB$.

$\because \triangle ABC$ 为直角三角形，而 AB 是斜边，故本題只須取 $AB=a+b$ 之長为直徑作半圓，再过其分點 D，作此直徑 AB 之垂綫而止於圓周 C，則此垂綫 CD 卽为 a 及 b 之比例中項。

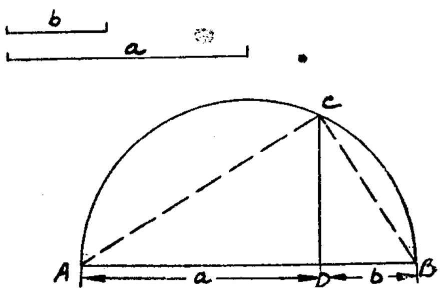

圖 9

(2)根据圖 9 中 $AC^2=AB\cdot AD$(或 $CB^2=AB\cdot BD$)的性質，若 AB 之長为 a，而 AD 之長为 b，卽 $AC^2=ab$，則 AC 就是 a 及 b 的比例中項。

但是 $\triangle ACB$ 是直角三角形，而 AB 是斜边，AD 是 AC 在斜边 AB 上的射影，故只須取 $AB=a$ 之長为直徑作半圓，再於 AB 上取 $AD=b$，过 D 點作 AB 之垂綫止於圓周一點 C，連接 AC，卽为所求之比例中項。

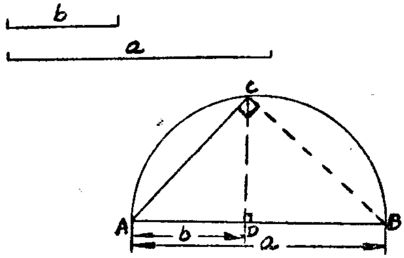

圖 10

假如已知兩綫段 $a=b$ 時，从圖 9 中 $CD^2=AD\cdot BD$ 的性質可以看出 D 點必为圓心，而 CD, AD, BD 均为 ABC 圓之半徑。$\therefore$ a 及 b 兩綫段之比例中項恆等於它們的本身綫段。但从圖 10 中 $AC^2=AB\cdot AD$(或 $CB^2=AB\cdot BD$)的性質也可看出，如 $a=b$，卽 $AB=AD$(或 $BA=BD$)，这時 D 點与 B 點(或 D 點与 A 點)必重合，因此 CD 高这綫段等於零，$\therefore$ C 与 D 兩點重合，卽 B, C, D 三點(或 A, C, D 三點)重合於 B 點(或 A 點)，顯然也可以看出 a 与 b 这兩綫段的比例中項，就等於 a 或 b 綫段的本身。

但是作为一个作圖問題，我們必須將这綫段作出來，因此当 $a=b$ 時，我們只能运用上面分析的第一种方法，才能作出 a, b 这兩綫段的比例中項。而分析的第二种作圖方法，只適合於已知条件 a, b 兩綫段不等時才可能。

兩綫段相乘，就决定一个平面圖形的面積(这概念到研究多边形面積問題時，將詳細討論)。而勾股定理的產生，也是由於实际平面面積的測量而發現，但我們在这里所研究兩綫段之積，是只研究它們的量數与量數之間的依存關系，这些任意兩綫段

長度之比与度量的單位無關。我們在研究的時候，通常將長度單位省略，將它視为綫段本身的關系。

勾股定理可以說是數学上的一个至宝，它不僅在几何学上用处很廣，同時也是數学上或其他自然科学所常常用到的，譬如物理学上分力合力的計算等。我們知道，數学由於实际生產需要而發生和發展的，由於數学的發展，相应的推進了其他科学的發展和生產力的發展，使人類从事於生產劳動中獲得了新的工具，因而他推進了人類社会的前進。在數学史上，自从有勾股定理出現以后，不僅數学本身向前大踏步的推進，同時对实际生產需要上解决了許多問題，尤其是測量問題。相反的，勾股定理的發現，不可否認是千百万劳動人民經驗的累積。我們的祖先也很早發現了勾股定理，但究竟何人首先發現，由於有關考据資料不完整或者失傳，所以現在还是一个討論的問題，有的說以商高为最早，有的說以陈子为最早，有的說夏禹治洪水就运用了这个性質。現在將各种不同的見解，綜合敍述如下，但从其中可以看到我們祖先对这問題的偉大成就。

根据我國一部古老的算書——周髀算經上面的記載（關於周髀算經一書，从考据最遲为西漢末年的作品，从唐朝以來便分为上下兩卷，所述內容分为三个時期：第一期記周公和商高的問答，第二期記荣方和陈子的問答，第三期为纂成此書），商高为周朝与周公同時代的人，約在公元前 1120 年左右。根据天祿琳瑯叢書汲古閣影宋抄本周髀算經卷上，記載有周公和商高的一段对話。商高說：“……故折矩，此为勾廣三，股修四，徑隅五。”勾廣就是勾長，股修就是股長，徑隅就是弦長。商高这段話也就是說，如果將一根直的尺（如圖 11），將它折成一个直角，若較短的一段（指勾）的長为 3，較長的一段（指股）長为 4，則原來尺的兩端間的距离（指弦）的長一定为 5。我們后來將它簡算为“勾三，

股四，弦五。"如果用 a 表示勾，b 表示股，c 表示弦，即 $a:b:c=3:4:5$.

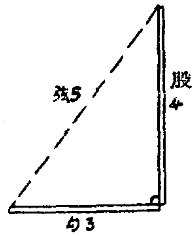

圖 11

周公后來營成周，便运用勾三股四弦五之術測量日景和高深廣远，故以周髀書名，卽原於此。

到了漢代，有一个數学家，名叫趙君卿，他再註周髀算經一書，对商高这段話，補了一个"勾股方圓圖註"。他这个註解是完全运用面積分割的性質來說明的。这勾股方圓圖一共有三幅，第一幅名叫弦圖，現在我們將它抄錄在这里但暫不作証明，俟以后討論面積問題時再作詳細的証明。他在註解中說："勾股各自乘，併之为弦实，開方除之，卽弦。"也就是說："勾股相乘，所得的數，是矩形 $ABCD$ 的面積，为直角三角形 ABC 的兩倍，以 2 乘 $2\triangle ABC$，再加勾股差的平方——卽中間小的正方形的面積，則得正方形 $ABEF$，此卽为弦 AB 的平方。"如果我們用代數式子來表示，卽 $2ab+(b-a)^2=c^2$. $\therefore a^2+b^2=c^2$.

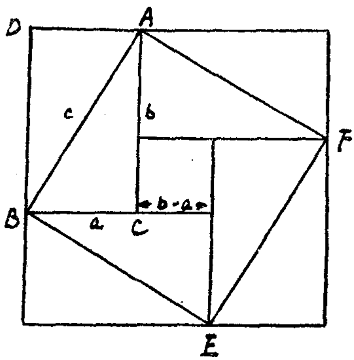

圖 12

至於周髀算經上記載荣方与陈子之問答，係从周髀測日景談起。陈子說："周髀長八尺，夏至日晷一尺六寸，髀者股也，正晷者勾也，……俟勾六尺。"也就是說，以六尺为勾，八尺为股，其數適为勾三股四的倍數，卽 $6^2+8^2=10^2$. 因为古法"勾之損益寸千里"。勾指日景，說明兩地日景差一寸卽相距一千里，故其求斜至日，卽以"日下为勾，日高为股，勾股各自乘，並而開方，除之，

得斜至日从髀之所旁至日十万里”（如圖13）。从上面的說法，可見陈子已將勾三股四弦五的勾股術，推廣到許多倍了。陈子这个測量的方法，虽然我們不能拿今天的眼光來評价，但可見陈子在当時已經掌握了一个直角三角形兩直角边的平方和，等於斜边的平方的勾股定理了。可是遺憾的是我們不知道陈子对勾股定理是否有普遍的証明，因为目前尙無考据，这也是今后在中國數学史上所須研究的問題。

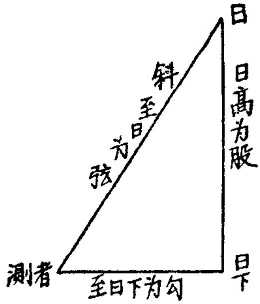

圖 13

又根据周髀算經的記載：“勾廣三，股修四，徑隅（弦）五。”又說：“兩矩共長二十有五，是謂積矩。”兩矩指勾股各自乘之積，並之得二十五便是“積矩”，也卽为弦的自乘積。該書又接着說：“故禹之所以治天下者，此數之所由生也。”这說明勾三股四弦五的初步勾股術是夏禹治天下時所發明的。而夏禹治天下是从治水開始，他繼承了共工和伯鯀失敗的教訓，認識水性由山川往下流。因此須了解山川之形与高下之势，必須从測量做起，而勾股術正是由於測量之需要而發生和發展的。所以周髀算經上記載夏禹对初步勾股術的貢献，其理由也很充分的。我們还可引路史后紀十二註引趙語曰：“禹治洪水决流江河，望山川之形，定高下之势，除滔天之災，使东注海，無浸溺之患，此勾股之所繇生也。”但夏禹如何在实际測量發現和运用了勾股術，这也是目前尙無考据的。

以前对这於直角三角形的定理，在歐几里德几何原本里称为畢氏定理，認为系希臘人畢達哥拉斯氏所發現。其实畢氏的証明已經失傳，現在几何学中的普遍性証明，系希臘人歐几里德所發現的。据考查畢氏系紀元前500年時代的人，歐几里德系

紀元前300年時代的人，而我們祖先夏禹治水始於堯75年（卽紀元前2059年），而商高系紀元前1120年時代的人，而陈子的年代目前尚無确实考証，但根据周髀算經中有一段話：“昔者，荣方問於陈子曰：今者竊聞夫子之道，知日之高大，光之所照，一日所行，远近之數，人所望見，四極之窮，列星之宿，天地之廣袤，夫子之道皆能知之，其信有之乎？”荣方此問称为昔者，便知周髀一書非荣方所著。同時又載有陈子之語：“古者天子治周，此數望之从周，故曰周髀。”周初用髀長八尺測量日景，正是周成王經營洛邑的時候，故陈子所称天子系指成王，周卽成周。而陈子称天子而不称周天子，故知为周代的人。同時周髀卷上又說：“日冬至在牵牛”，依歲差率冬至日在牵牛初应在春秋時代，因此陈子至遲为春秋時代的人，相当於公元前六七世紀的時候。

从上面看來，夏禹及商高顯然早於畢達哥拉斯，而陈子也可能早於畢氏或与他同一時代，畢氏虽有普遍性証明，而陈子也突破了勾三股四弦五的界限，因此为了紀念我國古代數学家的功蹟，現在用勾股定理之名，这对我們來講是很引为自豪的。

關於勾、股、弦之名詞的來源，据說系由於人的手臂弯曲成直角，產生一个直角三角形（如圖14）而起。手臂的上一部分，卽与肩相連的部分称为勾；手臂的下一部分，卽与手相連的部分称之为股；而手之頂端至肩的距离称之为弦。


圖 14

勾三股四弦五，恰为三个連續整數的關系，至於勾三股四弦五的倍數，当然也適合於勾股定理的性質，但只不过非